

## **Kapitel 14**

### **Partielle Ableitung, Totales Differential und Gradient**

---

1

Zunächst eine kurze Wiederholung der Funktionen mehrerer Variablen. Diese Kenntnisse brauchen Sie, um das neue Kapitel verstehen zu können.

Berechnen Sie die Funktion

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \text{ an den Punkten}$$

$$P_1 = (1, 2) \text{ und } P_2 = (2, 0).$$

$$f(1, 2) = \dots\dots\dots$$

$$f(2, 0) = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 2

26

Die partielle Ableitung der Funktion  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  ist jetzt schon mehrfach vorgekommen. Sie müßte Ihnen bekannt sein.

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Gesucht ist  $f_x$  im Punkt  $P = (1, 0)$ . Sie müssen nun einsetzen in  $f_x$  die Werte  $x = 1$  und  $y = 0$ .

Hinweis:  $\frac{1}{0} = \infty$ . Im Zweifel Skizze im Lehrschritt 21 einsehen.

$$f_x(1, 0) = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 27

51

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y$$

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ oder } \text{grad } f = (f_x, f_y)$$

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Gesucht ist

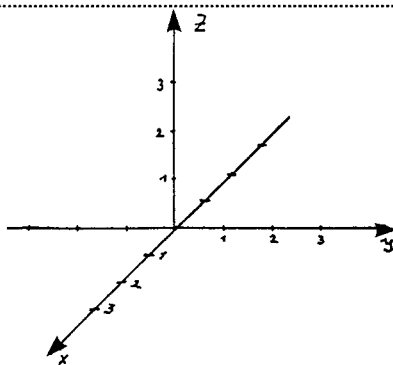
$$\text{grad } f = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 52

2

$$f(1, 2) = \sqrt{9 - 1 - 4} = 2$$

$$f(2, 0) = \sqrt{9 - 4 - 0} = \sqrt{5} \approx 2,236$$


 Skizzieren Sie die Fläche  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .

3

27

$f_x(1, 0) = \infty$  Hinweis: Die Steigung der Tangente in  $y$ -Richtung ist unendlich, die Tangente verläuft parallel zur  $z$ -Achse. Im Zweifel in Skizze im Lehrschrift 21 verifizieren.

Nun berechnen Sie für die gleiche Funktion der Halbkugel die Steigungen in  $x$ -Richtung

und in  $y$ -Richtung für den Punkt  $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ .  $f = z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$f_x = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \dots\dots\dots$$

$$f_y = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \dots\dots\dots$$

28

52

$$\text{grad } f = 2x \vec{e}_x + 2y \vec{e}_y = (2x, 2y)$$

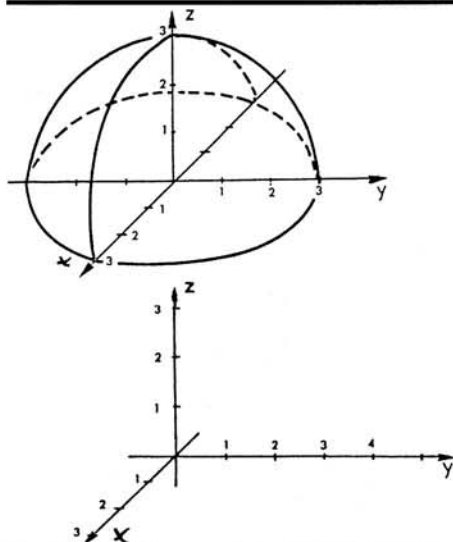
Beschäftigen wir uns jetzt mit dem Gradienten in drei Dimensionen.

Gegeben sei das skalare Feld

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z$$

$$\text{grad } f = \dots\dots\dots$$

53



3

Die Funktion  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$  stellt eine Halbkugelschale über der  $x$ - $y$ -Ebene dar.

.....

Berechnen Sie das Vektorfeld

$$\vec{A}(x, y, z) = 3(x, y, z)$$

für den Punkt  $P = (1, 1, 1)$  und zeichnen Sie den Vektor  $\vec{A}(1, 1, 1)$  ein.

$$\vec{A}(1, 1, 1) = \dots\dots\dots$$

..... ▷ 4

28

$$f_x = \frac{-x}{+\sqrt{1-x^2-y^2}} \text{ also gilt } f_x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} = -1$$

$$f_y = \frac{-y}{+\sqrt{1-x^2-y^2}} \text{ also gilt } f_y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 0$$

Im Lehrbuch wurde die mehrfache partielle Ableitung  $f_{xy}$  gebildet für die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y} + 2z. \text{ Es war } f_{xy} = -\frac{1}{y^2}$$

Berechnen Sie die Ableitung  $f_{yx}$  für die Funktion  $f = \frac{x}{y} + 2z$

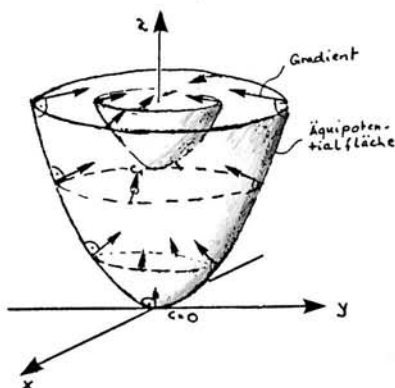
$$f_{yx} = \dots\dots\dots$$

Sind  $f_{xy}$  und  $f_{yx}$  gleich oder ungleich?

..... ▷ 29

53

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (-2x, -2y, 1) \quad \text{oder} \quad \text{grad } f = -2x\vec{e}_x - 2y\vec{e}_y + 1\vec{e}_z$$



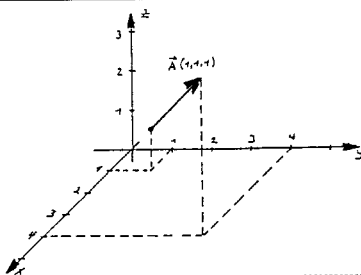
Falls Sie das obige Ergebnis nicht haben, führen Sie selbständig eine Fehleranalyse durch.

Die Skizze veranschaulicht dieses Vektorfeld. Zwei Äquipotentialflächen sind eingezeichnet.

..... ▷ 54

4

$$\vec{A}(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$$



Welches der folgenden Vektorfelder ist homogen und welches ist radial-symmetrisch?

a)  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot (1, 2, 7)$

b)  $(x, y, z) \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

c)  $(1, 7, 23/2)$

d)  $(25, 3, z)$

e)  $(-5, -3, -1)$

f)  $\frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

homogen sind: .....

radialsymmetrisch sind: ..... ▷ 5

29

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{yx} = -\frac{1}{y^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Diese Aussage gilt für die meisten in der Physik vorkommenden Funktionen (Ihre partiellen Ableitungen müssen stetig sein).

Gilt auch  $f_{xz} = f_{zx}$  für die Funktion  $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + 2z^2$ ?

Bilden Sie die Ableitungen

$$f_{xz} = \dots\dots\dots$$

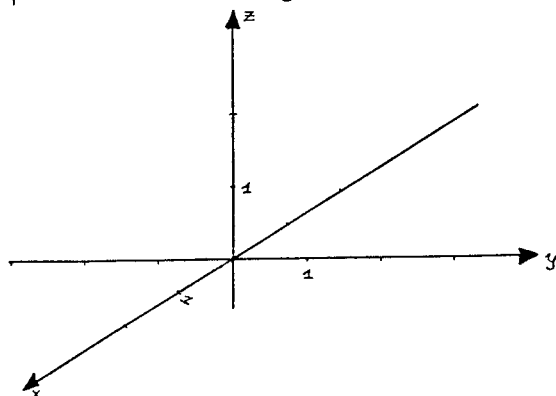
$$f_{zx} = \dots\dots\dots$$

..... ▷ 30

54

Berechnen Sie den Gradienten für das skalare Feld  $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2$ .

grad  $\varphi = \dots\dots\dots$  Fertigen Sie eine Skizze für grad  $\varphi$  an.



..... ▷ 55

5

homogen: c), e)

radialsymmetrisch: b), f)

Hatten Sie Schwierigkeiten grundsätzlicher Art, also keine Flüchtigkeitsfehler, so wäre es angebracht, jetzt noch einmal das Kapitel 13 zu wiederholen. Im folgenden wird nämlich vorausgesetzt, daß Sie das Kapitel kennen. Fehlt Grundlagenwissen, scheint das Neue oft unverhältnismäßig schwierig zu sein.



6

30

$$f_{xz} = 0$$

$$f_{zx} = 0$$

Das Ergebnis einer mehrfachen partiellen Ableitung ist unabhängig von der Reihenfolge der Ableitungen. (Stetigkeit der 1. Ableitung und Existenz der 2. Ableitung vorausgesetzt).

Entscheiden Sie selbst, wie Sie vorgehen:

Weitere Übungsaufgaben

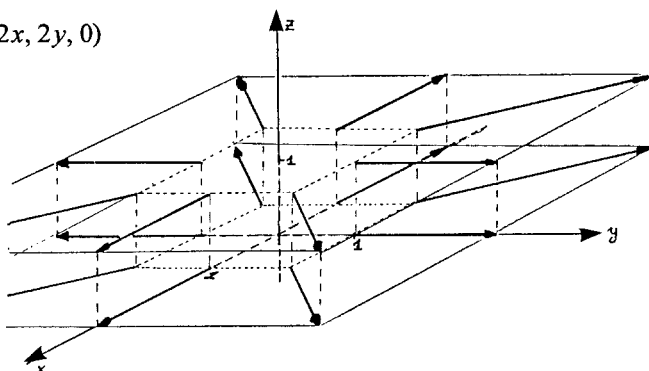
31

Nächster Abschnitt

33

55

$$\text{grad } \varphi = (2x, 2y, 0)$$



56

6

**Partielle Ableitung, totales Differential und Gradient**

Rechnen Sie beim Durcharbeiten des Lehrbuchabschnittes auf einem Zettel die beiden Beispiele nach. Bilden Sie die entsprechenden partiellen Ableitungen der Funktionen:

$$z = \frac{1}{1+x^2+y^2} \quad \text{und} \quad u = \frac{x}{y} + 2z$$

Wir erinnern uns doch: Das Mitrechnen übt Rechentechniken und zeigt Ihnen Ihre Wissenslücken und Schwierigkeiten rechtzeitig.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch      14.1 Partielle Ableitung  
    14.1.1 Mehrfach partielle Ableitung  
    Lehrbuch, Seite 27 - 30

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

-----▷ 7

31

Gegeben sei  $f(x, y) = x^2y + y^2x + z^2x$

$$f_{xz} = \dots\dots\dots$$

$$f_{zx} = \dots\dots\dots$$

$$f_{xy} = \dots\dots\dots$$

$$f_{yx} = \dots\dots\dots$$

Hilfe zur Zwischenkontrolle Ihrer Rechnungen:

$$f_x = 2xy + y^2 + z^2$$

$$f_y = x^2 + 2xy$$

$$f_z = 2zx$$

-----▷ 32

56

Wir wollen uns jetzt weiter mit dem Begriff *Niveaufläche* befassen.

Gegeben sei das skalare Feld  $\varphi(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z$

Berechnen Sie nach folgendem Lösungsschema die Niveaufläche:  $\varphi = c$

1. Schritt:  $\varphi(x, y, z) = c$        $c = \dots\dots\dots$

2. Schritt: Auflösen nach  $z$        $z = \dots\dots\dots$

3. Schritt: Ist die Funktion  $z = f(x, y)$  bekannt?

Welche geometrische Bedeutung hat  $f(x, y)$

-----▷ 57

7

Die Symbole für die partielle Ableitung einer Funktion  $f(x, y)$  nach  $x$  sind

..... und .....

Die Symbole für die partielle Ableitung nach  $y$  sind

..... und .....

8

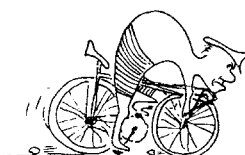
32

$$f_{xz} = 2z$$

$$f_{zx} = 2z$$

$$f_{xy} = 2x + 2y$$

$$f_{yx} = 2x + 2y$$



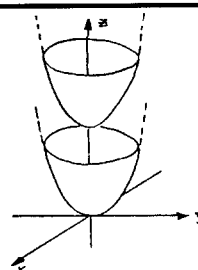
33

57

1. Schritt:  $\varphi = (x, y, z) = c \quad c = -x^2 - y^2 + z$

2. Schritt: Auflösen nach  $z$ :  $z = x^2 + y^2 + c$

3. Schritt: Diese Gleichungen beschreiben Paraboloid mit Scheitelpunkt bei  $z = c$ .



Berechnen Sie jetzt die Niveauläche  $\varphi = 2$  für das Potential

$$\varphi = (x, y, z) = \frac{b}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (b > 0) \quad z = \dots\dots\dots$$

Lösung ..... 60

Erläuterung oder Hilfe ..... 58



8

$$\frac{\partial f}{\partial x}, f_x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}, f_y$$

Bilden Sie die partielle Ableitung nach  $x$  von der Funktion  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden ..... ▷ 10

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ..... ▷ 9

33

### Das totale Differential

Vergessen Sie bitte nicht, die Beispiele im Text sollten auf einem Zettel mitgerechnet werden.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch      14.2 Das totale Differential  
Lehrbuch, Seite 31 - 34

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift ..... ▷ 34

58

Hier zunächst eine andere Aufgabe: Berechnen Sie die Niveaufläche für das Potential  $\varphi = -4$

$$\varphi(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$$

1. Schritt:  $-4 = \dots\dots\dots$

2. Schritt:  $z^2 = \dots\dots\dots$

$z = \dots\dots\dots$

..... ▷ 59

9

Bei der partiellen Ableitung nach  $x$  werden *alle* Variablen *außer*  $x$  als *Konstante* betrachtet.

$y^2$  ist also hier als Konstante zu behandeln. Konstante fallen beim Differenzieren weg.

Beispiel:  $f(x, y) = x + y$ .

Beim Differenzieren nach  $x$  wird  $y$  als Konstante behandelt und fällt weg.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

Berechnen Sie die partielle Ableitung nach  $x$  von  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 10

34

Das totale Differential einer Funktion  $f(x, y, z)$  ist wie folgt definiert:

$$df = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 35

59

1. Schritt:  $-4 = x^2 - y^2 + z^2$

2. Schritt:  $z^2 = -x^2 + y^2 - 4$

$$z = \sqrt{-x^2 + y^2 - 4}$$

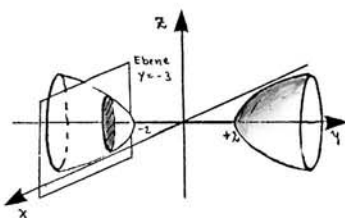
Dies ist die Gleichung eines Rotationshyperboloids:

a) In der  $x$ - $y$ -Ebene ( $z = 0$ ) erhalten wir eine Hyperbel

$$z^2 - y^2 = -4$$

b) Schneiden wir mit einer Ebene parallel zur  $x$ - $z$ -Ebene, im Abstand  $y = 3$ , erhalten wir einen Kreis

$$z^2 = -x^2 + 9 - 4 \quad \text{also} \quad z^2 + x^2 = 5$$



Berechnen Sie die Niveauläche  $\varphi = 2$  für  $\varphi(x, y, z) = \frac{b}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

$$z = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 60

10

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$$

Hinweis:  $y^2$  wurde als Konstante behandelt. Die Ableitung einer Konstanten ist Null.

Berechnen Sie  $\frac{\partial f}{\partial y}$  von  $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 5$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden ----- ▷ 15

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ----- ▷ 11

35

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Berechnen Sie das totale Differential der Funktion:

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y} + z$$

$$df = \dots\dots\dots$$

Lösung ----- ▷ 37

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ----- ▷ 36

60

$$\varphi(x, y, z) = \frac{b}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 2 \quad \text{Auflösung nach } z: z_{1/2} = \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^{2/3} - x^2 - y^2}$$

Die Niveauflächen sind Kugelflächen mit dem Radius  $R = \left(\frac{b}{2}\right)^{1/3}$

Gegeben sei das skalare Feld  $\varphi(x, y, z) = x + y - z$ .

Die Niveauflächen sind Ebenen, die einen Winkel von  $45^\circ$  mit der  $x$ -Achse und mit der  $y$ -Achse einschließen. In der Skizze ist:  $\varphi = 0$

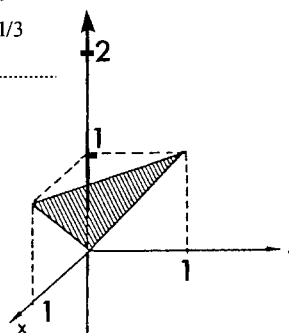
Rechnen und skizzieren Sie:

a) Niveaufläche für  $\varphi = -2$ :  $z = \dots\dots\dots$

b) Gradient:  $\text{grad } \varphi = \dots\dots\dots$

Lösung ----- ▷ 64

Erläuterung oder Hilfe ----- ▷ 61



11

Bei der partiellen Ableitung nach  $y$  werden *alle* Variablen *außer*  $y$  als Konstante betrachtet. Betrachten wir ein Beispiel:

$$f(x, y) = 2x + 5y + 10$$

Wenn wir nach  $y$  differenzieren, müssen wir  $x$  als konstant betrachten.

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 5y + 10) = 5$$

Berechnen Sie nun

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + 5) = \dots\dots\dots$$

Lösung

----- > 15

Weitere Erläuterung oder Hilfe

----- > 12

36

Das totale Differential einer Funktion  $f(x, y, z)$  ist definiert als

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Zuerst müssen alle partiellen Ableitungen berechnet werden.

Beispiel: Es gilt für  $f(x, y, z) = x^2 + y + z$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

Einsetzen in die Definition liefert das Ergebnis:  $df = 2x dx + dy + dz$ .

Berechnen Sie nun das totale Differential für  $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + z$

$$df = \dots\dots\dots$$

----- > 37

61

Gegeben:  $\varphi(x, y, z) = x + y - z$ .

In der Aufgabe war die Niveaufläche für  $\varphi = -2$  zu berechnen.

Wir berechnen hier zunächst die Niveaufläche für  $\varphi = 2$

1. Schritt:  $\varphi = 2$   $2 = \dots\dots\dots$

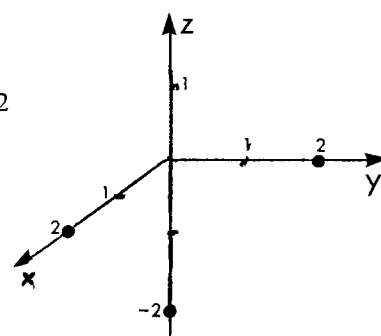
2. Schritt: Nach  $z$  auflösen.  $z = \dots\dots\dots$

3. Schritt: Niveaufläche skizzieren.

Hinweis: Um Punkte der Fläche zu finden, setzen wir einmal  $z = 0$ ,  $x = 0$  das ergibt  $y = 2$

$z = 0$ ,  $y = 0$  das ergibt  $x = 2$

$x = 0$ ,  $y = 0$  das ergibt  $z = 2$



----- > 62

12

Hier finden Sie noch einmal die Rechenregel für die partielle Differentiation. Gegeben seien eine Funktion  $f$  der zwei Variablen  $x, y$ .

a) Zu bilden ist  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . 1. Schritt: Wir betrachten alle  $y$  als Konstante.

2. Schritt: Wir differenzieren nach  $x$ .

Die Regeln sind in Kapitel 5 – Differentialrechnung – behandelt.

b) Zu bilden ist  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . 1. Schritt: Wir betrachten alle  $x$  als Konstante.

2. Schritt: Wir differenzieren nach  $y$ . Hier könnte für Sie eine Schwierigkeit liegen. Um nach  $y$  zu differenzieren, betrachten wir  $y$  als Variable und wenden die Differentiationsregeln, die wir sonst auf  $x$  anwenden, hier auf  $y$  an. Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 + y \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) = 1$$

$$f(x, y) = x + y^2 \quad \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2) = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 13

37

$$df = \frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2} \cdot dy + dz$$

Noch Schwierigkeiten?

Nein ----- ▷ 39

Ja ----- ▷ 38

62

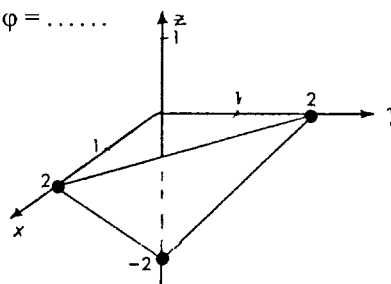
$$2 = x + y - z$$

Auflösen nach  $z$  ergibt die Niveaufläche  $z = x + y - 2$

Jetzt müssen wir noch den Gradienten bilden.  $\text{grad } \varphi = \dots\dots\dots$

Er steht ..... auf der Niveaufläche.

Skizzieren Sie den Gradienten.



----- ▷ 63

13

$$\frac{\partial}{\partial y}(x + y^2) = 2y$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von der Funktion  $f(x, y) = 2x + 4y^3$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

----- &gt; 14

38

Bearbeiten Sie den Abschnitt 14.2 noch einmal im Lehrbuch. Berechnen Sie dabei das totale Differential der folgenden Funktionen und vergleichen Sie Ihre Resultate mit den Lösungen unten.

a)  $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

b)  $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + xy + z$

Lösungen:

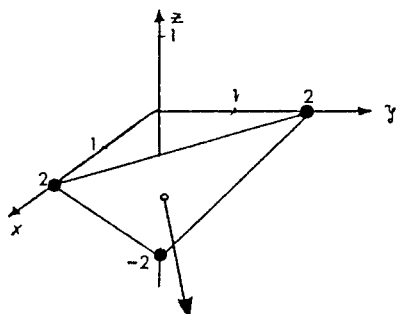
a)  $df = (2x + 2y) \cdot dx + (2x + 2y) dy$

b)  $df = (y - \frac{1}{x^2}) dx + xdy + dz$

----- &gt; 39

63

Hinweis: Der Gradient wird von dem skalaren Feld  $\varphi = x + y - z$  gebildet:



$$\text{grad } \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = (1, 1, -1)$$

In diesem Fall ist der Gradient für alle Raumpunkte konstant. Er ist damit auch unabhängig von der Niveaufläche. Der Vektor  $(1, 1, -1)$  steht senkrecht auf der Ebene  $z = x + y - 2$  und zeigt schräg nach unten.

Lösen Sie jetzt nach dem gleichen Muster die ursprüngliche Aufgabe.

BLÄTTERN SIE ZURÜCK UND BEARBEITEN Sie Lehrschrift ----- > 60

14

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12y^2$$

Berechnen Sie nun

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + 5) = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 15

39

Die Definition der Höhenlinie ist wichtig. Daher die Fragen:

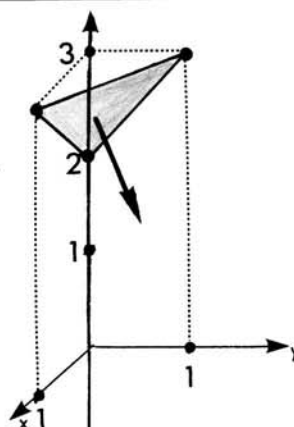
- a) Höhenlinien sind
- ☐ Linien im Raum
  - ☐ Linien in der  $x$ - $y$ -Ebene
- b) *Linien gleicher Höhe* auf einer Fläche und *Höhenlinien* sind
- ☐ identisch
  - ☐ nicht identisch
- c) Die Gleichung der Fläche  $z = f(x, y)$  enthält die Variablen  $x, y, z$ . Die Gleichung der Höhenlinie enthält die Variablen .....

----- ▷ 40

64

Niveaufläche:  $z = x + y + 2$ Gradient  $\text{grad } \varphi = (1, 1, -1)$ Der Gradient steht *senkrecht* auf der Niveaufläche.

Er zeigt hier schräg nach vorn und nach unten.



----- ▷ 65

15

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion  $z = x^3 + 5xy - \frac{1}{2}y^2 + 3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

----- &gt; 16

40

- a) Höhenlinien sind Linien in der  $x$ - $y$ -Ebene.
- b) Linien gleicher Höhe und Höhenlinien sind *nicht* identisch. Vergessen Sie dies nicht. Es verhindert viele Mißverständnisse.  
Aus *Linien gleicher Höhe* gewinnt man die *Höhenlinien* durch Projektion auf die  $x$ - $y$ -Ebene.
- c) Die Gleichung der Höhenlinie enthält nur die Variablen  $x$  und  $y$ .

----- &gt; 41

65

Hinweis: Die Begriffe *skalares Feld* und *Niveaufläche* sind deutlich zu unterscheiden: Gegeben sei ein skalares Feld durch die Gleichung  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ .

Wir haben dann zwei Operationen.

- a) Bildung der Niveauflächen  $\varphi(x, y, z) = c$ . Auflösen nach  $z$  gibt die Niveaufläche.

- b) Bildung des Gradienten:  $\text{grad } \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$

Der Gradient ist ein Vektor, der senkrecht auf den Niveauflächen steht.

----- &gt; 66



16

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 5y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x - y$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen für  $z = 2x^3 \sin 2y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

----- &gt; 17

41

Für eine Funktion  $z = f(x, y)$  werden die *Linien gleicher Höhe* durch folgende Gleichungen beschrieben:  $z = c$  und  $c = f(x, y)$

Die zugehörigen *Höhenlinien* ergeben sich durch Projektion auf die  $x$ - $y$ -Ebene; die Höhenlinien werden also beschrieben durch  $f(x, y) = c$ . Das folgende Schema zeigt noch einmal, wie man bei der Berechnung der Höhenlinien vorgehen kann: Gegeben ist die Funktion:  $z = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ . Berechnet werden soll die Höhenlinie für  $z = 2$ .

1. Schritt: Wir setzen  $z = f(x, y) = 2$ , Wir erhalten  $2 = \frac{1}{1-x^2-y^2}$

2. Schritt: Wir formen um:  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ .

3. Schritt: Wir interpretieren: Die Gleichung  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  beschreibt einen

Kreis mit Radius  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ .

----- &gt; 42

66

Anwendungsbeispiel: In einem elektrischen Feld der Feldstärke  $\vec{E}$  wirkt auf ein Teilchen mit der Ladung  $q$  die Kraft  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Elektrische Felder bestehen zwischen geladenen Metallkörpern. (Platten, Kugeln, Drähte). Für geladene Metallkörper läßt sich das elektrische Potential  $\varphi(x, y, z)$  bestimmen. Daraus läßt sich die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  berechnen gemäß  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi(x, y, z)$ .

Ein Teilchen mit der Masse  $m$  und der Ladung  $q$  fliegt durch ein elektrisches Feld mit dem Potential  $\varphi(x, y, z) = k(x^2 - y^2)$  ( $k = \text{konstant}$ )

Berechnen Sie die Beschleunigung, die das Teilchen an der Stelle  $P_0 = (2, 1, 1)$  erfährt.

$$\vec{a}(2, 1, 1) = \dots\dots\dots$$

Lösung

----- &gt; 68

Erläuterung oder Hilfe

----- &gt; 67

17

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 \sin 2y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3 \cos 2y$$

Bilden Sie noch die partiellen Ableitungen von:  $u = x^2 - \sin y \cdot \cos z$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

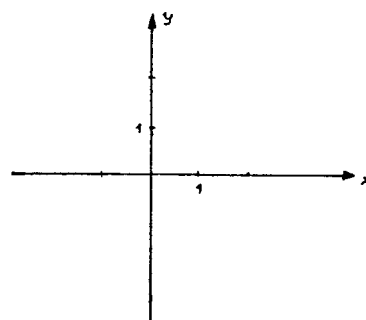
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \dots\dots\dots$$

----- &gt; 18

42

Berechnen Sie die Höhenlinien der Funktion

$$z = x + y \quad \text{für} \quad z = c \quad y = \dots\dots\dots$$



Skizzieren Sie die Höhenlinien für

$$c = -1, \quad c = +1, \quad c = 0$$

Lösung

----- &gt; 44

Erläuterung oder Hilfe

----- &gt; 43

67

Hinweise zur Lösung:

1. Stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen auf.  
Sie lauten allgemein:  $\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$ .
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der gegebenen Information die fehlenden Bestimmungsgrößen.
3. Lesen Sie bei anhaltenden Schwierigkeiten im Lehrbuch den Abschnitt 14.3. Suchen Sie sich die zur Aufgabenlösung wesentliche Information heraus, indem Sie selektiv lesen.

----- &gt; 68

18

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos y \cos z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sin y \sin z$$

Beschreiben Sie in Stichpunkten folgende Begriffe:

1. Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x}$
2. Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial y}$
3. Symbole für die partiellen Ableitungen einer Funktion  $f(x, y)$  nach  $x$  und  $y$ .
4. Rechenregeln für partielles Differenzieren nach  $x$  und  $y$ .

----- > 19

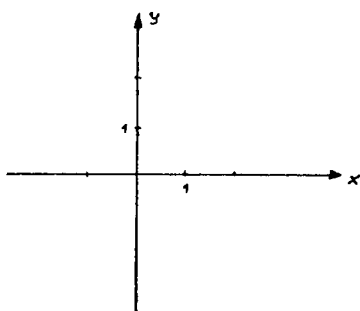
43

Gegeben war:  $z = x + y$

Gesucht: Höhenlinien für  $z = c$

1. Schritt: Wir setzen ein  $z = c$ ; Ergebnis:  $c = x + y$
2. Schritt: Auflösen nach  $y$  ergibt:  $y = c - x$
3. Schritt: Die Höhenlinien sind Geraden. Zeichnen Sie die Geraden ein für:

$$c = -1, c = +1, c = 0$$



----- > 44

68

$$\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = \left(\frac{4qk}{m}, \frac{2qk}{m}, 0\right)$$

Hinweise zum Lösungsweg:

1. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten allgemein:  $\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$ .

$$m\ddot{x} = F_x \quad m\ddot{y} = F_y \quad m\ddot{z} = F_z$$

2. Bestimmung der Komponenten von  $\vec{F}$

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi(x, y, z)$$

$$\text{grad } \varphi = k(2x, -2y, 0) \quad \vec{F} = -qk(2x, -2y, 0)$$

3.  $m\ddot{x} = -qk 2x$ ;  $m\ddot{y} = qk 2y$ ;  $m\ddot{z} = 0$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes  $P_0$  führt zur Lösung.

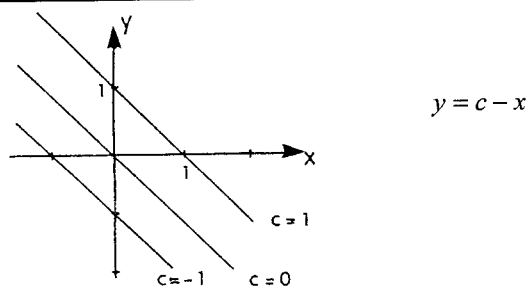
----- > 69

19

1.  $\frac{\partial f}{\partial x}$  gibt den Anstieg der Tangente in  $x$ -Richtung an die Fläche  $z = f(x, y)$ .
2.  $\frac{\partial f}{\partial y}$  gibt den Anstieg der Tangente in  $y$ -Richtung an die Fläche  $z = f(x, y)$ .
3.  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $f_x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $f_y$ .
4.  $z = f(x, y)$  wird *partiell nach  $x$  differenziert*, indem man  $y$  als Konstante auffaßt und die gewöhnliche Differentiation nach  $x$  ausführt. Bei der *partiellen Ableitung nach  $y$*  faßt man  $x$  als Konstante auf und differenziert nach  $y$ .

----- ▷ 20

44



Gegeben ist die Fläche  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

Gesucht ist die Höhenlinie  $z = \frac{1}{2}$ .  $y = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden ----- ▷ 46

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ----- ▷ 45

69

Jetzt folgen Aufgaben zum ganzen Kapitel.

Gegeben sei die Funktion  $f(x, y, z) = 2xy^2z$ .

Geben Sie die partiellen Ableitungen an:

$f_x = \dots\dots\dots$        $f_y = \dots\dots\dots$        $f_z = \dots\dots\dots$

Wie lauten die partiellen Ableitungen im Punkt  $p = (1, -1, -1)$ ?

$f_x(1, -1, -1) = \dots\dots\dots$

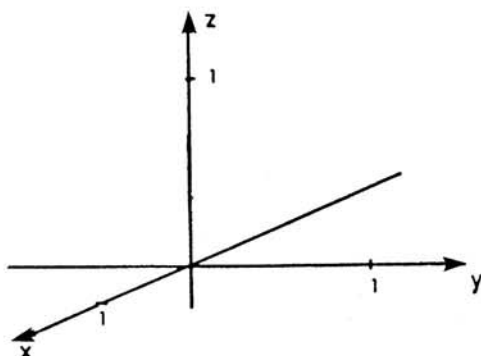
$f_y(1, -1, -1) = \dots\dots\dots$

$f_z(1, -1, -1) = \dots\dots\dots$

----- ▷ 70

20

Im folgenden wollen wir uns am Beispiel der Einheitskugel die geometrische Bedeutung der partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$  nochmals verdeutlichen.



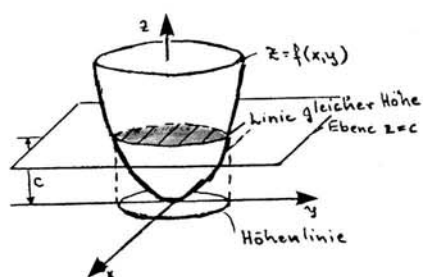
Sie wissen bereits: Sehr vielen Menschen verhilft die geometrische Veranschaulichung eines mathematischen Sachverhalts entscheidend zum Verständnis des Problems.

Skizzieren Sie zunächst die obere Hälfte der Einheitskugel. Zeichnen Sie die Tangenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung am Nordpol ein.

Nordpol:  $P = (0, 0, 1)$ .

&gt; 21

45



Eine Funktion  $z = f(x, y)$  stellt eine Fläche im dreidimensionalen Raum dar. Die Linien gleicher Höhe sind diejenigen Linien auf der Fläche, die von der  $x$ - $y$ -Ebene die konstante Entfernung (Höhe)  $z = c$  haben. Diese Linien können wir uns als die Schnittschnelle der Fläche  $z = f(x, y)$  mit der Ebene  $z = c$  vorstellen. Die Ebene  $z = c$  liegt parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene und hat den Abstand  $c$  von ihr. Die Höhenlinie ist dann die Projektion der Linie gleicher Höhe auf die  $x$ - $y$ -Ebene.

Gegeben:  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Gesucht: Höhenlinie für  $z = \frac{1}{2}$

$y = \dots\dots\dots$

&gt; 46

70

$$f_x = 2y^2z$$

$$f_y = 4xyz$$

$$f_z = 2xy^2$$

$$f_x(1, -1, -1) = -2$$

$$f_y(1, -1, -1) = 4$$

$$f_z(1, -1, -1) = 2$$

Berechnen Sie die zweifachen partiellen Ableitungen für  $f(x, y, z) = 2xy^2z$

$$f_{xx} = \dots\dots\dots$$

$$f_{xy} = \dots\dots\dots$$

$$f_{xz} = \dots\dots\dots$$

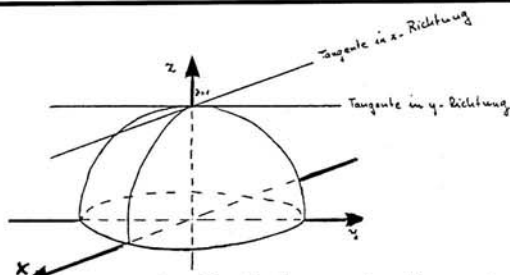
$$f_{yz} = \dots\dots\dots$$

$$f_{yy} = \dots\dots\dots$$

$$f_{zz} = \dots\dots\dots$$

&gt; 71

21



Korrigieren Sie gegebenenfalls Ihre Zeichnung – oder zeichnen Sie diese Figur ab!

Berechnen Sie die Steigung der Tangente in  $x$ -Richtung im Punkt  $P = (0, 0)$ . Dazu berechnet man die partielle Ableitung nach  $x$  und setzt in  $f_x$  den Punkt  $(0, 0)$  ein.

Gleichung der oberen Hälfte der Einheitskugel  $z = +\sqrt{1-x^2-y^2}$ .  $f_x(0, 0) = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden

----- > 23

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

----- > 22

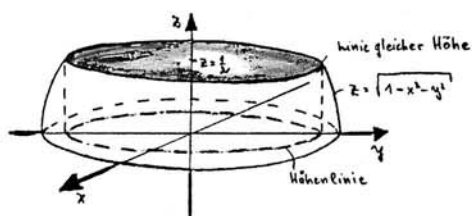
46

$y = \sqrt{\frac{3}{4} - x^2}$  Die Höhenlinie ist ein Kreis mit Radius  $R = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Rechengang: 1. Schritt:  $z = \sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{1}{2}$

2. Schritt: Umformung  $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$

$$y = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Die Skizze zeigt für  $z = \frac{1}{2}$  die Linie gleicher Höhe und die Höhenlinie.

----- > 47

71

$$f_{xx} = 0$$

$$f_{xy} = 4yz$$

$$f_{xz} = 2y^2$$

$$f_{yz} = 4xy$$

$$f_{yy} = 4xz$$

$$f_{zz} = 0$$

Berechnen Sie das totale Differential

$$u = f(x, y, z) = x + 2y + z + 1$$

$$df = \dots\dots\dots$$

----- > 72

22

Gegeben:  $z = f(x, y) = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Gesucht:  $f_x = \frac{\partial z}{\partial x}$  im Punkt  $P = (0, 0)$

Die Steigung der Tangente in  $x$ -Richtung ergibt sich zu

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Um die Steigung der Tangente in  $x$ -Richtung im Punkt  $P = (0, 0)$  zu erhalten, muß eingesetzt werden:  $x = 0$ ,  $y = 0$

$$f_x(0, 0) = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 23

47

### Der Gradient

Der Abschnitt 14.3 ist zu lang, um ihn in einem Zug durchzuarbeiten. In der Regel wird die Einteilung Ihrer Arbeit vom Leitprogramm gesteuert. In Ihrem weiteren Studium werden Sie umfangreiche Lehrbücher studieren. Auch dort muß die Arbeit in optimale Abschnitte eingeteilt werden. Teilen Sie sich die Arbeit jetzt selbst in Abschnitte ein.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch      14.3.1 Gradient bei Funktionen zweier Variablen  
    14.3.2 Gradient zweier Funktionen dreier Variablen  
    Lehrbuch, Seite 34 - 39

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift ----- ▷ 48

72

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = dx + 2dy + dz$$

.....

Gesucht ist die Höhenlinie für die Funktion

$$z = f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 \quad \text{und} \quad z = 16$$

$$y = \dots\dots\dots$$

Die Höhenlinie ist ein .....

----- ▷ 73

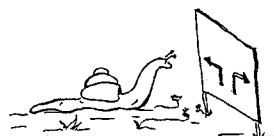
23

$$f_x(0, 0) = 0$$

Die Tangente hat also den Anstieg Null, sie verläuft horizontal. Dieses Resultat liefert uns aber auch die Anschauung, wenn Sie die Zeichnung im Lehrschritt 21 betrachten.

Berechnen Sie die Steigung für die Tangente in  $y$ -Richtung im Punkte  $P = (0, 0)$

$$f_y(0, 0) = \dots\dots\dots$$



Lösung gefunden ..... > 25

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ..... > 24

48

Geben Sie drei Eigenschaften des zweidimensionalen Gradienten an!

Stichworte genügen.

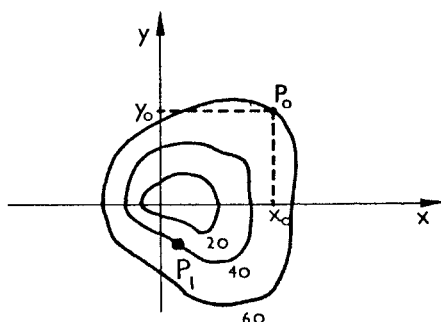
.....  
 .....  
 .....

..... > 49

73

$$y_1 = +\sqrt{4-x^2}, \quad y_2 = -\sqrt{4-x^2}$$

Es handelt sich um einen Kreis mit Radius 2



Das Diagramm zeigt die Höhenlinien einer Funktion  $z = f(x, y)$ .

Zeichnen Sie für die Punkte  $P_0(x_0, y_0)$  und  $P_1(x_1, y_1)$  die Vektoren  $\text{grad } f$  ein.

..... > 74



24

Gegeben:  $z = +\sqrt{1-x^2-y^2}$ Gesucht: Steigung der Tangente in  $y$ -Richtung im Punkt  $(x=0; y=0)$ Hilfe: Steigung der Tangente in  $y$ -Richtung

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Jetzt müssen wir die Koordinaten des Punktes  $x=0, y=0$  einsetzen, denn gesucht ist die Steigung in diesem Punkte.

$$f_y(0,0) = \dots\dots\dots$$

-----▷ 25

49

Eigenschaften des zweidimensionalen Gradienten:

1. Er ist ein Vektor und er steht senkrecht auf den Höhenlinien.
2. Er zeigt in die Richtung der größten Veränderung der Funktionswerte.
3. Sein Betrag ist ein Maß für die Änderung der Funktion.

Gegeben sei  $z = f(x,y)$ . Geben Sie zwei Schreibweisen für den Gradienten an:

$$\text{grad } f = \dots\dots\dots$$

$$\text{grad } f = \dots\dots\dots$$

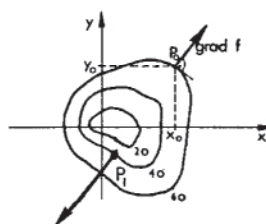
Erläuterung oder Hilfe

-----▷ 50

Lösung

-----▷ 51

74

a) Welche Niveaulinien hat das skalare Feld  $\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4}$ .b) Geben Sie den Gradienten der folgenden Funktion im Punkte  $P = (1,2)$  an.

$$f(x,y) = \frac{2}{1+2x^2+y^2}$$

$$\text{grad } f = \dots\dots\dots$$

-----▷ 75

25

$$f_y = (0, 0) = 0$$

Berechnen Sie nun für dieselbe Funktion  $f(x, y) = z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$  die Steigung der Tangente in  $x$ -Richtung für den Punkt  $P = (1, 0)$ .

Hinweis: Es ist die Tangente an die Halbkugel in der  $x$ - $y$ -Ebene im Punkt  $x = 1, y = 0$ .

$$f_x(1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden ..... > 27

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ..... > 26

50

Die Definition des Gradienten müssen Sie auswendig lernen.

Für  $z = f(x, y)$  ist  $\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \dots\dots$

Der Gradient ist ein Vektor, daher die Einheitsvektoren nicht vergessen.

Andere Schreibweise:

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \dots\dots \right)$$

..... &gt; 51

75

a) Die Niveaulächen sind Kugelschalen mit dem Radius  $2 \cdot \sqrt{\varphi}$  und dem Mittelpunkt  $x = y = z = 0$

b)  $\text{grad } f(1, 2) = \frac{8}{49}(-1, -1)$

Rechengang:  $\text{grad } f(x, y) = \left( \frac{-8x}{(1+2x^2+y^2)^2}, \frac{-4y}{(1+2x^2+y^2)^2} \right)$

Setzt man ein:  $x = 1$  und  $y = 2$  ergibt sich das Resultat.

Das Wochenpensum ist geschafft.



Sie haben das

dieses Kapitels erreicht.