

Kapitel 15

Mehrfachintegrale, Koordinatensysteme

1

Zunächst überprüfen wir, wie man es immer tun sollte, zu Beginn eines neuen Kapitels, was wir vom vorhergehenden Kapitel 14 noch wissen.

Dann erst beginnt mit Lehrschrift 7 das Neue.

Nennen Sie mindestens 4 der wichtigsten Begriffe aus dem Kapitel 14:

.....

.....

.....

BEARBEITEN SIE jetzt Lehrschrift 2

2

36

$$\int_{x=0}^2 \int_{y=1}^2 \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_{x=0}^2 x^2 dx \int_{y=1}^2 \frac{1}{y^2} dy$$

Berechnen Sie nun das Integral!

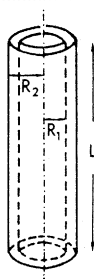
$$\int_{x=0}^2 x^2 dx \cdot \int_{y=1}^2 \frac{dy}{y^2} = \dots\dots\dots$$

37

71

Zylinderkoordinaten $dV = r d\varphi dr dz$

$$dm = dV \cdot \rho = \rho \cdot r d\varphi dr dz$$



Stellen Sie das Dreifachintegral zur Bestimmung des Trägheitsmoments auf. Achten Sie dabei auf die Integrationsgrenzen.

Berechnen Sie das Integral

$$\theta = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden

73

Weitere Erläuterung oder Hilfe erwünscht

72

2

Die wichtigsten Begriffe waren:

1. Partielle Ableitung
2. Totales Differential
3. Höhenlinie
4. Gradient
5. Niveaufläche

1. Gegeben sei die Funktion $f(x, y, z)$. Geben Sie zwei verschiedene Schreibweisen für die partielle Ableitung nach y : und

2. Gegeben sei die Funktion $z = x^2 + y^2$

Das totale Differential ist:

3

37

$$\int_{x=0}^2 x^2 dx \cdot \int_{y=1}^2 \frac{1}{y^2} dy = \frac{4}{3}$$

Aufgabe richtig

39

Fehler gemacht oder Erläuterung gewünscht

38

72

Das Trägheitsmoment ist: $\theta = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr dz d\varphi$

Die Dichte ρ ist konstant, läßt sich daher vor die Integralzeichen schreiben. Berechnung:

Integration über φ ergibt: $= [2\pi] \rho \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr dz$

Integration über z ergibt: $= 2\pi\rho[L] \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$

Integration über r ergibt: $= \frac{\pi}{2} \rho L (R_2^4 - R_1^4)$

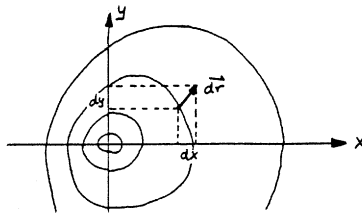
$\theta = \dots\dots\dots$

73

1. $\frac{\partial f}{\partial y}$ und f_y
2. $dz = 2x dx + 2y dy$

Wichtiger noch als die formale Regel zur Bildung des totalen Differentials ist, daß die Bedeutung bekannt ist. Ergänzen Sie den Satz sinngemäß:

Das totale Differential ist ein Maß für die Änderung der Funktion $z = f(x, y)$, wenn



.....

----- > 4

Das Doppelintegral war das Produkt zweier Einfachintegrale

$$\int_{x=0}^2 x^2 dx \cdot \int_{y=1}^2 \frac{dy}{y^2}$$

Lösen wir die beiden Integrale getrennt:

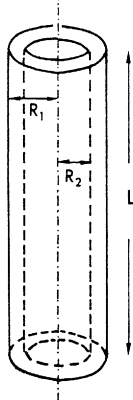
$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\int_1^2 \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y} \right]_1^2 = \left[-\frac{1}{2} - (-1) \right] = \frac{1}{2}$$

Gesucht ist das Produkt der beiden Einfachintegrale. Das ist $\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

----- > 39

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rho L (R_2^4 - R_1^4)$$



Lösung von Typ b), Rückführung auf bereits gelöstes Problem.

Wir betrachten das Rohr als hohlen Zylinder. Für einen vollen Zylinder ist das Trägheitsmoment im Lehrbuch, auf Seite 54, angegeben:

$$\theta = \frac{1}{2} \pi \rho L R^4$$

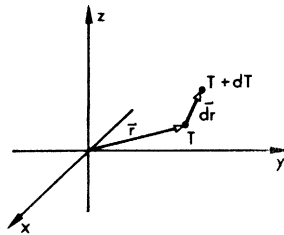
Ein Zylinder mit Radius R_2 und Höhe L läßt sich in einen inneren Zylinder mit Radius R_1 und ein ihn umgebendes Rohr zerlegen. Das Trägheitsmoment θ_{voll} des vollen Zylinders ist dann die Summe der Trägheitsmomente des inneren Zylinders und des Rohrs:

$$\theta_{\text{voll}} = \theta_{\text{innen}} + \theta_{\text{Rohr}}$$

----- > 74

4

Das totale Differential ist ein Maß für die Änderung der Funktion $z = f(x, y)$, wenn x um dx und y um dy vergrößert werden.



Das totale Differential kann sinngemäß auch auf eine Funktion von drei Veränderlichen übertragen werden. So kann die Temperatur T eine Funktion der Raumkoordinaten sein. $T = T(x, y, z)$

Dann ist das totale Differential der Funktion T ein Maß für die Änderung der Temperatur, wenn x, y, z um dx, dy, dz vergrößert werden, oder wenn wir vom

Punkt mit Ortsvektor \vec{r} zum Punkt $\vec{r} + \vec{dr}$ übergehen. Dabei ist $\vec{dr} = (dx, dy, dz)$

$dT = \dots\dots\dots$ ----- > 5

39

Hier sind zwei Übungsaufgaben. Die Bezeichnungsweise ist verändert. Die Berechnung der beiden Doppelintegrale ist jeweils auf zwei Wegen möglich:

Integration nacheinander durchführen oder das Doppelintegral in ein Produkt aus zwei Integralen zerlegen.

$$\int_{\xi=-1}^0 \int_{\eta=1}^2 2\xi^2\eta \, d\xi \, d\eta = \dots\dots\dots$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\psi \, d\varphi \, d\psi = \dots\dots\dots$$

----- > 40

74

Das gesuchte Trägheitsmoment des Rohrs läßt sich damit als Differenz der beiden bereits bekannten Zylinderträgheitsmomente berechnen:

$$\theta_{\text{Rohr}} = \theta_{\text{voll}} - \theta_{\text{innen}} = \frac{1}{2} \pi \rho L (R_2^4 - R_1^4)$$

Vergleich der Lösungsverfahren:

Beide Verfahren führen zum gleichen Ergebnis.

Die Zurückführung auf bereits gelöste oder ähnliche Probleme führt oft rascher zur Lösung, setzt aber Übersicht über die Struktur des Problemfeldes voraus. Nicht jedes Problem ist auf diese Weise lösbar.

Das systematische Lösungsverfahren führt – sofern jeder Schritt nur richtig ausgeführt wird – sicher zum Ergebnis, dauert manchmal aber länger.

----- > 75

5

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

Bilden Sie den Gradienten der Funktion

$$z = x^2 + y^2$$

grad $z = \dots\dots\dots$

Der Gradient ist ein Vektor. Er steht senkrecht auf $\dots\dots\dots$

Der Betrag des Gradienten ist ein Maß für $\dots\dots\dots$

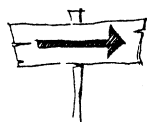
----- ▷ 6

40

1

2

Weitere Übungsaufgaben finden Sie im Lehrbuch auf Seite 60. Sie wissen ja, Übungsaufgaben sollte man vorwiegend dann rechnen, wenn man sich noch nicht sicher fühlt.



----- ▷ 41

75

Mehrfachintegrale mit nicht konstanten Integrationsgrenzen

Im allgemeinen Fall des Mehrfachintegrals sind die Integrationsgrenzen nicht konstant. Dann ist die Reihenfolge, in denen die Integrationen durchgeführt werden, nicht mehr beliebig.

Im Lehrbuch beginnt der Gedankengang bei der Analyse der – im Prinzip bereits bekannten – Flächenberechnung.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

15.2 Mehrfachintegrale mit nicht konstanten Integrationsgrenzen
Lehrbuch, Seite 55 - 57

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

----- ▷ 76

$$\text{grad } z = (2x, 2y)$$

Der Gradient steht senkrecht auf den Höhenlinien oder den Niveaulächen.

Der Betrag des Gradienten ist ein Maß für die Änderung des Funktionswertes, wenn man sich um eine Längseinheit senkrecht zu den Niveaulächen bewegt.

Totales Differential und *Gradient* hängen eng zusammen. Das totale Differential gibt die Änderung des Funktionswertes bei Änderung der unabhängigen Variablen an. Diese Änderung ergibt sich als inneres Produkt aus

$$\text{Ortsänderung } \vec{dr} \text{ und Gradient: } df = \vec{dr} \cdot \vec{\text{grad}} f$$

Diesen Zusammenhang sollte man behalten.

Koordinaten, Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten

Polarkoordinaten sind inhaltlich bereits bekannt. Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten sind neu. Sind bei bestimmten Problemstellungen Radial-, Zylinder- oder Kugelsymmetrien vorhanden, kann man sich oft schwierige Rechnungen erleichtern, wenn man ein geeignetes Koordinatensystem benutzt.

STUDIERN SIE im Lehrbuch

15.4 Koordinaten

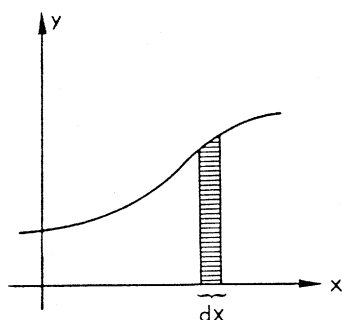
15.4.1 Polarkoordinaten

15.4.2 Zylinderkoordinaten

15.4.3 Kugelkoordinaten

Lehrbuch, Seite 47 - 52

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift



Der theoretisch interessante Aspekt dieses Abschnitts ist der Nachweis, daß bereits die Flächenberechnung systematisch auf ein Doppelintegral führt.

Die Flächenberechnung bei der Einführung der Integralrechnung stellt den Sonderfall dar, daß eine Integration bereits ausgeführt ist.

Der Flächeninhalt der Streifen in y -Richtung mit der Grundfläche dx und der Höhe y ist bereits das Ergebnis der ersten Integration über y .

Mehrfachintegrale als allgemeine Lösung von Summierungsaufgaben

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 15.1 Mehrfachintegrale als Lösung von
Summierungsaufgaben
Lehrbuch, Seite 43 - 44

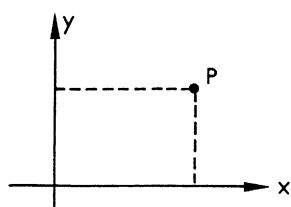
BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift ▷ 8

42

Ein Punkt P ist in Polarkoordinaten gegeben. Es wird durch zwei Größen definiert:

.....

.....



Zeichnen Sie die beiden Polarkoordinaten von P ein.

..... ▷ 43

77

Die Betrachtung der Flächenberechnung zeigt uns, daß Mehrfachintegrale und die aus Kapitel 6 bekannten bestimmten Integrale miteinander zusammenhängen. Die dort eingeführten bestimmten Integrale bei der Flächenberechnung erkennen wir hier als Doppelintegrale, bei denen eine Integration bereits ausgeführt ist.

Damit können wir die Mehrfachintegrale in bekannte Strukturen einordnen.

..... ▷ 78

8

Der Begriff des Mehrfachintegrals ist im Lehrbuch anhand eines konkreten Beispiels entwickelt. Der Gedankengang ist genauso aufgebaut wie die Lösung des Flächenproblems in Kapitel 6. Dort erhielten wir das Integral als Grenzwert einer Summe von Flächenstreifen.

Neu ist hier, daß wir nicht Flächenstreifen, sondern Volumenelemente aufsummieren. So ist das Volumen eines Quaders die Summe aller Teilvolumina.

$$V = \sum_i \Delta V_i$$

Jedes Teilvolumen ist das Produkt der Kanten $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$. Im Lehrbuch ist nicht erklärt, wie eine Aufsummierung der Teilvolumina systematisch durchgeführt wird. Dies ist grundsätzlich nicht schwer, würde die Überlegung hier jedoch nur belasten. Der Grenzübergang führt auf ein Integral.

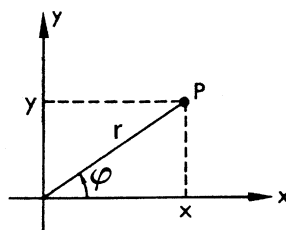
$$V = \lim \sum_i \Delta V_i = \lim \sum_i \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i = \int dV = \int \dots\dots\dots$$

9

43

Länge r des Ortsvektors \vec{r}

Winkel φ mit der x -Achse



Leiten Sie aus der Zeichnung oben selbst die Transformationsformeln ab:

$x = \dots\dots\dots$

$r = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$

$\tan \varphi = \dots\dots\dots$

Können Sie auch dies noch?

$\varphi = \dots\dots\dots$

44

78

Wer neue Einzelheiten in bekannte Zusammenhänge einzuordnen vermag, lernt schneller, besser und sicherer. In der gleichen Zeit kann mehr Information verarbeitet werden, weil man sich weniger zu merken braucht.

Aus diesem Grunde sollte man bei der Bearbeitung eines neuen Stoffgebietes immer versuchen, neue Sachverhalte zu bereits bekannten in Beziehung zu setzen. Eine bewährte Regel dafür ist: Man suche Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

Wer logische Beziehungen kennt, braucht sich weniger zu merken. Gedächtnislücken können dann oft selbständig durch schlußfolgerndes Denken geschlossen werden.

79

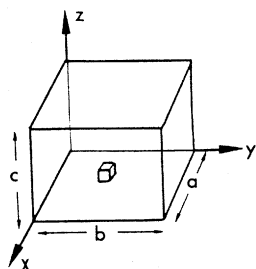
9

$$V = \iiint dx \, dy \, dz$$

Wenn es sich um die Berechnung des Volumens eines Quaders handelt, können wir die Integrationsgrenzen angeben.

Tragen Sie die Integrationsgrenzen ein:

$$V = \int_{x=\dots}^{\dots} \int_{y=\dots}^{\dots} \int_{z=\dots}^{\dots} dx \, dy \, dz$$



----- > 10

44

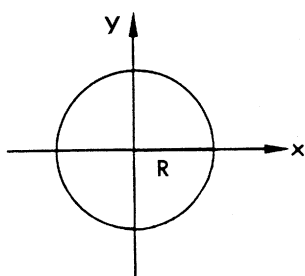
$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$



Geben Sie die Gleichung des Kreises mit Radius R in Polarkoordinaten an.

.....

----- > 45

79

Kehren wir zur praktischen Berechnung von Mehrfachintegralen zurück.

Beispiel: Flächeninhalt unter der Kurve $y = x$ im Bereich

$$x_0 \leq x \leq x_1.$$

Das Flächenintegral

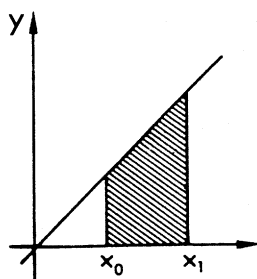
$$A = \iint dA$$

führt in kartesischen Koordinaten zu dem Doppelintegral

$$A = \iint dx \, dy$$

Setzen Sie die Grenzen für beide Variablen ein!

$$A = \int_{x=\dots}^{\dots} \int_{y=\dots}^{\dots} dx \, dy$$



----- > 80

10

$$V = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dx dy dz$$

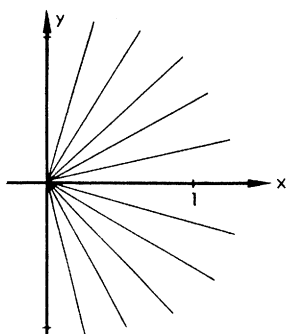
Die praktische Berechnung von Mehrfachintegralen mit konstanten Integrationsgrenzen wird im nächsten Abschnitt gezeigt werden. Es ist die sinngemäße Übertragung der Regel für die Berechnung des bestimmten Integrals auf mehrfach hintereinander durchzuführende Integrationen. Es sind keine grundsätzlich neuen Operationen.

----- > 11

45

$$r = R$$

Hinweis: In Polarkoordinaten hat die Gleichung des Kreises eine genauso einfache Form wie in kartesischen Koordinaten die Gleichung einer Geraden parallel zur x-Achse: $y = a$



Skizzieren Sie die Funktion $r = \cos \varphi$

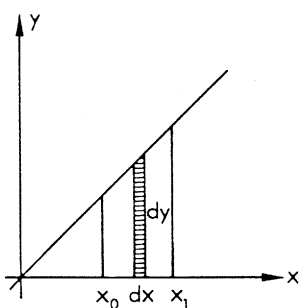
Für jede durch φ gegebene Richtung ist r durch $r = \cos \varphi$ gegeben.

Nun können Sie für jeden Strahl den Wert für r ausrechnen und abtragen.

----- > 46

80

$$A = \int_{x=x_0}^{x_1} \int_{y=0}^x dx dy$$



Die Integrationsgrenzen für x sind unmittelbar klar. Die Integrationsgrenzen für y nicht. y läuft bei konstantem x von 0 zum Funktionswert y . Der Funktionswert ist in diesem Fall $y = x$. Die obere Integrationsgrenze für y ist also x . Hier ist die Reihenfolge der Integrationen nicht mehr beliebig. Regel: Als inneres Integral wird dasjenige genommen, in dessen Integrationsgrenzen Variable stehen, über die später integriert wird. Als letztes Integral bleibt dann konsequenterweise eines mit festen Integrationsgrenzen übrig. Formen Sie das Integral oben so um, daß durch eine

Klammer das innere Integral gekennzeichnet ist! $A = \int [\int \dots] \dots$ ----- > 81

Mehrfachintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

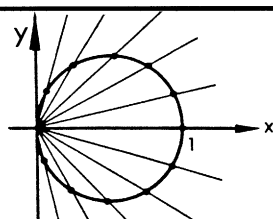
15.2 Mehrfachintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen

15.2.1 Zerlegung eines Mehrfachintegrals in ein Produkt von Integralen

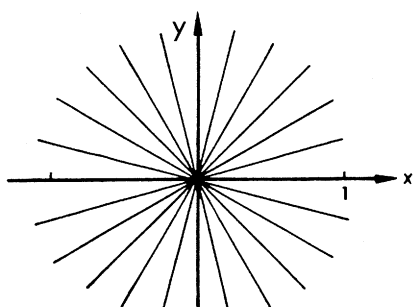
Lehrbuch, Seite 44 - 47

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

-----▷ 12



46

Hinweis: Die Funktion ist sowohl für positive wie negative Werte von φ definiert.Skizzieren Sie die Funktion $r = \cos^2 \varphi$!

-----▷ 47

81

$$A = \int_{x=x_0}^{x_1} \left[\int_{y=0}^x dy \right] dx$$

Die obige Lösung ergibt sich aus der Regel:

Das innere Integral ist immer dasjenige, in dessen Integrationsgrenzen Variable stehen, über die erst später integriert wird.

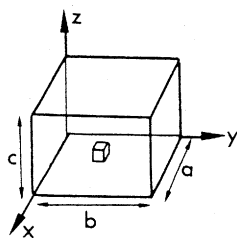
In diesem Fall ist es die Variable x , über die später integriert wird.

Berechnen Sie jetzt das innere Integral oben und setzen Sie es ein

$$A = \int_{x=x_0}^{x_1} \left[\dots \right] dx$$

-----▷ 82

12



Das Volumen des Quaders ist ein Dreifachintegral mit konstanten Integrationsgrenzen

$$V = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dx \, dy \, dz$$

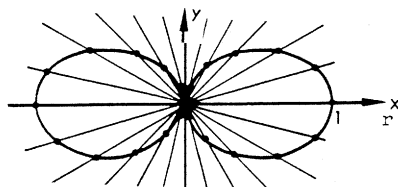
Sicherheitshalber wird bei der unteren Integrationsgrenze angegeben, welche Variable gemeint ist.

Das Integral können Sie lösen, indem Sie nacheinander über jede Variable integrieren. Die jeweils anderen Variablen werden dabei als Konstante betrachtet. Die Reihenfolge ist beliebig. Führen Sie zunächst nur die Integration über x aus.

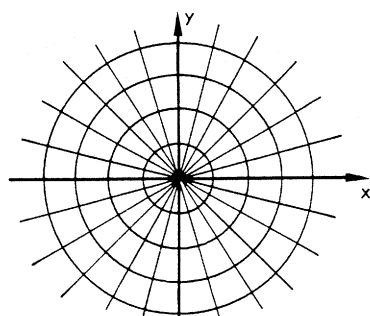
$$V = \dots\dots\dots$$

Hinweis zum Sprachgebrauch: „Integriere über x “ bedeutet: Führe die Integration für die Variable x aus. ----- ▷ 13

47



$$r = \cos^2 \varphi$$



Im kartesischen Koordinatensystem stehen folgende Linien aufeinander senkrecht:

$$x = \text{const} \quad \text{und} \quad y = \text{const}$$

In Polarkoordinaten stehen folgende Linien aufeinander senkrecht:

$$r = \text{const} \quad \text{und} \quad \varphi = \text{const}$$

Leiten Sie den Ausdruck ab für das Flächenelement dA .

$$dA = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 48

82

$$A = \int_{x=x_0}^{x_1} [x] dx$$

Dieses Integral bietet als bestimmtes Integral keine Schwierigkeiten mehr und ergibt:

$$A = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 83

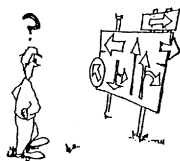
13

$$V = a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dy dz$$

Alles richtig, keine Schwierigkeiten

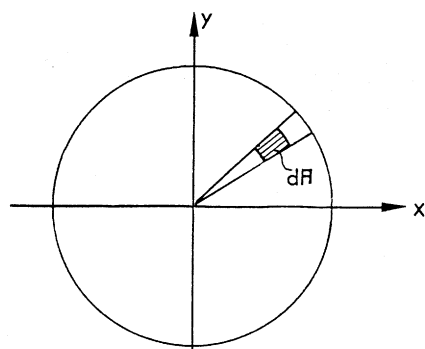
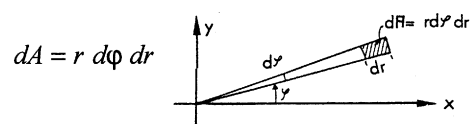
----- > 16

Erläuterung gewünscht



----- > 14

48



Wenn dA bekannt ist, können wir die Fläche eines Kreises unmittelbar berechnen:

$$A = \int dA$$

Das Integral läßt sich in Polarkoordinaten als Doppelintegral hinschreiben. Bei den Grenzen muß beachtet werden, daß der gesamte Kreis bedeckt wird. Das bedeutet: r läuft von 0 bis R und ϕ läuft von 0 bis 2π .

 $A = \dots\dots\dots$ ----- > 49

83

$$A = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2}$$

Gegeben sei folgendes Integral

$$I = \int_{u=a}^v \int_{v=1}^2 u \cdot v \, du \, dv$$

Formen Sie das Integral so um, daß das zunächst zu lösende innere Integral in der Klammer steht:

$$I = \int \left[\int \dots\dots\dots \right]$$

----- > 84

14

Gegeben war: $\int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dx \, dy \, dz$

Die Aufgabe war, das Dreifachintegral über x zu integrieren. Die Regel hieß:

Bis auf x werden alle übrigen Variablen als Konstante behandelt.

Wir klammern jetzt alles ein, was als Konstante betrachtet werden kann. Dann erhalten wir:

$$V = \int_{x=0}^a \left[\int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dx \, dy \, dz \right]$$

Nun stellen wir um und fassen alle in Klammern stehenden Größen und Symbole in einer Klammer zusammen.

$$V = \int_{x=0}^a \left[\dots \right] \quad \text{-----} \triangleright 15$$

49

$$A = \int_0^R \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr$$

Dieses Integral ist leicht zu berechnen.

Die Fläche des Kreises ist

$$A = \int_0^R \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr = \dots$$

----- \triangleright 50

84

$$I = \int_{v=1}^2 \left[\int_{u=a}^v u \cdot v \, du \right] dv$$

Zunächst muß über u integriert werden, denn in der Integrationsgrenze steht die Variable v . Damit tritt v im Integranden auf. Über v muß also später integriert werden.

Ordnen Sie das Dreifachintegral

$$Q = \int_{x=0}^{y^2} \int_{y=0}^z \int_{z=0}^1 xyz \, dx \, dy \, dz$$

$$Q = \int \left\{ \int \left[\dots \right] \right\}$$

----- \triangleright 85

15

$$V = \int_{x=0}^a dx \left[\int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dy dz \right]$$

Jetzt sieht alles einfacher aus.

Das Integral $\int_{x=0}^a dx$ können wir ausrechnen, die Klammer bleibt stehen.

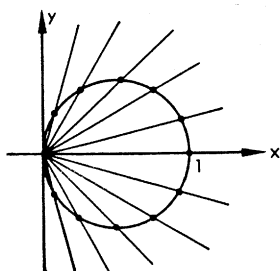
$$V = \int_{x=0}^a dx \left[\int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dx dz \right] = (a-0) \left[\int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dy dz \right]$$

Die Klammern haben geholfen, die Übersicht zu verbessern. Jetzt können wir sie wieder weglassen und erhalten:

$$V = \dots\dots\dots \triangleright 16$$

50

$$A = \pi R^2$$



Wir hatten die Funktion $r = \cos \varphi$ skizziert.

Wie heißt die Funktion in kartesischen Koordinaten?

Lösungshinweis:

Drücken Sie zunächst x und y durch φ aus.

Drücken Sie dann y durch x aus.

$$y = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \triangleright 51$$

85

$$Q = \int_{z=0}^1 \left\{ \int_{y=0}^z \left[\int_{x=0}^{y^2} xyz dx \right] dy \right\} dz$$

Bei dieser Umformung mußte man schon etwas nachdenken. Lösen Sie das Integral nun!

$$Q = \dots\dots\dots$$



Lösung gefunden

$$\dots\dots\dots \triangleright 89$$

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

$$\dots\dots\dots \triangleright 86$$

16

$$V = a \cdot \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dy dz$$

Integrieren Sie das Doppelintegral nun über y :

$$V = \dots\dots\dots$$



----- ▷ 17

51

$$y^2 = x(1-x) = x - x^2 \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{x(1-x)}$$

Hinweis: Es ist die Gleichung eines Kreises.

Zentrum $x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = 0$

Radius $R = \frac{1}{2}$

Alles richtig ----- ▷ 53

Fehler gemacht oder Erläuterung erwünscht ----- ▷ 52

86

Bei der Umordnung muß folgende Maxime beachtet werden:

Als inneres Integral muß immer dasjenige gewählt werden, in dessen Grenzen Variable stehen, über die später integriert werden kann!

Es ist verboten, über eine Variable zu integrieren, die in den Grenzen von Integralen steht, die erst später ausgeführt werden.



Gegeben war: $Q = \int_{z=0}^1 \int_{y=0}^z \int_{x=0}^{y^2} xyz \, dx \, dy \, dz$

Lösen Sie jetzt zunächst das innere Integral und setzen Sie das Ergebnis ein:

$$Q = \int_{z=0}^1 \int_{y=0}^z \left[\dots\dots\dots \right] dy \, dz$$

----- ▷ 87

17

$$V = a \cdot b \cdot \int_{z=0}^c dz$$

.....

Fehler oder Schwierigkeiten ----- ▷ 18

Alles klar ----- ▷ 19

52

Es war $r = \cos \varphi$. Gesucht: Gleichung in kartesischen Koordinaten.

Bekannt sind uns die Transformationsgleichungen $x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$

Wir setzen ein $r = \cos \varphi$ und erhalten: $x = \cos \varphi \cdot \cos \varphi$ $y = \cos \varphi \cdot \sin \varphi$

Wir formen um: $x = \cos^2 \varphi$ $y = \cos \varphi \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$

Wir setzen $\sqrt{x} = \cos \varphi$ in die Gleichung für y ein. Jetzt erhalten wir

$$y = \sqrt{x} \sqrt{1-x}$$

$$y = \sqrt{x(1-x)}$$

Die Gleichung eines Kreises mit $R = \frac{1}{2}$ und Zentrum $x_0 = \frac{1}{2}$; $y_0 = 0$ ist:

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2 \quad \text{-----} \triangleright 53$$

87

$$Q = \int_{z=0}^1 \int_{y=0}^z yz \frac{y^4}{2} dy dz$$

Erläuterung:

Die Integration über x ergibt $\frac{x^2}{2}$; wenn dann die Grenzen – nämlich 0 und y^2 – eingesetzt werden, ergibt sich das obige Resultat. Führen wir jetzt den zweiten Schritt durch und integrieren wir über y .

Wir erhalten dann:

$$Q = \int_{z=0}^1 \left[\dots \right] dz$$

----- ▷ 88

18

Wo sind die Schwierigkeiten? Das bestimmte Integral ist es doch nicht:

$$\int_{y=0}^b dy = b$$

Vielleicht ist es dies: Scheinbar willkürlich wird eine Variable herausgegriffen und über diese Variable integriert, während die übrigen Variablen als Konstante behandelt werden. So etwas ähnliches kennen Sie bereits von der partiellen Integration her. Wenn nach einer Variablen differenziert wird, werden die übrigen Variablen als Konstante behandelt.

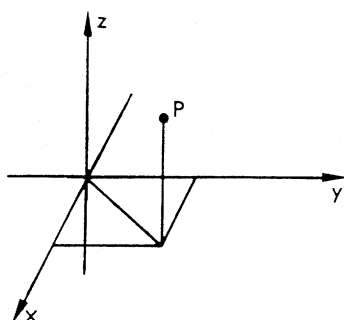
Im Zweifel noch einmal mit Lehrschrift 12 neu beginnen.

----- > 19

53

Zylinderkoordinaten:

Zeichnen Sie die Zylinderkoordinaten des Punktes P . Die Zylinderkoordinaten sind:



1.

2.

3.

----- > 54

88

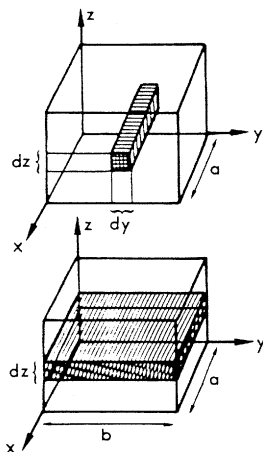
$$Q = \int_{z=0}^1 \frac{z^6}{2 \cdot 6} z dz$$

Das letzte Integral gibt dann:

$$Q = \dots\dots\dots$$

----- > 89

19



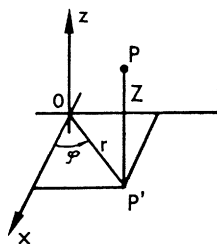
Zu lösen sei das Volumenintegral $\int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dx \cdot dy \cdot dz$

Die geometrische Bedeutung der Integration über x : Volumenelemente werden in x -Richtung aneinander gelegt. Wir erhalten eine Säule mit der Grundfläche $dy \cdot dz$ und der Länge a .

$$V = \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c a \cdot dy \cdot dz$$

Geometrische Bedeutung der Integration über y : Die Säulen werden in y -Richtung aneinander gelegt. Es entsteht eine Scheibe mit der Grundfläche $a \cdot b$ und der Dicke dz .

$$V = \int_{z=0}^c a \cdot b \cdot dz \quad \text{-----} \triangleright 20$$



54

r = Abstand des Punktes P' vom Nullpunkt

P' ist die Projektion von P auf die x - y -Ebene)

φ = Winkel der Strecke OP' mit der positiven x -Achse

z = Höhe

Geben Sie die Transformationsformeln an:

$$x = \dots\dots\dots y = \dots\dots\dots z = \dots\dots\dots$$

55

89

$$Q = \frac{1}{2 \cdot 68} = \frac{1}{96}$$

Die Reihenfolge, in der die Integrationen bei Mehrfachintegralen ausgeführt werden können, läßt sich sehr einfach merken, wenn man die Regel in die Form eines Verbotes kleidet:

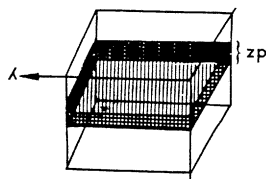
Es ist verboten, über eine Variable zu integrieren, die in den Grenzen von Integralen steht, die erst später ausgeführt werden.

Ordnen Sie nach dieser Maxime das folgende Vierfachintegral. Betrachten Sie die Aufgabe als Herausforderung an Ihren Ordnungssinn!

$$I = \int_{s=0}^{v^2} \int_{v=0}^u \int_{t=1}^2 \int_{u=1}^{\sqrt{t^2+1}} du \, dv \, ds \, dt$$

$$I = \int \left(\int \left\{ \int \left[\int \right] \right\} \right)$$

90



20

Wird über z integriert, werden diese Scheiben in z -Richtung aufsummiert. Als Ergebnis erhalten wir dann das Volumen des Quaders: $V = a \cdot b \cdot c$.

Die erste Integration entspricht also der Addition der Volumenelemente in einer Koordinatenrichtung. Dadurch entsteht eine Säule.

Die zweite Integration ist die Addition der Säulen in der zweiten Koordinatenrichtung. Dadurch entsteht eine Scheibe.

Die dritte Integration ist die Addition der Scheiben in der dritten Koordinatenrichtung. Dadurch entsteht der Quader.

Im Lehrbuch wurde die Masse eines Luftquaders berechnet. Sie können eine zusätzliche Erläuterung dazu haben.

Rechengang im Lehrbuch verstanden ▷ 25

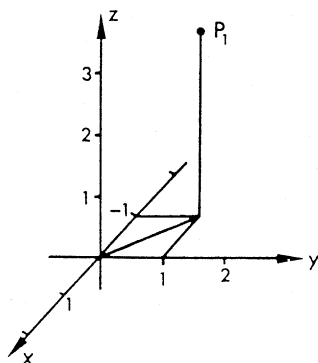
Wünsche Erläuterung der Rechnung im Lehrbuch ▷ 21

55

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$



Geben Sie die Zylinderkoordinaten des Punktes

$P_1 = (-1, 1, 3)$ an.

$$r_1 = \dots\dots\dots$$

$$\tan \varphi_1 = \dots\dots\dots$$

$$z_1 = \dots\dots\dots$$

$$\varphi_1 = \dots\dots\dots$$

..... ▷ 56

90

$$I = \int_{t=1}^2 \left(\int_{u=1}^{\sqrt{t^2+1}} \left\{ \int_{v=0}^u \left[\int_{s=0}^{v^2} ds \right] dv \right\} du \right) dt$$

Wer Spaß hat, möge das Integral ausrechnen.



$$I = \dots\dots\dots$$

..... ▷ 91

21

Es sollte die Masse der Luft berechnet werden, die sich in einem Quader befindet. Dabei wurde berücksichtigt, daß die Dichte der Luft nicht konstant ist, sondern mit der Höhe abnimmt. Dadurch wurden die Formeln unübersichtlich. Die Dichte der Luft war gegeben durch den Ausdruck:

$$\rho = \rho_o e^{-\alpha z} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\rho_o}{p_o} g$$

Machen wir uns das Leben zunächst einmal leichter. Das Problem können wir lösen, wenn die Dichte konstant wäre:

$$\rho = \rho_o$$

Rechnen Sie das Beispiel auf den Seiten 45-46 im Lehrbuch in dieser vereinfachten Form.

Ersetzen Sie $\rho_o \cdot e^{-\alpha z}$ durch ρ_o und führen Sie die Rechnung auf einem Zettel durch.

Danach gehen Sie auf

----- > 22

56

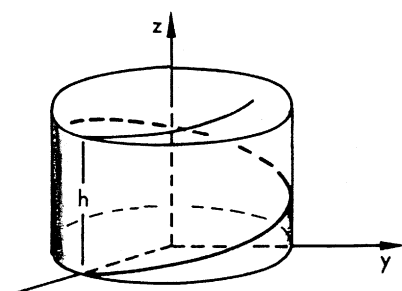
$$r_1 = \sqrt{2}$$

$$\tan \varphi_1 = -1$$

$$z_1 = 3$$

$$\varphi_1 = -45^\circ$$

.....



Geben Sie in Zylinderkoordinaten die Gleichung der Schraubenlinie mit dem Radius R und der Ganghöhe h an.

h ist der Höhengewinn pro Umlauf.

.....

.....

----- > 57

91

$$I = \frac{163}{180}$$

Rekapitulieren wir noch einmal die Ordnungsmaxime in Verbotsform:

Es ist verboten:

.....

.....

.....

.....

(Ergänzen Sie immer mit eigenen Worten)

----- > 92

22

Als Ergebnis Ihrer Rechnung müssen Sie jetzt erhalten haben

$$M = \rho_o a \cdot b \cdot h$$

In der vorliegenden Form war das Integral insofern vereinfacht, als die von z abhängige Dichte durch eine Konstante ersetzt war.

Wir wenden uns nun wieder dem ursprünglichen Ansatz zu.

Zuerst eine Vorübung $\int_0^h e^{-\alpha z} dz = \dots\dots\dots$

----- ▷ 23

57

$$r = R$$

$$z = \frac{h\varphi}{2\pi}$$

Alles richtig

----- ▷ 59

Fehler gemacht oder Erläuterung gewünscht

----- ▷ 58

92

Es ist verboten, über eine Variable zu integrieren, die in den Grenzen von Integralen steht, die erst später ausgeführt werden.

Bemerkung: Wichtig ist, daß Sie dies sinngemäß ergänzt haben.

Weitere Übungsaufgaben stehen im Lehrbuch.

Übungsaufgaben sollte man gar nicht immer im direkten Anschluß an die Arbeit hier rechnen. Wichtig ist, daß man die Aufgaben noch nach vier Tagen oder Wochen kann. Daraus folgt, daß beim Studium immer wieder einmal Übungsaufgaben vorausgegangener Kapitel gerechnet werden sollten.

----- ▷ 93

23

$$\int_0^h e^{-\alpha z} dz = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha z} \right]_0^h = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha h})$$

Wenn Sie diese Aufgabe lösen konnten, so haben Sie alle Operationen verstanden, die Sie beherrschen müssen. Das Integral auf den Seiten 45-46 kann nun durch drei aufeinander folgende Integrationen gelöst werden.

Die Aufgabe ist hier noch einmal hingeschrieben. Die Integrationsgrenzen sind ausführlich notiert.

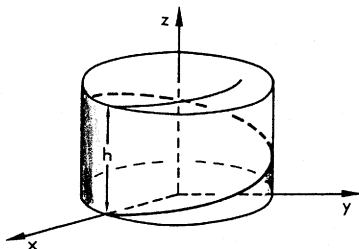
$$M = \int_{z=0}^h \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a \rho_o \cdot e^{-\alpha z} dx dy dz = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 24

58

Die Schraubenlinie ist dadurch gekennzeichnet, daß der Abstand r von der z -Achse konstant bleibt und gleich R ist. Die Projektion der Schraubenlinie auf der x - y -Ebene ist ein Kreis. Für den Kreis kennen wir bereits die Gleichung in Polarkoordinaten, sie gilt auch hier: $r = R$

Die Höhe z hängt von dem Winkel φ ab. Bei einem Umlauf nimmt der Winkel um 2π zu. Die Höhe nimmt um h zu. Das führt zu der zweiten Gleichung.



$$z = h \frac{\varphi}{2\pi}$$

----- ▷ 59

93

Kreisfläche in kartesischen Koordinaten

Die Fläche eines Kreises brauchen wir nicht zu berechnen. Wir kennen sie bereits. Sie ist in Polarkoordinaten berechnet worden. Dennoch ist die Berechnung in kartesischen Koordinaten sehr lehrreich.

- Sie werden erkennen, daß die Berechnung auch in kartesischen Koordinaten möglich ist.
- Sie werden weiter erkennen, welchen Vorteil die Benutzung passender Koordinatensysteme bietet.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

15.6 Kreisfläche in kartesischen Koordinaten

Lehrbuch, Seite 58 - 59

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

----- ▷ 94

24

$$M = \frac{a \cdot b \cdot \rho_o}{\alpha} (1 - e^{-\alpha h})$$

Das ist das Ergebnis auf Seite 46 des Lehrbuches.

Schwierigkeiten treten meist dadurch auf, daß die Konstanten Verwirrung stiften oder nicht korrekt mitgeführt werden.

----- > 25

59

Das Volumenelement in Zylinderkoordinaten können Sie selbst herleiten, falls Ihnen das Flächenelement in Polarkoordinaten geläufig ist.

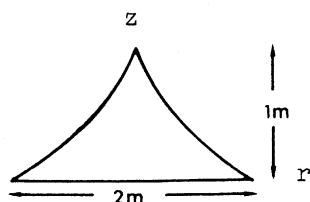
Es steht in der Tabelle im Lehrbuch, Seite 52. Sehen Sie das nur nach, wenn Sie wirklich Schwierigkeiten mit der Ableitung haben.

$$dV = \dots\dots\dots$$

----- > 60

94

Das Problem: Ein Steinmetz hat aus einem Sandstein die Spitze eines Aussichtsturmes nach Zeichnung fertiggestellt. Es ist ein rotationssymmetrischer Körper. Die Dichte des Sandsteins liegt zwischen 2,4 und 2,7 t/m³. Der Steinmetz besitzt einen Kleintransporter, der maximal mit 3 t belastet werden kann. Kann er den Transporter benutzen?



Hier gibt es zwei Probleme zu lösen:

1. Problem: Volumen des Körpers
2. Problem: Gewicht des Körpers, wobei die Dichte nicht genau bekannt ist, sondern nur in Grenzen eingeschlossen werden kann.

Die Gleichung der Begrenzungskurve lautet:

$$z = 1 - 1,5 r + 0,5 r^2$$

Hilfe und Erläuterung

----- > 95

Lösung

----- > 98

25

Mehrfachintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen bieten keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Bei der Rechnung muß man Geduld bewahren, denn es sind mehrere Integrationen nacheinander auszuführen. Gegeben sei das Doppelintegral:

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 x^2 \, dx \, dy$$

Durch eine Klammer soll das *innere Integral* zusammengefaßt werden. Das innere Integral wird als erstes ausgerechnet.

Welcher Ansatz ist richtig? Integrationsgrenzen beachten!

$$\int_{y=0}^2 \left[\int_{x=0}^1 x^2 \, dx \right] dy \quad \text{-----} \triangleright 26$$

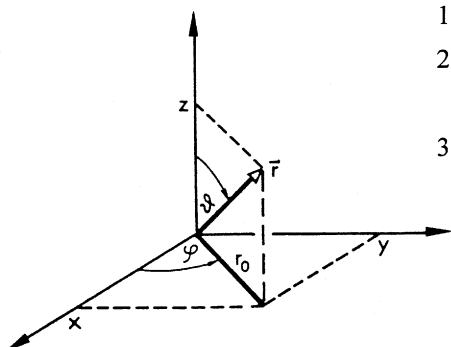
$$\int_{x=0}^1 \left[\int_{y=0}^2 x^2 \, dy \right] dx \quad \text{-----} \triangleright 27$$

60

$$dV = r \, d\varphi \, dr \, dz$$

Kugelkoordinaten sind durch drei Größen gegeben:

1. r = Länge des Ortsvektors
2. Winkel ϑ des Ortsvektors mit der - Achse
Er heißt:
3. Winkel φ , den die Projektion des Ortsvektors auf die x - y -Ebene mit der - Achse einschließt.
Er heißt:



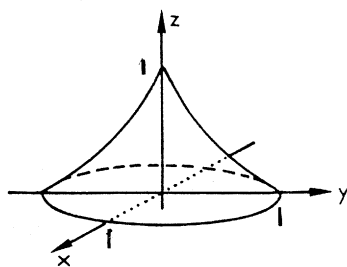
----- \triangleright 61

95

Als erstes Problem lösen wir das Volumenproblem: Der Querschnitt durch den Körper ist in der Abbildung gezeichnet. Die Begrenzungskurve ist analytisch gegeben in der Form:

$$z = 1 - 1,5r + 0,5r^2$$

Bei der Problemlösung versuchen wir bekannte und unbekannte Größen zu ordnen:



Bekannt ist: analytischer Ausdruck für die Begrenzung des Körpers

Unbekannt: Volumen

Lösungsansatz: Berechnung des Volumens durch Integration

----- \triangleright 96

26

RICHTIG!

Stehen die Integralzeichen mit den daran vermerkten Integrationsgrenzen nicht in der richtigen Reihenfolge, können und müssen sie umgeordnet werden. Das ist hier geschehen.

Ordnen Sie zur Übung noch folgendes Dreifachintegral:

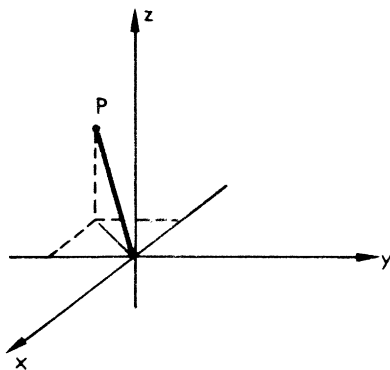
$$\int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=1}^2 x^2 y \, dx \, dy \, dz$$

Wenn jeweils das innere Integral ausgerechnet werden soll, ergibt sich folgende Schreibweise (tragen Sie die Grenzen ein):

$$\int \left\{ \int \left[\int x^2 y \, dx \right] dy \right\} dz \quad \text{SPRINGEN SIE JETZT auf Lehrschrift} \quad \text{----} \triangleright 30$$

61

z-Achse Polwinkel
x-Achse Meridian



In der Skizze sind Ortsvektor und Projektion des Ortsvektors auf die x-y-Ebene gezeichnet.

Zeichnen Sie Polwinkel ϑ und Meridian φ ein!

----- \triangleright 62

96

Wahl des Koordinatensystems: Da es sich um einen rotationssymmetrischen Körper handelt, bieten sich Zylinderkoordinaten an.

$$V = \int_{\varphi=0} \int_{r=0} \int_{z=0} r \, d\varphi \, dr \, dz$$

Bestimmung der Grenzen:

Der Winkel φ geht von 0 bis 2π ,

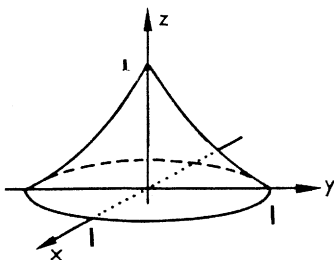
r geht von 0 bis 1,

z geht von 0 bis zu einem Wert, der vom Radius abhängt.

$$z = 0 \text{ bis } z = 1 - 1,5r + 0,5r^2$$

Dieses z ist die obere Grenze des Integrals.

$$V = \dots \quad \text{-----} \triangleright 97$$



27

Hier ist Ihnen ein Fehler unterlaufen. So einfach die Auflösung der Mehrfachintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen scheint, an einer Stelle muß man höllisch aufpassen:

Wird über eine Variable integriert, müssen die für die Variable geltenden Integrationsgrenzen eingesetzt werden.

Im vorliegenden Fall bedeutet es: Die Grenzen müssen umgeordnet werden.

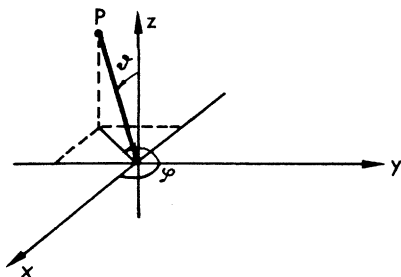
Gegeben war das Integral $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 x^2 dx dy$

Es soll zuerst über x integriert werden. Schreiben Sie die Integrationsgrenzen so, daß das innere Integral zuerst gerechnet werden kann:

$$\int \left[\int x^2 dx \right] dy$$

----- > 28

62



Geben Sie die Transformationsgleichungen an. Sie können Sie aus der Zeichnung ablesen:

$x = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$

$z = \dots\dots\dots$

----- > 63

97

Damit erhalten wir: $V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{1-1,5r+0,5r^2} \int_{r=0}^1 r dr dz d\varphi$

Die Integration über φ können wir sofort ausführen:

$$V = 2\pi \int_{z=0}^{1-1,5r+0,5r^2} \int_{r=0}^1 r dr dz$$

Nach unserem Verbot dürfen wir nun nicht zuerst über r integrieren, denn r steht in den Grenzen von z . Wir müssen also zunächst über z integrieren und dann über r :

$$V = 2\pi \int_{r=0}^1 \dots\dots\dots$$

----- > 98

28

$$\int_{y=0}^2 \left[\int_{x=0}^1 x^2 dx \right] dy$$

Jetzt kann das innere Integral ausgerechnet werden. Dazu werden die für die Variable x maßgebenden Grenzen eingesetzt.

$$\int_{y=0}^2 \left[\dots \right] dy$$

----- ▷ 29

63

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$



Alles richtig ----- ▷ 66

Fehler gemacht oder Schwierigkeiten ----- ▷ 64

98

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{r=0}^1 (r - 1,5 r^2 + 0,5 r^3) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} r^3 + \frac{1}{8} r^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Das Volumen beträgt also $\frac{\pi}{4} \text{ m}^3$.

Die Masse ist damit höchstens: $M = \frac{\pi}{4} \cdot 2,7 \text{ m}^3 \cdot \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = 2,1 \text{ t}$

Der Stein kann transportiert werden. ----- ▷ 99

29

$$\int_{y=0}^2 \left[\frac{1}{3} \right] dy$$

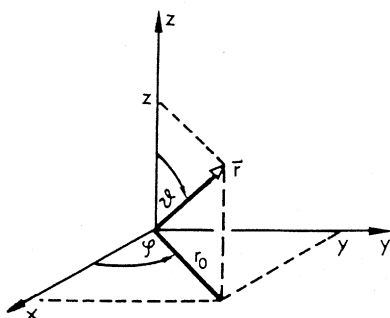
1. Ein Mehrfachintegral mit konstanten Integrationsgrenzen läßt sich auf die Berechnung bestimmter Integrale zurückführen.
2. Bei der Ausführung einer Integration über eine Variable sind die zu dieser Variablen gehörenden Grenzen einzusetzen.

Gegeben sei das Mehrfachintegral: $\int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=1}^2 x^2 y \, dx \, dy \, dz$

Ordnen Sie die Grenzen so um, daß die Integrale von innen nach außen berechnet werden können:

..... > 30

64



Gesucht sind die Transformationsgleichungen für Kugelkoordinaten. Gegeben seien die Kugelkoordinaten, nämlich Länge des Ortsvektors r , Polwinkel ϑ und Meridian φ .

Als Hilfsgröße berechnet man zunächst die Länge der Projektion des Ortsvektors auf die x - y -Ebene. Sie ergibt sich zu $r \sin \vartheta = r_0$.

Von dieser Hilfsgröße lassen sich jetzt die x - und y -Komponenten ableiten:

$$x = (r \sin \vartheta) \cos \varphi$$

$$y = (r \sin \vartheta) \sin \varphi$$

Das ist die bekannte Beziehung bei Polarkoordinaten. Wichtig ist hier nur, daß wir von der *Projektion* des Ortsvektors auf die x - y -Ebene ausgehen.

----- > 65

99

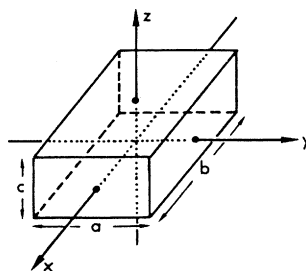
Berechnen Sie das Trägheitsmoment des abgebildeten Quaders mit den Kanten a , b und c bei Drehung um die x -Achse.

Hinweise:

1. Verwenden Sie kartesische Koordinaten.
2. Der Abstand r von der Drehachse beträgt

$$r^2 = y^2 + z^2$$

$$\theta = \dots\dots\dots$$



Hilfe und Erläuterung

----- > 100

Lösung gefunden

----- > 101

30

$$\int_{z=1}^2 \left\{ \int_{y=0}^1 \left[\int_{x=-1}^1 x^2 y \, dx \right] dy \right\} dz$$

Berechnen Sie jetzt dieses Integral:

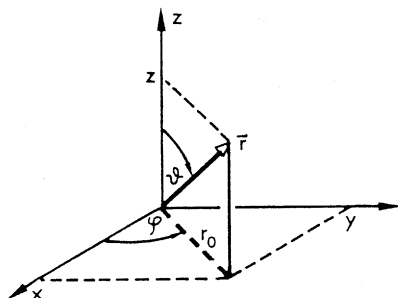
Das Ergebnis ist ein Zahlenwert:

.....



----- > 31

65



Die z-Komponente ergibt sich aus dem Polwinkel und der Länge des Ortsvektors r .

$$z = r \cos \vartheta$$

Bei Kugelkoordinaten muß man sich die Definition des *Polwinkels* und des *Meridians* merken.

Das Volumenelement in Kugelkoordinaten braucht man nicht auswendig zu wissen.

Wichtig ist, daß man

- die Herleitung einmal verstanden hat;
- weiß, daß man es im Bedarfsfall in der Übersicht im Lehrbuch, Seite 52, findet.

----- > 66

100

Rechengang:

$$\begin{aligned} \theta &= \int r^2 \, dm = \rho \int r^2 \, dV \\ &= \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz \\ &= \rho \frac{abc}{12} (b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Mit $M = \rho \cdot a \cdot b \cdot c$ als Masse des Quaders: $\theta = \dots\dots\dots$

----- > 101

31

$$\frac{1}{3}$$

Einfach zu rechnen ist der Sonderfall, bei dem sich der Integrand in ein Produkt von Funktionen zerlegen läßt, die jeweils nur von einer Variablen abhängen.

Welcher Integrand ist ein *Produkt* von Funktionen, die jeweils nur von einer Variablen abhängen?

A) $\int_{x=0}^2 \int_{y=1}^2 \frac{x^2}{y^2} dx dy$

B) $\int_{x=0}^2 \int_{y=1}^2 x(x + \frac{1}{y^2}) dx dy$

- A) ▷ 32
 B) ▷ 33
 Sowohl A) wie B) ▷ 34

66

In der Übersicht im Lehrbuch auf Seite 52 sind die Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen systematisch zusammengestellt.

Übersichten sind erst dann nützlich, wenn man die Einzelheiten verstanden hat.

Übersichten sind Informationsspeicher, auf die man jederzeit zurückgreifen kann – und dieses Zurückgreifen sollte man üben.

Bei der künftigen Lösung von Aufgaben im Rahmen dieses Kapitels, sollten Sie jedes Problem daraufhin analysieren, welche Koordinaten dem Problem angemessen sind.

In der Übersicht finden Sie dann die Umrechnungsformeln und den Ausdruck für Flächen- bzw. Volumenelemente.

Jetzt aber ist eine PAUSE gerechtfertigt.

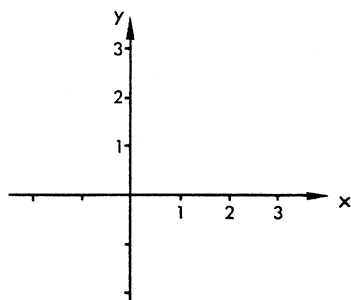
..... ▷ 67

101

$$\theta = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)$$

$$M = \rho \cdot a \cdot b \cdot c$$

Jetzt folgen Übungen aus dem ganzen Kapitel.



Skizzieren Sie

$$r = 2 \sin \varphi \text{ für } 0 \leq \varphi \leq \pi$$



..... ▷ 102

32

RICHTIG!

Nun zerlegen Sie das folgende Doppelintegral in ein Produkt von bestimmten Integralen, bei denen der Integrand nur noch von einer Variablen abhängt:

$$\int_{x=0}^2 \int_{y=1}^2 \frac{x^2}{y^2} dx dy = \dots\dots\dots$$

Die Lehrschrte ab 36 finden Sie in **der Mitte der Seiten**.

Lehrschritt 36 steht unterhalb Lehrschritt 1.

BLÄTTERN SIE ZURÜCK

----- > 36

67

Anwendungen: Berechnung von Volumen und Trägheitsmoment

In diesem Abschnitt wird deutlich, wie Rechnungen durch geeignete Wahl des Koordinatensystems vereinfacht werden können.

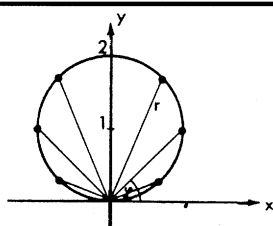
STUDIERN SIE im Lehrbuch

15.5 Anwendungen: Volumen und Trägheitsmoment
Lehrbuch, Seite 53 - 55

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt

----- > 68

102



Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 e^{-x} dx dy = \dots\dots\dots$$

----- > 103

33

Leider Irrtum: Das Doppelintegral B hieß: $\int_{x=0}^2 \int_{y=1}^2 x \left(x + \frac{1}{y^2}\right) dx dy$



Der Integrand ist dann $x \left(x + \frac{1}{y^2}\right)$

Die Klammer enthält sowohl die Variable x wie die Variable y . Welche Gleichungen lassen sich in ein Produkt von Funktionen zerlegen, die jeweils nur von *einer* Variablen abhängen?

- a) $f_1 = (x + 2y)y$
- b) $f_2 = (x + x^2) \cdot (y + y^2)$
- c) $f_3 = \sin x \cdot \cos y$
- d) $f_4 = (\sin x + \sin y) \cos x$

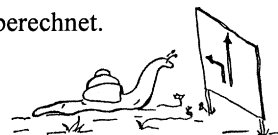
SPRINGEN SIE AUF

----- > 35

68

Im Lehrbuch sind zwei Volumina und ein Trägheitsmoment berechnet.

Sie können jetzt wählen!



Berechnung eines weiteren Beispiels zum Trägheitsmoment ----- > 69

Möchte gleich weitergehen

----- > *75

* Die Lehrschritte ab 71 stehen **unten auf den Seiten**.

Sie finden Lehrschritt 75 unterhalb Lehrschritt 5.

BLÄTTERN SIE ZURÜCK.

103

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Ein Punkt habe die kartesischen Koordinaten

$$P_0 = (1, 1, 2)$$

Geben Sie die Zylinderkoordinaten dieses Punktes an:

$r = \dots\dots\dots$

$z = \dots\dots\dots$

$\varphi = \dots\dots\dots$

----- > 104

34

A ist richtig, B ist aber falsch. Der Integrand $x(x + \frac{1}{y^2})$ ist zwar ein Produkt, aber die Klammer hängt von *zwei* Variablen ab.

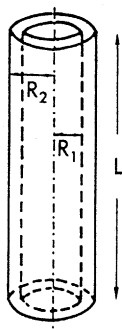
Welche Funktionen lassen sich in ein Produkt von Funktionen zerlegen, die jeweils nur von *einer* Variablen abhängen?

- a) $f_1 = (x + 2y)y$
- b) $f_2 = (x + x^2) \cdot (y + y^2)$
- c) $f_3 = \sin x \cdot \cos y$
- d) $f_4 = (\sin x + \sin y) \cos x$

----- > 35

69

Man betrachte ein Rohr der Länge L mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2 und konstanter Dichte ρ . Zu berechnen sei das Trägheitsmoment bezüglich der Rohrachse:



Dieses Problem läßt sich auf verschiedene Weise lösen.

- a) Es wird ein systematisches Lösungsverfahren gesucht und auf das Problem angewandt.
- b) Das Problem wird so umgeformt, daß es auf ein bereits gelöstes zurückgeführt wird oder daß sich die Lösung aus den Ergebnissen bereits gelöster Probleme kombinieren läßt.

Gehen Sie zunächst systematisch vor und berechnen Sie $\theta = \dots\dots$

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ----- > 70

Lösung gefunden ----- > *73

* Den Lehrschrift 73 finden Sie **unten auf den Seiten**. BLÄTTERN SIE ZURÜCK.

104

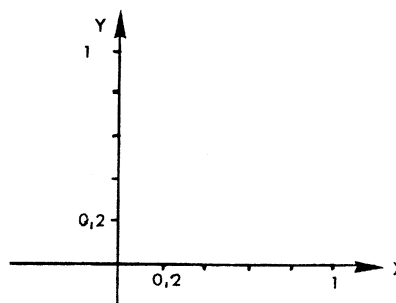
$$r = \sqrt{2} \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad z = 2$$

Berechnen Sie die Fläche zwischen den

Graphen der Funktionen $y = x$ und $y = +\sqrt{x}$

im Intervall $0 \leq x \leq 1$.

Skizzieren Sie zuerst die Fläche.



----- > 105

35

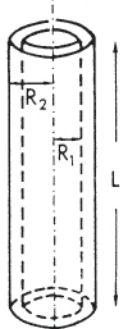
b) $f_2 = (x + x^2) \cdot (y + y^2) = g(x) h(y)$

c) $f_3 = \sin x \cdot \cos y = g(x) h(y)$

Zerlegen Sie nun das folgende Doppelintegral in ein Produkt von bestimmten Integralen, bei denen der Integrand nur noch von einer Variablen abhängt.

$$\int_{x=0}^2 \int_{y=1}^2 \frac{x^2}{y^2} dx dy = \dots\dots\dots$$

36



Das Trägheitsmoment ist definiert als

$$\theta = \int r^2 dm$$

Dabei ist r der Abstand der Massenelemente dm von der Drehachse.

Wegen $dm = \rho dV$ wird

$$\theta = \int r^2 \rho dV$$

Zur Behandlung des Problems verwenden wir -Koordinaten

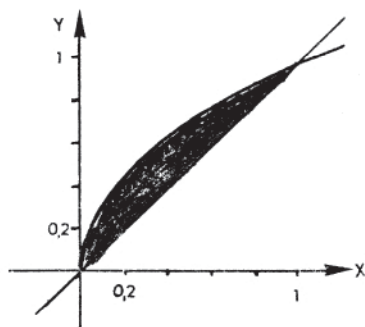
In diesen Koordinaten lautet das Volumenelement $dV = \dots\dots\dots$

Das Massenelement ist

$dm = \dots\dots\dots$

70

71



$$A = \frac{1}{6}$$

Rechnung $A = \int_{y=x}^{+\sqrt{x}} \int_0^1 dx dy$

$$A = \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^{+\sqrt{x}} dx dy = \int_{x=0}^1 (\sqrt{x} - x) dx$$

$$A = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

105

Damit haben Sie das



dieses Kapitels erreicht.