

Risoluzioni degli esercizi

Esercizio 2.1. Calcolare la densità di probabilità della somma di tre variabili casuali indipendenti con distribuzione uniforme fra 0 e 1, determinandone valor medio e varianza.

Risoluzione. Indichiamo con x, y e w le tre variabili (ciascuna con valor medio $1/2$ e varianza $1/12$) e con z la loro somma. La variabile somma z ha valor medio $\eta_z = \eta_x + \eta_y + \eta_w = 3/2$, varianza (per l'indipendenza fra le tre variabili) $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_w^2 = 1/4$ e quindi deviazione standard $\sigma_z = 1/2$. La densità di probabilità $f_z(z)$ della somma è data dalla convoluzione delle densità delle tre variabili, che hanno la forma $u(x)-u(x-1)$, con trasformata $(1-\exp(-s))/s$. Svolgendo i calcoli, per esempio antitrasformando il cubo della trasformata anzidetta, si ricava:

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{per } 0 \leq z \leq 1 \\ -\frac{3}{2} + 3z - \frac{z^2}{2} & \text{per } 1 \leq z \leq 2 \\ \frac{9}{2} - 3z + \frac{z^2}{2} & \text{per } 2 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

concludendo che la funzione presenta il massimo per $z = 1.5$, con $f_z(1.5) = 3/4$.

Esercizio 2.2 Esaminare la densità della somma delle tre variabili ottenuta nell'esercizio precedente e discuterne le differenze essenziali rispetto a una densità normale avente lo stesso valor medio e la stessa varianza.

Risoluzione. La densità della somma è costituita da tre archi di parabola, è nulla al di fuori dell'intervallo 0,3 e ha il massimo 3/4 per $z = 1.5$. La curva normale con lo stesso valor medio e la stessa varianza si estende invece fra $-\infty$ e $+\infty$, con massimo 0.798 per $z = 1.5$. La differenza più vistosa fra le due densità è costituita dalle "code" della gaussiana al di fuori dell'intervallo 0,3, il cui integrale rappresenta una probabilità complessiva di $2.7 \cdot 10^{-3}$.

Esercizio 3.1. Dimostrare che la banda equivalente di rumore B_N per la funzione di trasferimento risonante: $H(j\omega) = (j\omega/\omega_0 Q)/(1 + j\omega/\omega_0 Q + (j\omega)^2/\omega_0^2)$ è data dalla (3.8).

Risoluzione. Il risultato espresso dalla (3.8) si ottiene applicando la (3.7), cioè integrando il modulo quadro della funzione $H(j\omega)$. Oppure, più semplicemente, utilizzando la (3.4) e tenendo presente che $|H_M| = 1$. Si ha in tal caso: $c_0 = 0$, $c_1 = 1/\omega_0 Q$, $d_0 = 1$, $d_1 = 1/\omega_0 Q$, $d_2 = 1/(\omega_0)^2$. Sostituendo nella (3.4) si ottiene $B_N = \pi f_0/2Q$.

Esercizio 3.2. Calcolare la banda equivalente di rumore B_N per un filtro con taglio alle basse e alle alte frequenze con funzione di trasferimento $H(j\omega) = j\omega\tau_1/(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)$.

Risoluzione. Il modulo della funzione $H(j\omega)$ è massimo per $\omega = 1/\tau_1\tau_2$, dove si ha $|H_M| = \tau_1/(\tau_1 + \tau_2)$. Utilizzando la (3.4) si ottiene poi: $\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{\tau_1}{4\tau_2(\tau_1 + \tau_2)}$. Sostituendo questi risultati

nella (3.7) si ottiene infine: $B_N = \frac{\tau_1 + \tau_2}{4\tau_1\tau_2}$.

Esercizio 3.3. Calcolare il tempo d'integrazione equivalente e la banda di rumore equivalente per un filtro con risposta impulsiva a dente di sega $h(t) = (2-2t)[u(t)-u(t-1)]$ e verificare la validità della relazione (3.12).

Risoluzione. Il filtro ha risposta impulsiva con area unitaria e funzione di trasferimento $H(j\omega) = \frac{2j\omega + 2\exp(-j\omega) - 2}{-\omega^2}$ con $|H_M| = 1$. Il tempo d'integrazione equivalente si ottiene applicando la (3.16): $T_N = 3/4$ s. La banda equivalente si ottiene applicando la (3.7): $B_N = 2/3$ Hz. La (3.12) è verificata in quanto $B_N T_N = 1/2$.

Esercizio 5.1. Calcoliamo i parametri λ e q_e di un rumore shot misurandone la risposta con un circuito RC. Una corrente di rumore shot $i(t)$, descritta dalla (5.2), viene applicata a un circuito RC parallelo, osservandone la tensione $v(t)$ ai suoi terminali. Calcolare i parametri λ e q_e in termini del valor medio η e della varianza σ^2 della tensione $v(t)$ supponendo che il resistore sia abbastanza freddo da poterne trascurare il rumore termico.

Risoluzione. Il valor medio della tensione $v(t)$ ai capi del circuito RC è $\eta = IR = \lambda q_e R$. Dato che la banda equivalente di rumore del circuito è $B_N = 1/4RC$, la varianza della tensione $v(t)$, utilizzando la (5.4), è: $\sigma^2 = S_{ii} R^2 B_N = \lambda q_e^2 R / 2C$. Dalle due precedenti si ricava pertanto: $q_e = 2C\sigma^2/\eta$ e $\lambda = \eta^2 / 2RC \sigma^2$.

Esercizio 6.1. Il foglio tecnico dell'amplificatore AD8510 fornisce i seguenti valori tipici del rumore di tensione (spettri di ampiezza): 34 nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$ a 10 Hz, 12 nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$ a 100 Hz, 8 nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$ a 1 kHz, 7.6 nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$ a 10 kHz. Ricavare il valore della frequenza d'incrocio f_c .

Risoluzione. Assumendo uno spettro di potenza totale della forma $A/f + B$ e minimizzando la somma degli scarti quadratici normalizzati per stimare A e B , si ricava il seguente valore approssimato della frequenza d'incrocio: $f_c = 190$ Hz.

Esercizio 7.1. Il rapporto segnale/rumore di un convertitore ADC. Ricavate una espressione per il rapporto segnale/rumore, espresso in unità di decibel, di un convertitore analogico-digitale in funzione del numero n di bit, considerando il rapporto fra il valore efficace della sinusoide di massima ampiezza che rientra nella dinamica del convertitore e il valore efficace del rumore di quantizzazione.

Risoluzione. Per un convertitore a n bit con quanto q , in base alla (7.1), il valore efficace di una sinusoide con ampiezza picco-picco ΔV corrispondente alla massima dinamica è $\Delta V / 2\sqrt{2} = q(2^n - 1) / 2\sqrt{2}$. Il valore efficace del rumore di quantizzazione, in base alla (7.2), è $q/2\sqrt{3}$. Dalle precedenti si ricava il rapporto fra il valore efficace del segnale e quello del rumore: $(2^n - 1)\sqrt{3/2}$. Cioè, nell'approssimazione $2^n \gg 1$, $\text{SNR} = 1.76 + 6.02n$ in unità di decibel.

Esercizio 8.1. Calcolare il valore quadratico medio del rumore del circuito risonante in Fig. 8.2 per $R = 100 \Omega$, $L = 1$ mH, $C = 1$ nF.

Risoluzione. Calcoliamo il valore quadratico medio del rumore moltiplicando il massimo dello spettro ($4kT\sqrt{L/C}$) per la banda equivalente di rumore del circuito ($\omega_0/4Q$): $\sigma^2 = kTR\sqrt{LC}$. Con

i valori numerici dati, alla temperatura $T = 290\text{ K}$, si ha: $S(\omega_0) = 16.0 \cdot 10^{-18}\text{ V}^2/\text{Hz}$, $B_N = 25\text{ kHz}$, $\sigma^2 = 40.0 \cdot 10^{-12}\text{ V}^2$.

Esercizio 8.2. Analizzare il circuito in Fig. 8.3 per ricavarne l'espressione dello spettro S_{vv} alla porta d'ingresso.

Risoluzione. Consideriamo separatamente i tre contributi (rumore di tensione V_n , rumore di corrente I_n e rumore termico V_{nR} del resistore R_F) alla tensione totale di rumore alla porta d'ingresso, rappresentandoli in termini di spettri di ampiezza e utilizzando la relazione $V_o = -AV$ fra il segnale all'ingresso invertente e l'uscita.

Nel caso del rumore di tensione si ha $V_o = V_n + V_-$ e quindi: $V(V_n) = V_n A / (1 + A)$.

Nel caso del rumore di corrente si ha $V_o = I_n R_F + V_-$ e quindi: $V(I_n) = I_n R_F / (1 + A)$.

Nel caso del rumore del resistore si ha $V_o = V_{nR} + V_-$ e quindi $V(R_F) = V_{nR} / (1 + A)$.

Sommando i quadrati dei tre contributi, con $V_{nR}^2 = 4kTR_F$, si ottiene l'espressione riportata nell'Esempio 8.1.

Esercizio 8.3. Ricavare una espressione per il valore del resistore di reazione che rende minima la temperatura equivalente alla porta d'ingresso del circuito considerato nell'Esempio 8.1.

Risoluzione. L'espressione della temperatura equivalente riportata nell'Esempio 8.1 presenta evidentemente un minimo in funzione della resistenza R_F . Annullando la derivata della temperatura equivalente rispetto a R_F si ottiene: $R_{F0} = AV_n / I_n$. Per tale valore la temperatura equivalente del resistore "freddo" $R_0 = R_{F0} / (1 + A)$ è: $T_{EQmin} = T / (1 + A) + AV_n I_n / (2k(1 + A))$.

Esercizio 9.1. Utilizzare la Fig. 9.2 per determinare il valore di I_n del preamplificatore 5113 alla frequenza di 1 kHz.

Risoluzione. Dal grafico si ricavano approssimativamente i due valori della resistenza di sorgente, $R_{s1} = 4\text{ k}\Omega$ e $R_{s2} = 50\text{ M}\Omega$, in corrispondenza dei quali, alla frequenza di 1 kHz, la figura di rumore vale 3 dB. Cioè il fattore di rumore vale 2, e quindi il rumore del preamplificatore è pari al rumore termico della sorgente. Nel caso $R_{s1} = 4\text{ k}\Omega$ si considera trascurabile il contributo di I_n e si ha quindi: $V_n^2 = 4kTR_{s1}$ da cui $V_n = 8.0\text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$. Nel caso $R_{s2} = 50\text{ M}\Omega$ si considera trascurabile il contributo di V_n e si ha quindi: $I_n^2 = 4kT/R_{s2}$ da cui $I_n = 18\text{ fA}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Esercizio 9.2. Determinare i valori di V_n e I_n per il transistor rappresentato in Fig. 9.3 quando è polarizzato con $I_C = 1\text{ mA}$.

Risoluzione. Dal grafico si ricavano approssimativamente i due valori della resistenza di sorgente, $R_{s1} = 15\text{ }\Omega$ e $R_{s2} = 28\text{ k}\Omega$, in corrispondenza dei quali, quando il transistor è polarizzato con $I_C = 1\text{ mA}$, la figura di rumore vale 4 dB. Nel caso $R_{s1} = 15\text{ }\Omega$ si considera trascurabile il contributo di I_n e si applica quindi la prima formula dell'Esempio 9.1: $V_n = 2\sqrt{kT_0 R_{s1} (10^{NF/10} - 1)}$ ottenendo così $V_n = 0.60\text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$. Nel caso $R_{s2} = 28\text{ k}\Omega$ si considera trascurabile il contributo di V_n e si applica quindi la seconda formula dell'Esempio 9.1: $I_n = 2\sqrt{\frac{kT_0}{R_{s2}} (10^{NF/10} - 1)}$ ottenendo così $I_n = 930\text{ fA}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Esercizio 9.3. Calcolare l'energia minima rivelabile da un rivelatore al silicio con $C = 20 \text{ pF}$, $V_n = 5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ e $I_n = 20 \text{ fA}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Risoluzione. Utilizzando la formula (9.12) con i valori numerici dati si ottiene $ENC = 6.08 \cdot 10^{17} \text{ C}$. Pertanto il numero di cariche elementari equivalenti è $ENC/q_e = 379$ e l'energia minima rivelabile: $3.6 \times 379 = 1.36 \text{ keV}$.

Esercizio 10.1. Calcolare come varia il rumore $1/f$ quando un resistore di resistenza R viene sostituito con n resistori di resistenza R/n disposti in serie, se il rumore $1/f$ dei resistori segue la legge (10.2).

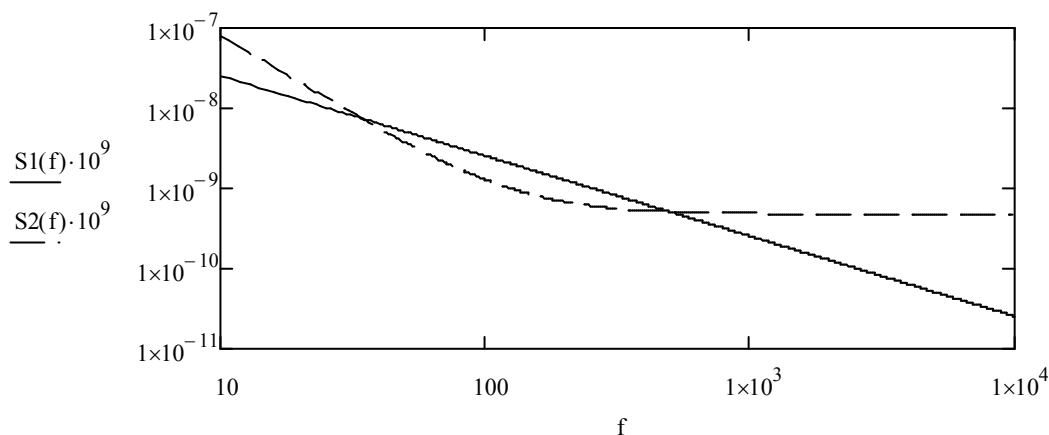
Risoluzione. Lo spettro di potenza del rumore di tensione $1/f$ di un resistore di resistenza R percorso da una corrente di intensità I , dato dalla formula (10.2) è: $(mIR)^2/f$. E quindi nel caso di un resistore di resistenza R/n , supponendo che il coefficiente m resti invariato, si ha: $(mIR)^2/n^2f$. Sommando infine i contributi di n resistori si ha: $(mIR)^2/nf$.

Esercizio 10.2. Calcolare la frequenza d'incrocio f_c per il resistore considerato dell'Esempio 10.1.

Risoluzione. Conoscendo il valore efficace del rumore $1/f$ in una decade di frequenza: $V_{eff}^2 = 10^{-12} \text{ V}^2$, dalla (6.13) si ricava come segue il coefficiente dello spettro di potenza $1/f$ ($S(f) = A/f$): $A = V_{eff}^2 / \Delta n \cdot 10 = 4.34 \cdot 10^{-13} \text{ V}^2$. Uguagliando lo spettro $1/f$ e quello termico ($4kTR$) si ricava infine la frequenza d'incrocio: $f_c = 27 \text{ kHz}$.

Esercizio 10.3. Confrontare graficamente gli spettri del rumore termico, nella regione fra 10 Hz e 10 kHz, di due condensatori da 10 nF. Uno con dissipazioni caratterizzate da $\tan \delta = 10^{-3}$; l'altro, da un resistore (30Ω) in serie e uno ($0.5 \text{ G}\Omega$) in parallelo all'elemento ideale.

Risoluzione. Lo spettro di potenza del rumore termico di tensione del condensatore caratterizzato dal fattore di perdita è dato dalla (6.4): $S_1(\omega) = 4kT \tan \delta / \omega C$. Quello dell'altro condensatore, con un resistore $R_s = 30 \Omega$ in serie e un resistore $R_p = 0.5 \text{ G}\Omega$ in parallelo, si ricava applicando il teorema di Nyquist (4.22): $S_2(\omega) = 4kT \text{Re}[Z(j\omega)]$, con $Z(j\omega) = (R_s + 1/j\omega C R_p) // R_p$ e $\text{Re}[Z(j\omega)] \approx R_p (1 + \omega^2 C^2 R_s R_p) / (1 + \omega^2 C^2 R_p^2)$, essendo $R_s \ll R_p$. La figura rappresenta i due spettri fra 10 Hz e 10 kHz.



Esercizio 10.4. Calcolare il valore della corrente di collettore a cui i due contributi al rumore di tensione d'ingresso si eguagliano per un transistore con $r_{bb'} = 20 \text{ ohm}$.

Risoluzione. Utilizzando la formula (10.10) con $T = 290 \text{ K}$ si ha: $I_C = kT / (2q_e r_{bb'}) = 625 \mu\text{A}$.

Esercizio 10.5. Calcolare lo spettro del rumore d'uscita di un inseguitore di tensione (*voltage follower*).

Risoluzione. Caratterizzando l'amplificatore con la legge $V_o = A(V_+ - V_-)$, per il follower ($V_o = V_-$) si ha $V_o = AV_+/(1+A)$. Se il segnale d'entrata è applicato all'ingresso non invertente tramite una impedenza $Z_s(j\omega)$, lo spettro di potenza del rumore totale di tensione ivi è:
 $V_n^2 + I_n^2 |Z_s(j\omega)|^2 + 4kT \operatorname{Re}[Z_s(j\omega)]$. E quindi lo spettro d'uscita è:
 $S_o(\omega) = (A/(1+A))^2 (V_n^2 + I_n^2 |Z_s(j\omega)|^2 + 4kT \operatorname{Re}[Z_s(j\omega)])$.

Esercizio 10.6. Dimostrare la (10.27) e determinare il valore della resistenza di sorgente che minimizza il fattore di rumore.

Risoluzione. Utilizzando le espressioni riportate a pag. 80, i contributi allo spettro d'uscita del rumore dei resistori R_1 , R_2 e del rumore di corrente I_n associato all'ingresso invertente sono rispettivamente: $4kTR_2^2/R_1$, $4kTR_2$ e $I_n^2 R_2^2$. Che vanno sommati e riportati all'ingresso non invertente dividendoli per il quadrato del guadagno dato dalla (10.24): $1 + R_2/R_1$. Si ottiene così:
 $4kT(R_1//R_2) + I_n^2 (R_1//R_2)^2$. A cui vanno sommati i contributi del rumore di tensione V_n^2 , del rumore di corrente associato all'ingresso non invertente $I_n^2 |Z_s|^2$ e del rumore termico della sorgente $4kT \operatorname{Re}[Z_s(j\omega)]$, ottenendo così la (10.27). Considerando per semplicità una impedenza di sorgente reale R_s , il fattore di rumore, ottenuto rapportando lo spettro (10.27) allo spettro termico della sorgente,

è: $F = 1 + \frac{V_n^2 + I_n^2 (R_1 // R_2)^2 + 4kT (R_1 // R_2) + I_n^2 R_s^2}{4kTR_s}$, dove va notato che i due termini I_n^2

rappresentano il rumore dei generatori di corrente associati ai due ingressi dell'amplificatore. La condizione di minimo si ottiene derivando F rispetto a R_s e annullando la derivata. Il risultato è analogo a quello trovato nel §9.1, espresso dalla (9.5), dove però lo spettro di potenza della tensione di rumore equivalente che determina il valore di R_{s0} , il quale deve rappresentare anche i contributi del rumore dei resistori R_1 , R_2 e del rumore di corrente associato all'ingresso invertente, è: $V_n^2 + I_n^2 (R_1 // R_2)^2 + 4kT (R_1 // R_2)$.

Esercizio 11.1. Il contributo di rumore di un condensatore. All'ingresso di un amplificatore con rumore di tensione di $1 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ viene disposto in serie un condensatore da 10 nF con $\tan \delta = 10^{-3}$. Calcolate il rumore di tensione complessivo V_n del circuito alla frequenza di 100 Hz .

Risoluzione. Il rumore del condensatore si ricava dalla (6.4): $4kT \tan \delta / \omega C = 2.55 \cdot 10^{-18} \text{ V}^2/\text{Hz}$. Sommandolo a quello dell'amplificatore ($10^{-18} \text{ V}^2/\text{Hz}$) si ottiene $3.55 \cdot 10^{-18} \text{ V}^2/\text{Hz}$, cioè $V_n = 1.88 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Esercizio 11.2. Determinare le caratteristiche (capacità e fattore di perdita) di un condensatore che consenta di misurare fra 10 e 100 Hz la corrente di rumore di un JFET con $V_n \sim 1 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ e $I_n \sim 1 \text{ fA}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Risoluzione. Per rendere dominante, e quindi ben misurabile, il contributo del rumore di corrente, occorre che il condensatore presenti una impedenza molto maggiore di $V_n/I_n = 10^6 \Omega$ fra 10 e 100 Hz . La condizione limite a 100 Hz si ha per $C = 1.6 \text{ nF}$. Scegliamo pertanto una capacità di 200

pF . Lo spettro di potenza del rumore di tensione di questo elemento è dato dalla (6.4). Inoltre lo spettro di ampiezza della corrispondente corrente di rumore, $(4kT\omega C \tan \delta)^{1/2}$, deve essere molto minore di $1 fA/\sqrt{Hz}$. La condizione limite si ha per $\tan \delta = 10^{-30}/4kT\omega C = 5 \cdot 10^{-4}$ e quindi scegliamo un condensatore con $\tan \delta$ dell'ordine di 10^{-4} .

Esercizio 13.1. Proporre una tecnica per misurare la velocità di un liquido in un condotto di lunghezza nota.

Risoluzione. Il tempo di propagazione si determina calcolando la correlazione incrociata fra le vibrazioni delle pareti del condotto in corrispondenza delle due sezioni agli estremi del tratto considerato. Il massimo della funzione, quando il moto del liquido è sufficientemente turbolento, si otterrà per un ritardo pari al tempo di propagazione. La velocità del liquido, infine, è data dal rapporto fra la lunghezza del condotto fra le due sezioni e il tempo di propagazione.

Esercizio 13.2. Ricavare una espressione per lo spettro di tensione ai terminali della scatola B dopo il riscaldamento da parte della batteria. Tracciare il grafico dello spettro in funzione della frequenza, per $R = 1 \text{ ohm}$, supponendo che il resistore riscaldato si porti a 600 K e l'altro si mantenga a 300 K .

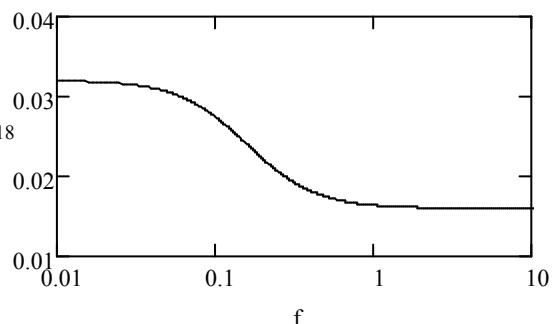
Risoluzione. Gli spettri del rumore del gruppo RC e del gruppo RL nella scatola B si ricavano

applicando il teorema di Nyquist (4.22), da cui si ottiene rispettivamente: $S_C(\omega) = \frac{4kRT}{1 + (\omega RC)^2}$ e

$$S_L(\omega) = \frac{4kTR(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Se il resistore riscaldato si trova a T_1 e l'altro a T_2 , lo spettro totale ai terminali della scatola B, $\frac{S(f) \cdot 10^{18}}{\text{V}^2/\text{Hz}}$, somma dei due spettri precedenti, avendo posto

$$R = \sqrt{L/C} R, \text{ è: } S(\omega) = 4kR \frac{T_1 + T_2 (\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}.$$



Lo spettro in figura è stato calcolato ponendo $C = 1 \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$, $T_1 = 600 \text{ K}$, $T_2 = 300 \text{ K}$.

Esercizio A.1. Calcolare la densità di probabilità all'uscita di un limitatore simmetrico con ingresso casuale a distribuzione normale. L'ingresso è normale a media nulla e deviazione standard unitaria. La caratteristica del limitatore è la seguente: $y = x$ nell'intervallo $-1, +1$, $y = \text{sign}(x)$ altrove.

Risoluzione. Nell'intervallo $-1, +1$ la densità dell'uscita coincide con quella dell'ingresso, che è data dalla formula (2.5) con $\eta = 0$ e $\sigma = 1$. In corrispondenza di $y = -1$ e di $y = 1$ la densità d'uscita è costituita da due funzioni delta, con coefficienti 0.1587 , uguali fra loro, dati dall'integrale della densità d'ingresso rispettivamente fra $-\infty$ e -1 e fra 1 e ∞ . Si ha pertanto:

$$f_y(y) = 0.1587 \delta(y+1) + [u(y+1) - u(y-1)] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) + 0.1587 \delta(y-1)$$