

Kapitel 13

Funktionen mehrerer Variablen Skalare Felder und Vektoren

Einleitung**Der Begriff der Funktion mehrerer Variablen**

Der Funktionsbegriff wird für den Fall erweitert, daß mehr als zwei Variable voneinander abhängen. Das ist in der Praxis sehr oft der Fall.

Eine spezifische Arbeitstechnik beim Studium mathematischer und physikalischer Ableitungen ist, eine ähnliche Aufgabe wie die im Text Schritt für Schritt parallel zum Text zu bearbeiten. Führen Sie alle Überlegungen während der Arbeit mit dem Lehrbuch auch für die folgende Funktion durch

$$z = f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

13.1 Einleitung

13.2 Der Begriff der Funktion mehrerer Variablen

Lehrbuch Seite 7 - 14

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

2

25

Leider Irrtum. Gehen wir Schritt für Schritt vor, um die Fläche zu gewinnen:

1. Schritt:

Schnitt mit der x - z -Ebene

Bedingung $y = 0$

$$z = f(x, y = 0) = 3$$

2. Schritt:

Schnitt mit der Ebene
parallel zur x - z -Ebene

Im Abstand y_0

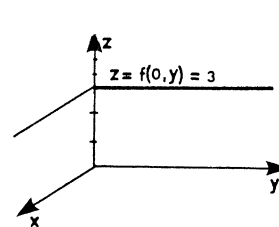
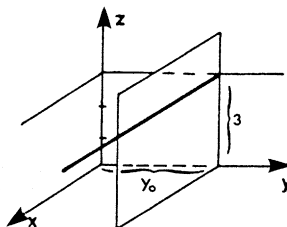
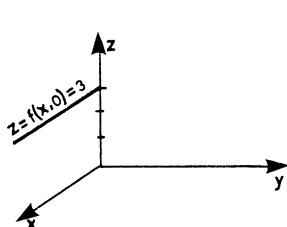
$$z = f(x, y_0) = 3$$

3. Schritt:

Schnitt mit der y - z -Ebene

Bedingung $x = 0$

$$z = f(0, y) = 3$$



26

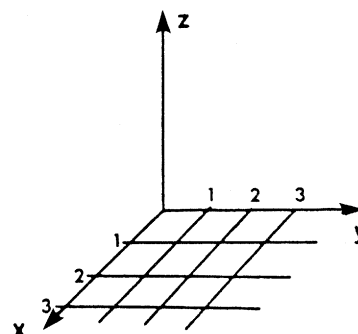
49

$$\vec{A}(1, 0, 0) = \frac{(0, 1, 0)}{\sqrt{1}} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{A}(1, 1, 0) = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

$$\vec{A}(0, 1, 0) = \frac{(1, 0, 0)}{\sqrt{1}} = (1, 0, 0)$$

Zeichnen Sie die Vektoren ein.



50

2

Haben Sie die Rechnung im Text parallel durchgeführt für die Funktion

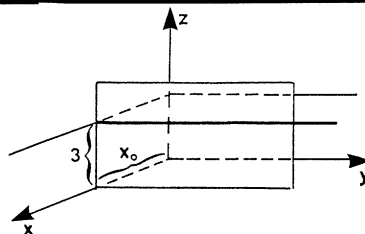
$$z = f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)} ?$$

Ja ▷ 4

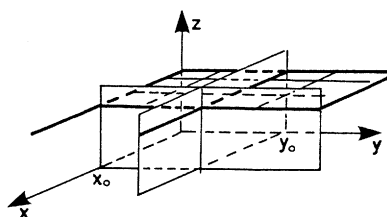
Nein ▷ 3

4. Schritt: Schnitt mit einer Ebene
parallel zur y - z -Ebene im Abstand x_0

$$z = f(x_0, y) = 3$$

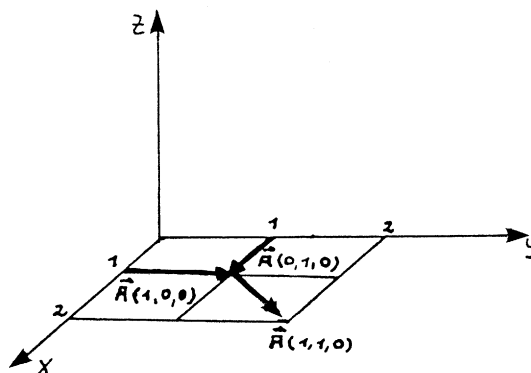


5. Schritt: Wir bringen die Schnittkurven
in eine Skizze zusammen und nehmen
weitere Schnittkurven hinzu.
Das ergibt die Skizze im Lehrschritt 24.



..... ▷ 27

50



Berechnen Sie den Betrag dieser drei Vektoren. Sie werden sehen, daß sie den Betrag 1 haben.

..... ▷ 51

Eigentlich sehr schade.

Die Technik, eine Aufgabe parallel zum Text zu rechnen, ist nur scheinbar unbequem. Natürlich dauert es dann länger. Aber Sie gewinnen ein sichereres Verständnis. Das spart Zeit in der Zukunft.

Ob es Ihnen nicht vielleicht doch möglich ist, die folgende Fläche parallel zum Lehrbuch, Abschnitt 13.2, zu skizzieren?

$$z = e^{-(x^2+y^2)}$$

Nun geht es weiter:

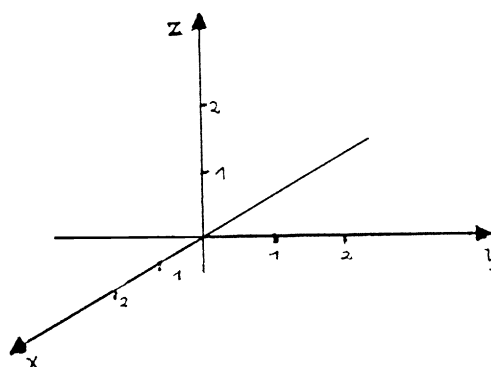
Gegeben sei die Funktion

$$z = x^2 + y^2$$

Skizzieren Sie die Schnitte mit

a) der x - z -Ebene $y = 0$

b) der y - z -Ebene $x = 0$



Nun geht es weiter mit dem 3. Schritt:

Wir berechnen die Vektoren \vec{A} für eine weitere Ebene, z.B. für die Ebene, die im Abstand $z = 1$ von der x - y -Ebene liegt.

Wir wählen die Punkte

$$P_4 = (1, 0, 1), \quad P_5 = (1, 1, 1) \quad P_6 = (0, 1, 1)$$

Geben Sie den Vektor für P_4 an: $\vec{A}(1, 0, 1) = \dots\dots\dots$

Erinnerung, es war: $\vec{A}(x, y, z) = \frac{(y, x, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

4

Sehr gut so.

Natürlich ist es mühsamer, statt rasch zu lesen, noch eine Rechnung parallel zum Text durchzuführen. Aber es ist ein weiterer Schritt zur Selbständigkeit.

Hier sind nun Hinweise für die Lösung $z = e^{-(x^2+y^2)}$

Werte gerundet

Wertematrix

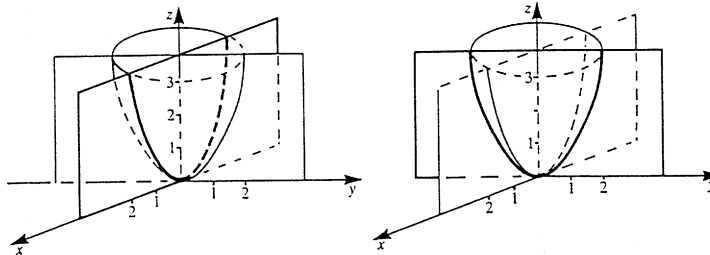
$$e^{-1} \approx 0,4$$

$$e^{-4} \approx 0,02$$

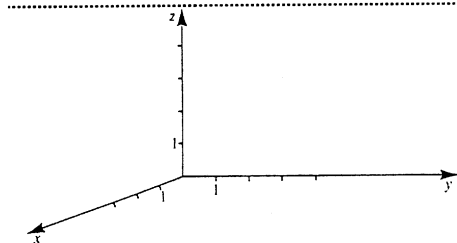
x \ y	0	1	2
0	1	0,4	0,02
1	0,4	0,1	0,007
2	0,02	0,007	0,0003

5

28



Hinweis:
Die Schnittkurven
sind Parabeln.



Skizzieren Sie nun noch die
Schnitte mit Parallelen zur x - y -
Ebene in den Höhen $z = 1$, $z = 2$,
 $z = 3$, $z = 4$ für $z = x^2 + y^2$

29

52

$$\vec{A}(1, 0, 1) = \frac{(0, 1, 0)}{\sqrt{1}} = (0, 1, 0)$$

Berechnen Sie \vec{A} für die weiteren Punkte

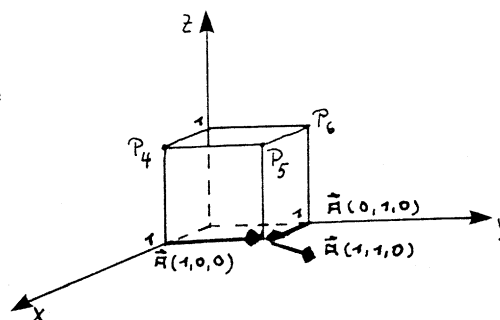
$$\vec{A}(1, 0, 1) = (0, 1, 0)$$

$$\vec{A}(1, 1, 1) = (\dots\dots\dots)$$

$$\vec{A}(0, 1, 1) = (\dots\dots\dots)$$

$$\text{Erinnerung: } \vec{A}(x, y, z) = \frac{(y, x, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Zeichnen Sie die Vektoren ein.



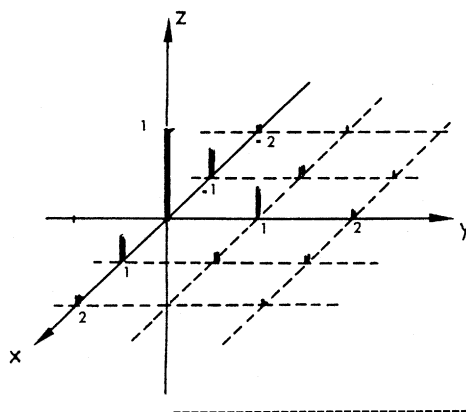
53

5

Rechts sind die Werte der Matrix
eingetragen.

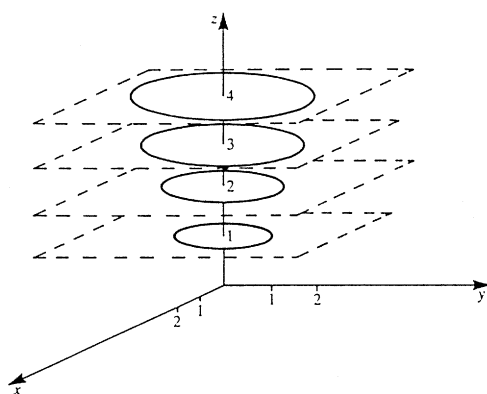
Skizzieren Sie Schnittlinien für
 $y = 0, y = 1, y = 2$

Skizzieren Sie danach Schnittlinien
für $x = 0, x = 1, x = 2$



6

29



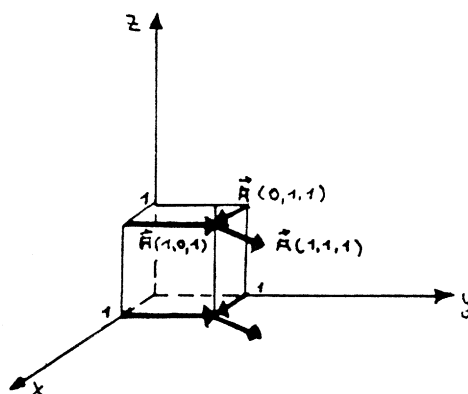
Die Schnittkurven von $z^2 = x^2 + y^2$ mit $z = \text{const.}$ sind Kreise. Versuchen Sie nun die
Fläche zu skizzieren. ----- > 30

53

$$\vec{A}(1, 0, 1) = (0, 1, 0)$$

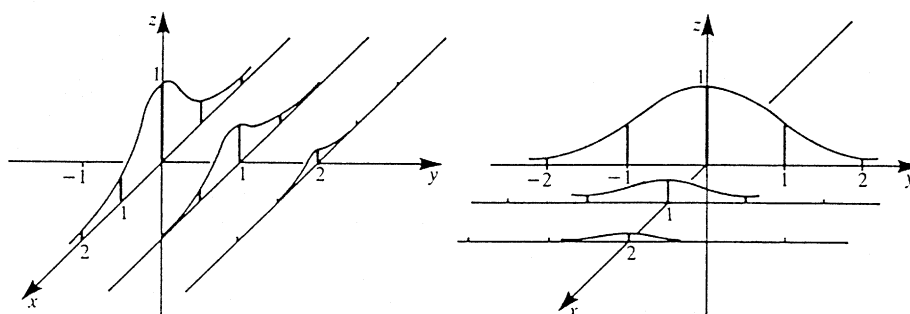
$$\vec{A}(1, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

$$\vec{A}(0, 1, 1) = (1, 0, 0)$$



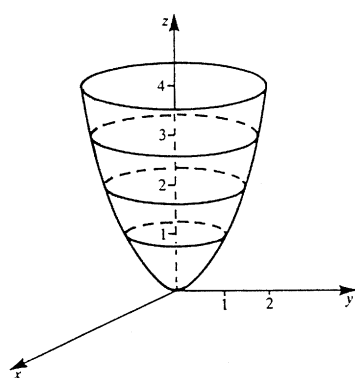
54

6



Es zeichnet sich ab ein Berg mit der Kuppe bei $x=0$ und $y=0$. Die Fläche ist der im Lehrbuch behandelten Fläche ähnlich. Im Folgenden wollen wir uns die Technik des Skizzierens von Funktionen mit zwei Veränderlichen systematisch erarbeiten. ----- ▷ 7

30



Aufgrund der Schnittkurven können wir sagen, daß die Gleichung $z = x^2 + y^2$ ein Paraboloid darstellt.

----- ▷ 31

54

Gegeben ist wieder $\vec{A}(x, y, z) = \frac{(y, x, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

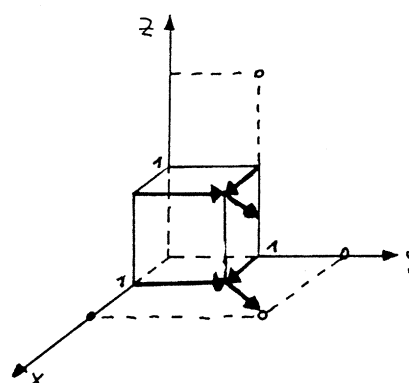
Berechnen und zeichnen Sie noch:

$$\vec{A} = (2, 0, 0) = \dots\dots\dots$$

$$\vec{A} = (2, 2, 0) = \dots\dots\dots$$

$$\vec{A} = (0, 2, 0) = \dots\dots\dots$$

$$\vec{A} = (0, 1, 2) = \dots\dots\dots$$



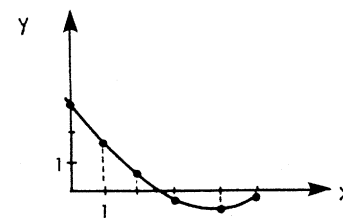
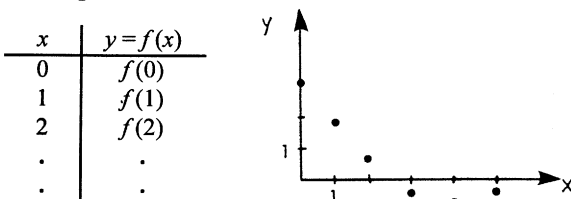
----- ▷ 55

7

Will man die Kurve für eine Funktion *einer* Veränderlichen skizzieren, kann man bekanntlich zwei Wege gehen.

Weg 1:

Man erstellt sich eine Wertetabelle für $y = f(x)$, überträgt die Punkt in das x - y -Koordinatensystem und legt eine Kurve durch die Punkte.



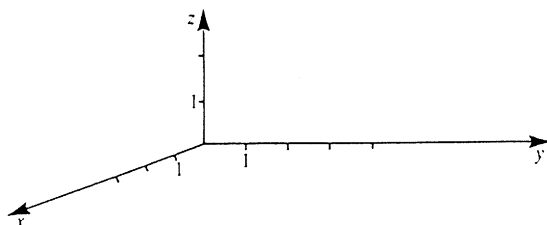
8

31

Es soll die folgende Funktion skizziert werden:

$$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$$

Zeichnen Sie zunächst den Schnitt mit der y - z -Ebene: $z(0, y) = \dots\dots\dots$



32

55

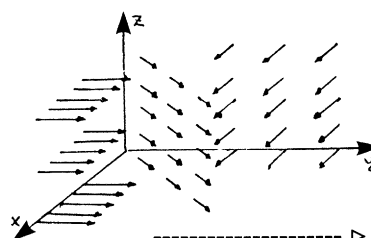
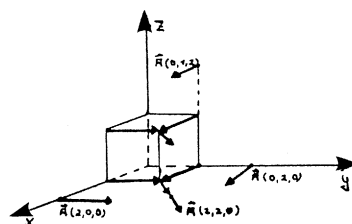
$$\vec{A} = (2, 0, 0) = \frac{1}{2} (0, 2, 0) = (0, 1, 0)$$

$$\vec{A} = (2, 2, 0) = \frac{1}{\sqrt{8}} (2, 2, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)$$

$$\vec{A} = (0, 2, 0) = \frac{1}{2} (2, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{A} = (0, 1, 2) = (1, 0, 0)$$

Setzen wir das Verfahren fort, erhalten wir das Bild rechts:



56

Weg 2: Man sucht charakteristische Werte der Funktion wie

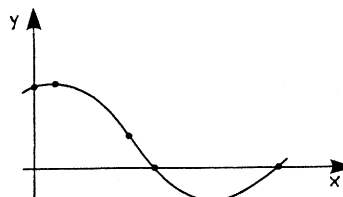
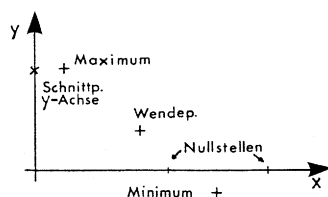
Schnittpunkte mit der x -Achse (indem man $y = 0$ setzt)

Schnittpunkte mit der y -Achse ($x = 0$)

Maxima und Minima $y' = 0$; $y'' < 0$ bzw. $y'' > 0$

Asymptoten $\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right)$

Wendepunkte ($y'' = 0$) Polstellen ($y \rightarrow \infty$)

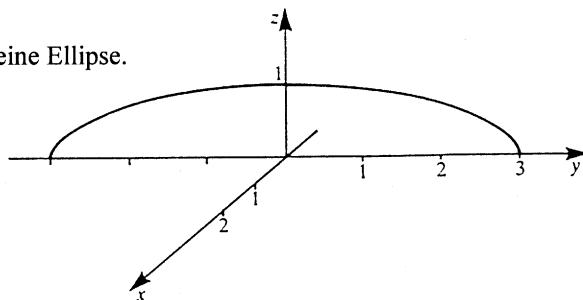


Damit kann die Kurve oft grob skizziert werden.

9

32

$$z(0, y) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} \quad \text{Dies ist eine Ellipse.}$$



Zeichnen Sie jetzt den Schnitt mit der x - z -Ebene dazu.

$$z(x, 0) = \dots\dots\dots$$

33

56

Spezielle Vektorfelder

Skizzieren Sie während der Bearbeitung des Abschnittes jeweils die diskutierten Vektorfelder auf Zetteln.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

13.5 Spezielle Vektorfelder
Lehrbuch, Seite 19 - 22

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt

57

9

Bei einer Funktion zweier Variablen (Fläche im Raum) gehen wir genauso vor. Allerdings ist das Verfahren meist langwieriger, denn eine Fläche im Raum ist ein komplizierteres Gebilde als eine Kurve in der Ebene.

Weg 1: Der Wertetabelle entspricht die Wertematrix

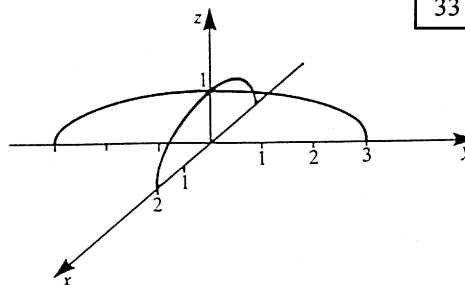
$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0	1	2	...
0				
1	$\begin{matrix} z = \\ f(x=1, y=0) \end{matrix}$		$\begin{matrix} z = \\ f(x=1, y=2) \end{matrix}$	
2				

Jedem Wertepaar (x,y) entspricht ein z -Wert, der aus der Gleichung $z = f(x,y)$ berechnet wird. Die Punkte (x,y,z) werden in das Koordinatensystem eingetragen und verbunden.

----- > 10

33

$$z(x,0) = +\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \quad \text{Auch dies ist eine Ellipse.}$$



Jetzt zeichnen Sie ein den Schnitt mit der x - y -Ebene. $0 = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$

Lösen Sie auf. $y = \dots\dots\dots$

----- > 34

57

Im Abschnitt „Spezielle Vektorfelder“ wurden 3 Typen von Vektorfeldern beschrieben:

1.

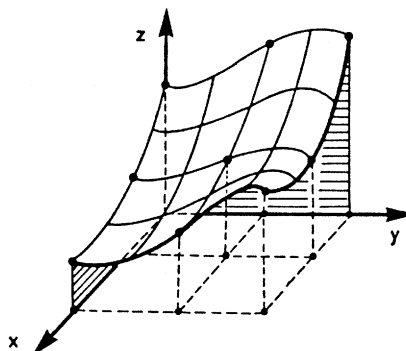
2.

3.

----- > 58

10

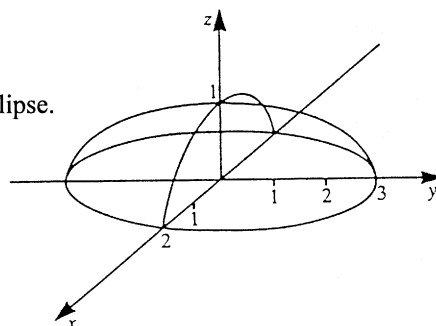
Hier ist eine Skizze, wie sie:
dann entstehen könnte.



----- > 11

$$y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Auch dies ist eine Ellipse.



$$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$$

stellt den über der x - y -Ebene gelegten Halbellipsoids dar.

Hatten Sie von den beiden letzten Aufgaben mindestens eine richtig gelöst?

Ja ----- > 36

Nein ----- > 35

58

Homogene Vektorfelder, Radialsymmetrische Vektorfelder, Ringförmige Vektorfelder

Klassifizieren Sie die folgenden Vektorfelder:

$\vec{A}(x, y, z)$	homogen	radial-symmetrisch	ringförmig	nicht speziell
$\vec{r} \cdot \frac{1}{r^3}$				
$(-y, x, 0)$				
$(a, 0, b)$				
$a(y, x, 0)$				
(b, y, c)				

----- > 59

11

Weg 2: Man sucht charakteristische Werte wie

Schnitt mit der x - z -Ebene (indem man $y = 0$ setzt)
 Schnitt mit der y - z -Ebene ($x = 0$)
 Schnitt mit der x - y -Ebene ($z = 0$)

Schnitte mit parallelen Ebenen

zu der x - y -Ebene (indem man $z = z_0$ setzt)
 zu der x - z -Ebene ($y = y_0$)
 zu der y - z -Ebene ($x = x_0$)
 Verhalten für $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$

Mit diesen Schnittkurven wird die Fläche skizziert. Manchmal erkennt man noch sehr einfach, wo das Maximum oder Minimum der Fläche liegt.

----- ▷ 12

35

Suchen Sie den Fehler und versuchen Sie, die Ursache zu identifizieren.



Falls es ein Flüchtigkeitsfehler war, weiter auf ----- ▷ 36

Falls es *kein* Flüchtigkeitsfehler war, noch einmal
 das Leitprogramm bearbeiten ab ----- ▷ 23

59

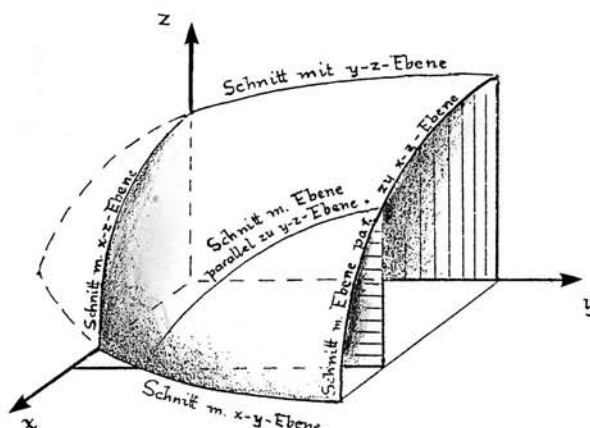
$\vec{A}(x, y, z)$	homogen	radial- symmetrisch	ringförmig	nicht speziell
$\vec{r} \cdot \frac{1}{r^3}$		X		
$(-y, x, 0)$			X	
$(a, 0, b)$	X			
$a(y, x, 0)$			X	
(b, y, c)				X

Skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{A}(x, y, z) = \vec{r} \cdot r^2$

----- ▷ 60

12

Hier ist ein Beispiel, das dann entstehen könnte.



13

36

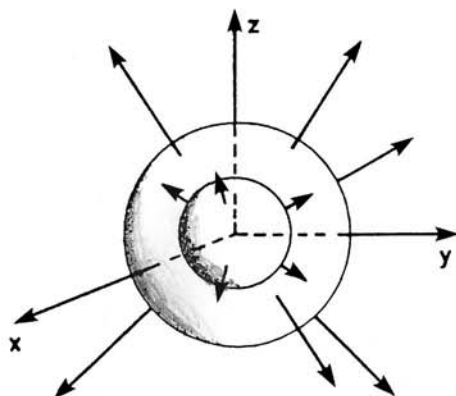
Sie wissen jetzt, wie man Funktionen mit zwei Veränderlichen graphisch darstellt.

Funktionen mit drei Veränderlichen können wir nicht mehr darstellen, dazu benötigen wir 4 Dimensionen.



37

60



Das Vektorfeld $A(x, y, z) = \vec{r} \cdot r^2$ ist radialsymmetrisch. Sein Betrag hängt nur von \vec{r} ab: $|\vec{A}| = r^3$

Das Vektorfeld $\vec{A} = (0, 0, c)$ ist..... Fertigen Sie eine Skizze dieses Vektorfeldes an.

61

13

An dem Beispiel $z = f(x, y) = x + 1$ wollen wir beide Wege vorführen.

Weg 1: Aufstellung einer Wertematrix
Gegeben ist $z = x + 1$
Füllen Sie die Wertematrix aus!

y		-2	-1	0	1	2
x						

----- > 14

37

Das skalare Feld

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

13.3 Das skalare Feld

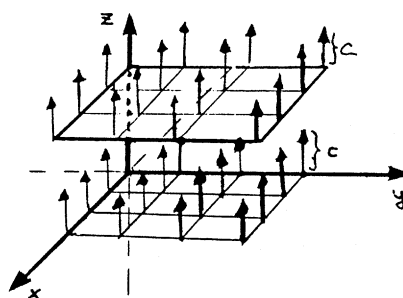
Lehrbuch, Seite 14 - 15

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt

----- > 38

homogen

\vec{A} ist von keiner der drei
Variablen x, y, z abhängig.



61

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r}$

Es ist ein Vektorfeld

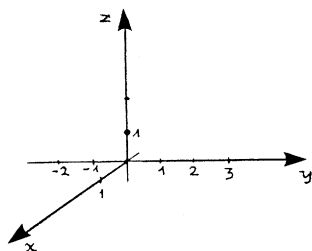
Berechnen Sie den Betrag von \vec{A} : $|\vec{A}| = \dots\dots\dots$

----- > 62

Wertematrix für $z = x + 1$
 z hängt nicht von y ab, daher
 war die Matrix einfach
 auszufüllen.

	y	-2	-1	0	1	2
x						
-2		-1	-1	-1	-1	-1
-1		0	0	0	0	0
0		1	1	1	1	1
1		2	2	2	2	2
2		3	3	3	3	3

14



Zeichnen Sie die Punkte ein für $x = 0$
 und $y = -2, -1, 0, 1, 2$

15

38

Stellt der folgende Ausdruck ein skalar Feld dar?

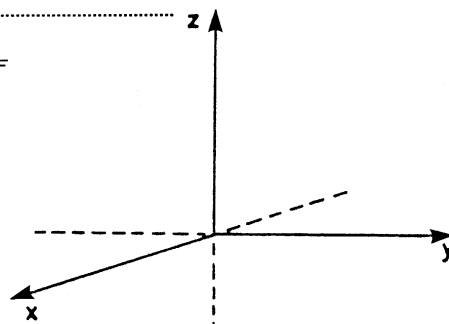
$$u = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

39

62

radialsymmetrisches Vektorfeld $|\vec{A}| = 1$

Skizzieren Sie jetzt das Feld $\vec{A} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$



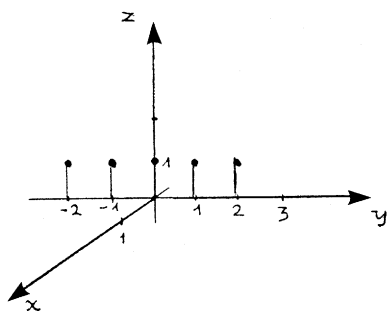
Lösung

Hilfe und Erläuterung

66

63

15



	y	-2	-1	0	1	2
x	-2	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	0	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	1
	1	2	2	2	2	2
	2	3	3	3	3	3

Zeichnen Sie nun die Punkte für $x = 1$ und $y = -2, -1, 0, 1, 2$ dazu.

----- > 16

39

Nein.

Zwar ist u ein Skalar, aber die Zuordnungsvorschrift ist durch die beiden Vorzeichen nicht eindeutig, und sie ist daher keine Funktion.

Ist der folgende Ausdruck ein skalar Feld?

$$\varphi(x, y, z) = \frac{c}{x + y + z}; \quad x + y + z \neq 0$$

----- > 40

63

Betrachten wir das Feld $\vec{A} = (x, y, z)$

Machen Sie sich zunächst klar, welche Richtungen die Vektoren haben. Das Feld ist

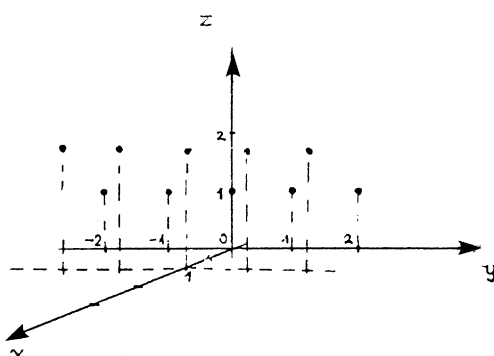
Dann überlegen Sie, wie die Beträge vom Abstand vom Koordinatenursprung abhängen.

Wenn wir auf einem Radialstrahl nach außen gehen

- ☐ nimmt der Betrag von \vec{A} zu
- ☐ bleibt der Betrag von \vec{A} gleich
- ☐ nimmt der Betrag von \vec{A} ab

----- > 64

16



Zeichnen Sie nun noch die Funktionswerte für $x = 2$ und $y = -2, -1, 0, 1, 2$ in die obige Zeichnung ein und versuchen Sie, die Fläche zu skizzieren.

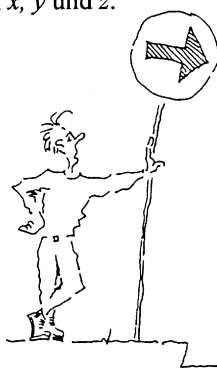
..... > 17

40

Ja

φ ist eine eindeutige Funktion von x, y und z .

φ ist damit eine skalare Größe.

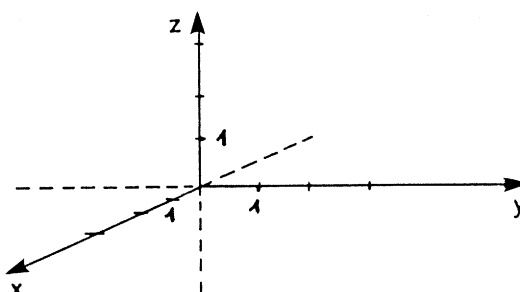


..... > 41

64

$\vec{A} = (x, y, z)$ ist ein radialsymmetrisches Vektorfeld.

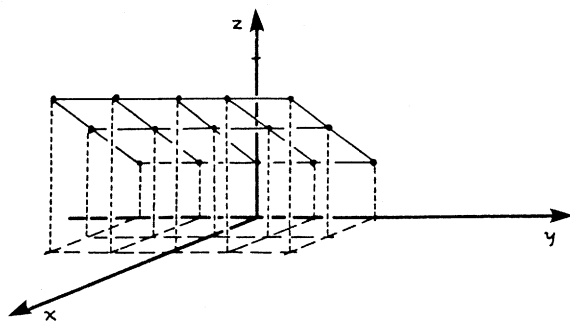
Wenn wir auf einem Radialstrahl nach außen gehen, nimmt der Betrag von \vec{A} zu.



Skizzieren Sie jetzt $\vec{A} = (x, y, z)$

..... > 65

17



Wir erhalten eine Ebene parallel zur y -Achse, die in Richtung der positiven x -Achse ansteigt. Wichtig ist, daß Sie hier selbst zeichnen lernen. Dabei braucht Ihre Skizze nur in der Sache, nicht in der Ausführung mit dieser übereinzustimmen.

----- ▷ 18

41

Das Vektorfeld

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

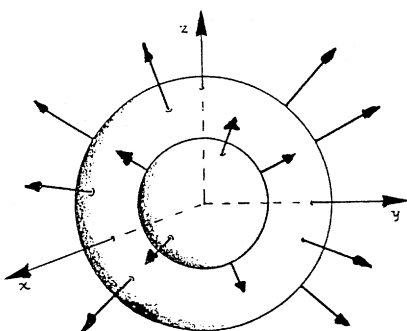
10.4 Das Vektorfeld

Lehrbuch, Seite 15 - 18

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

----- ▷ 42

65



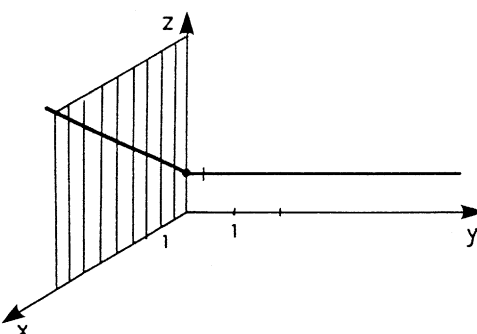
\vec{A} nimmt mit größerem Abstand vom Nullpunkt zu.

Skizzieren Sie nun $\vec{A} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

----- ▷ 66

19

Für die x - z -Ebene gilt $y = 0$
 Eingesetzt ergibt das $z = x + 1$
 Das ist eine Gerade in der x - z -Ebene.



Tragen Sie weitere Schnitte mit Parallelebenen zur x - z -Ebene ein für:

$y = 1; y = 2; y = 3.$

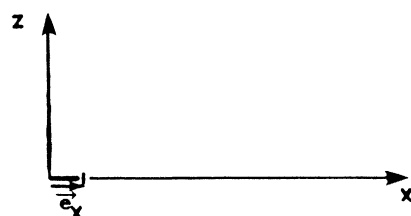
----- ▷ 20

43

Vektorfeld

Begründung: \vec{v} beschreibt eine Richtung, angegeben durch den Einheitsvektor \vec{e}_x in
 x -Richtung

Skizzieren Sie das Vektorfeld

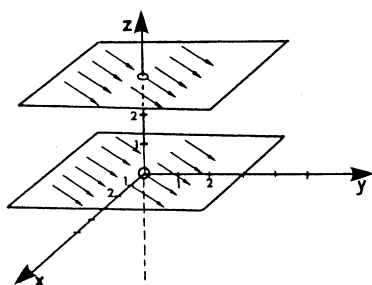


----- ▷ 44

67

$\vec{A}(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ ist ein homogenes Vektorfeld. Es ist von den Koordinaten x, y, z unabhängig. Es hat in allen Raumpunkten den gleichen Betrag und die gleiche Richtung.

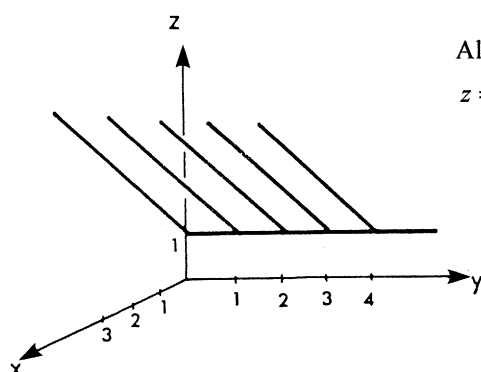
\vec{A} hat den konstanten Betrag: $|\vec{A}| = \sqrt{\frac{3^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$



Die Vektoren \vec{A} liegen in Ebenen parallel zur x - y -Ebene
 Sie stehen senkrecht auf der z -Achse.

----- ▷ 68

20



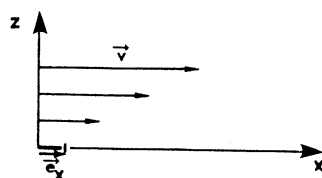
Als Schnittkurve erhält man jeweils die Gerade

$$z = x + 1$$

Zeichnen Sie in die Zeichnung die Schnitte mit Parallelebenen zur y - z -Ebene ein für $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$.

----- > 21

44



Eine Ladung Q liege im Koordinatenursprung. Dann ist nach dem Coulomb'schen Gesetz der Betrag der Kraft auf eine zweite Ladung q gegeben durch

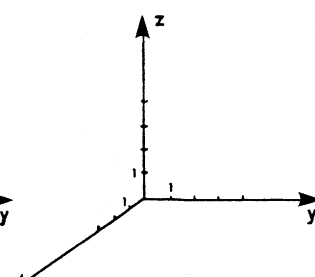
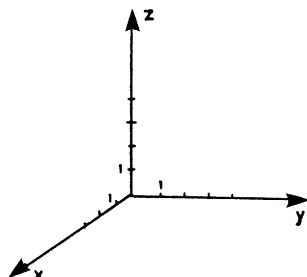
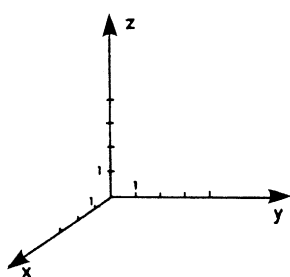
$$F(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2}$$

Beschreibt diese Ausdruck ein Vektorfeld? ☐ Ja ☐ Nein ----- > 45

68

Skizzieren Sie die drei homogenen Vektorfelder:

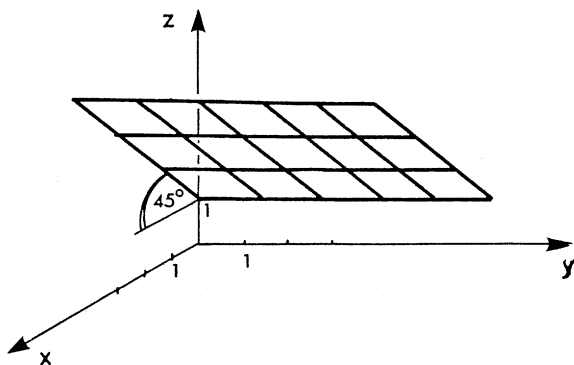
- a) $\vec{A}(x, y, z) = (5, 0, 0)$ b) $\vec{A}(x, y, z) = (0, 2, 0)$ c) $\vec{A}(x, y, z) = (1, 1, 2)$



----- > 69

21

Wir sehen, daß eine Ebene entsteht, die parallel zur y -Achse verläuft und mit einem Winkel von 45° gegen die x - y -Ebene geneigt ist.



22

45

NEIN

Die vorgelegte Beziehung beschreibt den *Betrag* der Coulomb'schen Kraft, also eine skalare Größe.

Das Vektorfeld für die Kraft ist

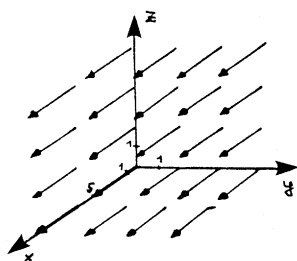
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2} \vec{e}_r$$

(\vec{e}_r ist ein Einheitsvektor, der von Q auf q zeigt, $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$)

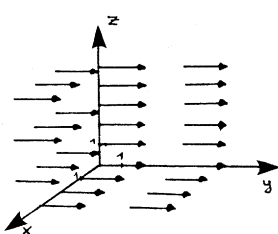
46

69

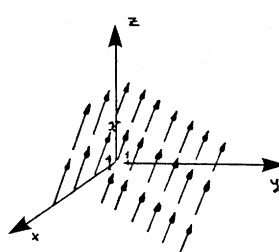
a)



b)



c)



70

22

In der Praxis verwendet man meist den zweiten Weg für das Zeichnen von Schnittkurven. Sie entstehen durch Schnitte der Fläche $z = f(x, y)$ mit Ebenen parallel zu den Ebenen, die durch die Koordinatenachsen aufgespannt werden. Denn oft möchte man sich nur ein grobes, qualitatives Bild von der Funktion $f(x, y)$ machen.

Nur wenn die Funktion $z = f(x, y)$ zu kompliziert ist, sollte man die Funktionswerte berechnen und damit die Funktion skizzieren. So gehen Computer vor, für die der Rechenaufwand praktisch nicht zählt. Daher benutzt man in der Praxis meist Computer, um analytisch durch Gleichungen gegebene Flächen darzustellen.

----- > 23

46

Schreiben Sie V für Vektorfeld und S für Skalarfeld und 0, wenn keines von beiden vorliegt.

1. $\varphi = \frac{\varphi_0}{r^2}$

☐

4. $u = u_0 \frac{1}{v}$

☐

2. $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

☐

5. $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

☐

3. $v = v_0(1 + 0,2 \cdot z)$

☐

6. $p = p_0(1 - \varphi \cdot z)$

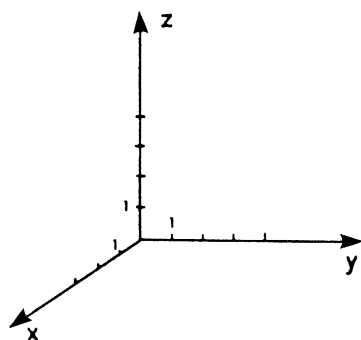
☐

----- > 47

70

Von welchem Typ ist das Vektorfeld

$$\vec{A}(x, y, z) = (-y, x, 0) ?$$



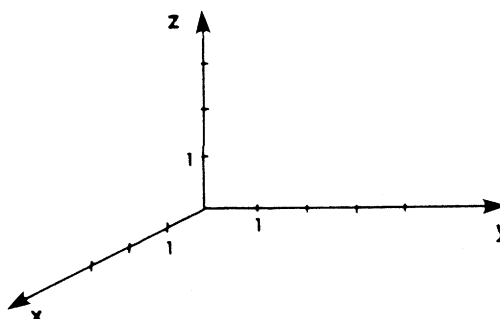
Fertigen Sie eine Skizze an!

----- > 71

23

Ein weiteres Beispiel:
Skizzieren Sie in das nebenstehende
Koordinatensystem die Funktion

$$z = f(x, y) = 3$$



24

47

- | | | |
|------|------|------|
| 1. S | 2. V | 3. S |
| 4. S | 5. 0 | 6. S |

Als nächstes werden wir uns zu gegebenen analytischen Ausdrücken ein qualitatives zeichnerisches Bild von Vektorfeldern schaffen.

Wir setzen die Komponentenschreibweise als bekannt voraus.

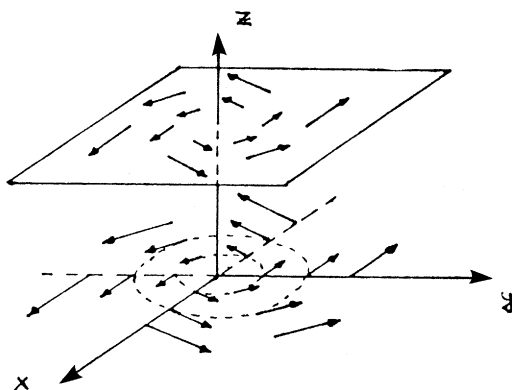
$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

Ebenso wird als bekannt vorausgesetzt, daß ein Vektor bei gegebenen Komponenten in ein räumliches Koordinatensystem eingetragen werden kann.

48

71

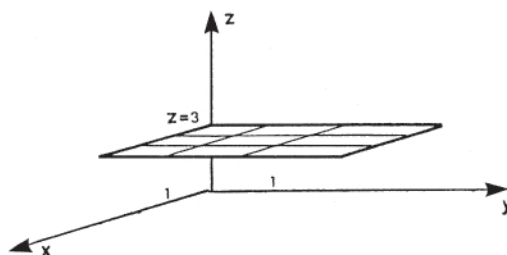
$\vec{A}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ ist ein ringförmiges Vektorfeld.



72

24

Die Fläche $z = 3$ ist eine Ebene,
die mit dem Abstand 3
parallel zur x - y -Ebene liegt.



Stimmt Ihre Skizze mit der obigen in der Sache überein?

Nein

----- > 25

Ja

----- > 27

48

Zu skizzieren sei das Vektorfeld $\vec{A}(x,y,z) = \frac{(y,x,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

1. Schritt: Wir legen in der x - y -Ebene ein Netz von Koordinatenlinien.
2. Schritt: Wir berechnen die Vektoren $\vec{A}(x,y,0)$

für die Punkte $P_1 = (1, 0, 0)$

$P_2 = (1, 1, 0)$

$P_3 = (0, 1, 0)$

Dazu werden die Koordinaten der Punkte in $\vec{A}(x,y,z)$ eingesetzt.

$\vec{A}(1,0,0) = \dots\dots\dots$ $\vec{A}(1,1,0) = \dots\dots\dots$ $\vec{A}(0,1,0) = \dots\dots\dots$

----- > 49

72

Sie haben das



des Kapitels erreicht.