

Kapitel 16

Parameterdarstellung, Linienintegral

Nichts wird schneller vergessen als gute Vorsätze und ein gutes Essen.
(Altchinesische Weisheit)

Vor Beginn eines Kapitels sollten Sie kurz das vorhergehende wiederholen.

Kapitel 15 behandelte:

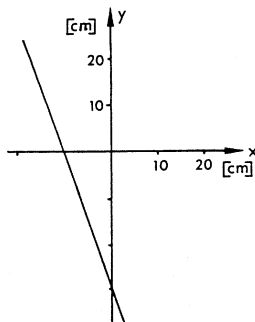
.....

.....

.....

.....

----- ▷ 2



Weiterer Hinweis: Gefragt ist nach dem *Betrag* der Geschwindigkeit. Gegeben war:

$$x = -10\text{cm} + 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \cdot t$$

$$y = -30 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \cdot t$$

Wir bestimmen zunächst die Komponenten der Geschwindigkeit:

$$v_x = \dots\dots\dots$$

$$v_y = \dots\dots\dots$$

$$\vec{v} = (\dots\dots\dots)$$

----- ▷ 23

Dieser Abschnitt enthielt nun die letzte schwierige Überlegung dieses Kapitels. Herzlichen Glückwunsch, wenn Sie bis hierher durchgehalten und die Rechnungen mitgerechnet haben.

Wenn man die einzelnen Umformungen nicht durchführt, geht einem leicht die Übersicht verloren. Umgekehrt erfordert es immer einige Überwindung, mit Papier und Bleistift die Umformungen nachzuvollziehen.

Tut man es, folgt die Belohnung auf dem Fuße. Man stellt fest, daß die Umformungen gar nicht so schwierig auszuführen sind und daß man dann die Gedankenführung nachvollziehen kann.

----- ▷ 44

2

Mehrfachintegrale mit festen Grenzen
 Mehrfachintegrale mit variablen Grenzen
 Polarkoordinaten
 Zylinderkoordinaten
 Kugelkoordinaten

Rekapitulieren Sie in Gedanken die Regeln für die Ausführung von Mehrfachintegralen und berechnen Sie

$$I = \int_{y=x-1}^{3x} \int_{x=0}^2 x \, dx \, dy = \dots\dots\dots$$

Es handelt sich um ein Integral mit Grenzen.

----- ▷ 3

23

$$v_x = 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

$$v_y = -30 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

$$\vec{v} = (10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, -30 \frac{\text{cm}}{\text{sec}})$$

Jetzt bleibt nur noch übrig, den Betrag von \vec{v} zu berechnen.

$$|\vec{v}| = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 24

44

Die folgende Übungsaufgabe steht auch im Lehrbuch auf Seite 78.

Berechnen Sie für das unten gegebene Vektorfeld A das Linienintegral

längs der Kurve $r(t)$ von $t = 0$ bis $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\vec{A} = (x, y, z) = (0, -z, y)$$

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \cos 2t, \frac{2t}{\pi})$$

$$\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden

----- ▷ 49

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

----- ▷ 45

18

$$\text{Rechengang: } I = \int_{x=0}^2 \int_{y=x-1}^{3x} x \, dy = \int_{x=0}^2 \left[\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right] dx = 18$$

Variable Grenzen. Das Integral mußte deshalb vor der Berechnung umgeordnet werden.

Berechnen Sie noch das Integral

$$I = \int_{x=0}^2 \int_{y=1}^2 \frac{x^2}{y^2} dx \, dy = \dots\dots\dots$$

Das Mehrfachintegral hat Grenzen.

----- ▷ 4

$$v = \sqrt{100 + 900} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 31,6 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

Rechnen Sie jetzt die Aufgabe 16.2A auf Seite 77 im Lehrbuch.

Bestimmen Sie dabei auch den Betrag des Beschleunigungsvektors und versuchen Sie herauszubekommen, welche Richtung der Beschleunigungsvektor hat.

----- ▷ 25

Gegeben sind das Vektorfeld \vec{A} in kartesischen Koordinaten und die Kurve in Parameterdarstellung: $\vec{A} = (0, -z, y)$ $\vec{r} = (\sqrt{2} \cos t, \cos 2t, \frac{2t}{\pi})$

1. Schritt: Wir drücken zunächst das Vektorfeld \vec{A} durch den Parameter aus. Wir ersetzen x durch $z = \frac{2t}{\pi}$ und y durch $\cos 2t$. Die x -Koordinate ist 0.
2. Schritt: Wir berechnen das Wegelement \vec{dr} .
3. Schritt: Das Wegelement wird in das Linienintegral eingesetzt und gemäß der Regel auf Seite 76 im Lehrbuch ausgerechnet.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{A} \cdot \vec{dr} = \dots\dots\dots$$

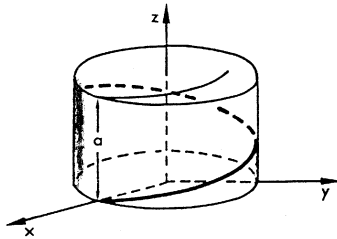
Lösung gefunden ----- ▷ 49

Weitere Erläuterung oder Hilfe erwünscht ----- ▷ 46

$$I = \int_{x=0}^2 x^2 dx \cdot \int_{y=1}^2 \frac{1}{y^2} dy = \frac{4}{3}$$

Feste Grenzen

Eine Schraubenlinie hat in Zylinderkoordinaten die Form:



$$r = R$$

$$z = \frac{a}{2\pi} \cdot \varphi$$

Geben Sie die kartesischen Koordinaten an:

$$x = \dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots$$

$$z = \dots\dots\dots$$

5

25

Der Betrag der Beschleunigung ist

$$a = \omega^2 r$$

Die Richtung des Beschleunigungsvektors erfordert etwas mehr Überlegung:

Wir haben den Beschleunigungsvektor

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 r (\cos \omega t, \sin \omega t)$$

Vergleichen wir dies mit dem Ortsvektor selbst.

$$\vec{r}(t) = r (\cos \omega t, \sin \omega t)$$

Man sieht hier, daß in der Klammer der gleiche Ausdruck steht. Es gilt:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

Die Beschleunigung hat die entgegengesetzte Richtung wie der Ortsvektor. Sie ist auf das Kreiszentrum hin gerichtet.

26

46

Wir ersetzen in $\vec{A} = (0, -z, y)$ die Koordinaten x, y, z durch die gegebene Parameterdarstellung

$$z = \frac{2t}{\pi}$$

$$y = \cos 2t$$

Wir erhalten $\vec{A} = (0, \dots\dots\dots)$

Wir berechnen \vec{dr} aus $\vec{r} = (\sqrt{2} \cos t, \cos 2t, \frac{2t}{\pi})$

$$\vec{dr} = \dots\dots\dots$$

47

5

$$x = R \cos \varphi$$

$$y = R \sin \varphi$$

$$z = \frac{a}{2\pi} \varphi$$

Falls Sie Schwierigkeiten bei einer der Aufgaben hatten, rechnen Sie diese Aufgaben noch einmal anhand des Lehrbuches Kapitel 15 nach.

6

26

Rechnen Sie jetzt die Übungsaufgabe 16.2B auf Seite 77 im Lehrbuch.

Überlegen Sie vorher auch, welche Bahn hier vorliegt, die Bahnkurve ist bereits im Lehrbuch vorgekommen.

Suchen Sie sie im Lehrbuch notfalls auf.

Es handelt sich um eine

27

47

$$\vec{A} = (0, -\frac{2t}{\pi}, \cos 2t)$$

$$\vec{dr} = (-\sqrt{2} \sin t, -2 \sin 2t, \frac{2}{\pi}) dt \quad \text{oder} \quad \vec{dr} = (-\sqrt{2} \sin t, dt, -2 \sin 2t dt, 2 \frac{dt}{\pi})$$

Dies wird eingesetzt in das Integral und dann wird das innere Produkt gebildet.

$$\int \vec{A} \cdot \vec{dr} = \dots\dots\dots$$

48

Parameterdarstellung von Kurven

Auf die Parameterdarstellung von Kurven führt uns die Beschreibung von Bewegungen. Der Ort eines Punktes ist eine Funktion der Zeit. Dies führt häufig auf nicht einfache Gleichungen. Eine Vereinfachung erzielen wir, wenn die Bewegung eines Punktes im Raum auf die Betrachtung der Bewegung der Komponenten reduziert wird.

Das Prinzip der Beschreibung von Bahnkurven als Funktion einer dritten Größe – in der Praxis ist es meist die Zeit – wird dann verallgemeinert.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

16.1 Parameterdarstellung von Kurven

Lehrbuch, Seite 63 - 68

7

27

Schraubenlinie

Wie groß ist die Beschleunigung für die Bewegung des Massenpunktes auf der Schraubenlinie in unserem Beispiel?

Es war der Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, t)$$

Die Beschleunigung ist:

$$\vec{a}(t) = \dots\dots\dots$$

28

48

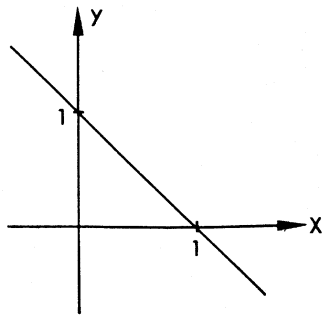
$$\int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int \left[\frac{4t}{\pi} \sin 2t + 2 \frac{\cos 2t}{\pi} \right] dt$$

Wir setzen die Grenzen des Integrals ein und erhalten: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4t}{\pi} \sin 2t + 2 \frac{\cos 2t}{\pi} \right) dt$

Das Integral $\int \frac{4t}{\pi} \sin 2t$ wird durch partielle Integration berechnet.

Es gilt, wovon man sich durch Verifizierung überzeugt: $\int t \cdot \sin 2t \cdot dt = \frac{\sin 2t}{4} - \frac{t \cdot \cos 2t}{2}$

Damit ergibt das Integral bei Beachtung der Grenzen $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \dots\dots\dots$



Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden an.

Im Lehrbuch hieß im 3. Beispiel der Parameter t .

Hier wollen wir den Parameter λ nennen.

$x = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$

----- > 8

$$\vec{a}(t) = (-R\omega^2 \cdot \cos \omega t, -R\omega^2 \cdot \sin \omega t, 0)$$

Berechnen Sie jetzt den Betrag der Beschleunigung bei dieser Bewegung auf der Schraubenlinie.

$$|\vec{a}| = \dots\dots\dots$$

Die Richtung der Beschleunigung bei der Bewegung auf der Schraubenlinie können Sie auch angeben: Die Beschleunigung liegt in der

..... Ebene

und zeigt immer auf die

..... Achse

----- > 29

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin 2t}{4} - \frac{t \cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi} \left[\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Nach diesen nun wirklich schwierigen Überlegungen und Rechnungen einige leichtere Wiederholungsaufgaben aus dem ganzen Kapitel.



----- > 50

Eine Parameterdarstellung der Geraden ist:

$$x = 1 \cdot \lambda$$

$$y = 1 - \lambda$$

λ durchläuft dabei alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$

Gewinnen Sie aus der obigen Parameterdarstellung der Geraden jetzt wieder die übliche Darstellung:

$y = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden

----- ▷ 10

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

----- ▷ 9

$$|\vec{b}| = R\omega^2$$

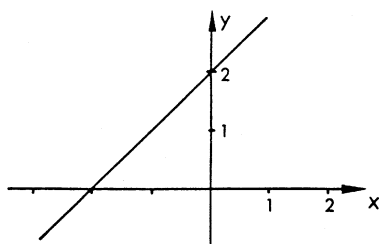
x - y -Ebene

z -Achse



----- ▷ 30

Die Gerade $y = 2 + x$ ist in eine Parameterdarstellung zu überführen.



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + r_1 \cdot \lambda$$

Wählen wir \vec{r}_0 längs der y -Achse.

\vec{r}_0 hat die Komponenten

$$\vec{r}_0 = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 51

Die Parameterdarstellung war $x = 1 \cdot \lambda$
 $y = 1 - \lambda$

Umformung der Parameterdarstellung in die übliche Notation:

Aus den beiden Gleichungen für x und y wird der Parameter eliminiert und die entstehende Gleichung nach y aufgelöst.

1. Schritt:

Wir drücken in der ersten Gleichung λ durch die Variable x aus: $\lambda = x$

2. Schritt:

Wir ersetzen λ in der 2. Gleichung oben durch x und erhalten $y = \dots\dots\dots$

----- ▷ 10

Das Linienintegral

Dieser Abschnitt ist wichtig, jedoch nicht einfach. Er muß intensiv gelesen werden. Vollziehen Sie die Überlegungen mit Papier und Bleistift nach.

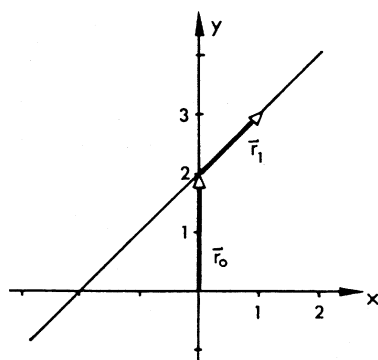
Reading without a pencil is daydreaming.

Das Linienintegral ist eine neue Erweiterung des Integralbegriffs. Das Linienintegral ist gedanklich leicht zu verstehen. Die Berechnung von Linienintegralen führt jedoch oft auf schwierige Ausdrücke und wird hier für einfache Sonderfälle durchgeführt.

STUDIERN SIE im Lehrbuch 16.3 Das Linienintegral
 16.3.1 Einige Sonderfälle
 Lehrbuch, Seite 71 - 76

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift ----- ▷ 31

$\vec{r}_0 = (0, 2)$



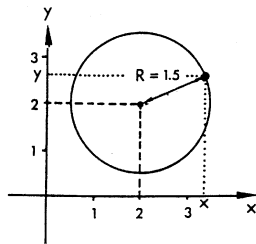
Ermitteln wir nun einen Richtungsvektor \vec{r}_1 .

Die Gerade hat die Steigung 1. Damit ist eine möglich Wahl:

$\vec{r}_1 = \dots\dots\dots$

----- ▷ 52

$$y = 1 - x$$



Ein Punkt bewege sich auf dem abgebildeten Kreis.

Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Bahnkurve an.

$x = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$

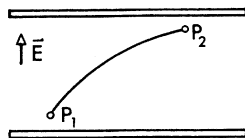
Lösung gefunden

----- > 12

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

----- > 11

Wir werden anhand eines Beispiels ein einfaches Linienintegral berechnen.



Die Zeichnung stellt einen Querschnitt durch einen Plattenkondensator dar. Eine elektrische Ladung werde vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 bewegt. Dabei wirkt die Kraft $\vec{F} = \vec{E} \cdot q$ auf die Ladung.

Zu berechnen ist die aufgewandte Arbeit. Eines wissen Sie bereits: Die bei der Bewegung aufzuwendende Arbeit ist ein $\dots\dots\dots$

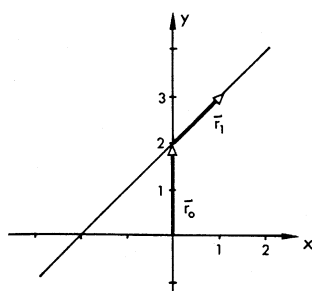
Wir können es bereits formal hinschreiben:

$W = \dots\dots\dots$

K soll den Weg angeben.

----- > 32

$$\vec{r}_1 = (1, 1) \quad \text{oder} \quad \vec{r}_1 = (2, 2) \quad \text{oder} \quad \vec{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



Mit $\vec{r}_1 = (1, 1)$ erhalten wir die Geradengleichung in Komponentendarstellung

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$x(t) = t$$

$$y(t) = 2 + t$$

Geben Sie die gleichwertige Komponentendarstellung an für $\vec{r}_1 = (2, 2)$ und $\vec{r}_1 = (-1, -1)$

$$x = \dots\dots\dots \quad x = \dots\dots\dots$$

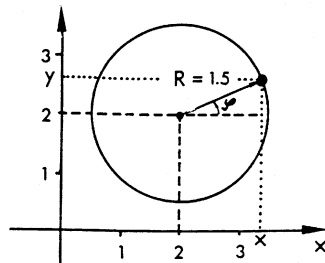
$$y = \dots\dots\dots \quad y = \dots\dots\dots$$

----- > 53

11

Die Aufgabe ist nahezu identisch mit dem 2. Beispiel auf Seite 64 des Lehrbuches. Der Unterschied besteht darin, daß der Mittelpunkt des Kreises jetzt die Koordinaten (2,2) hat.

Wir setzen die gesamte Darstellung zusammen, indem wir für beide Koordinaten die Mittelpunktskoordinate $R_0 = (2,2)$ und die Koordinaten des Punktes auf der Kreisbahn in Polarkoordinaten addieren. Der Winkel φ ist der Parameter.



$$x = \dots\dots\dots$$

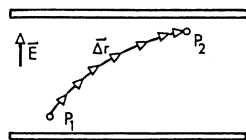
$$y = \dots\dots\dots$$

----- > 12

32

Linienintegral

$$W = \int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_K \vec{E} q \cdot d\vec{r}$$



Die Bedeutung des Linienintegrals wird am deutlichsten, wenn man es als Summe versteht.

Längs des vorgegebenen Weges ist die Arbeit schrittweise zu berechnen. Numerisch läßt sich diese Handlungsvorschrift leicht ausführen, wenn das Feld bekannt ist.

Analytisch läßt sich das Linienintegral lösen, wenn man es in bekannte Integrale überführt. Dazu muß das skalare Produkt ausgerechnet werden.

----- > 33

53

$$x = 2t$$

$$x = -2t$$

$$y = 2 + 2t$$

$$y = 2 - 2t$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden, die durch die folgenden Punkte mit den angegebenen Ortsvektoren geht

$$\vec{p}_1 = (2, 1, 1)$$

$$\vec{p}_2 = (-1, 3, 1)$$

$$r(t) = \dots\dots\dots$$

----- > 54

12

$$x = 2 + 1,5 \cos \varphi$$

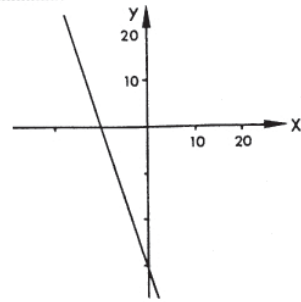
$$y = 2 + 1,5 \sin \varphi$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung
der gezeichneten Geraden an:

Der Parameter heiße t .

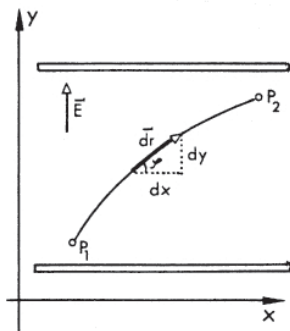
$$x = \dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots$$



..... > 13

33



Zu berechnen ist

$$W = q \cdot \int_K \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

Es sind $\vec{E} = (0, E)$ und $\vec{dr} = (dr \cdot \cos \varphi, dr \cdot \sin \varphi) = (dx, dy)$

Also wird $\vec{E} \cdot \vec{dr} = (0, E) \cdot (dx, dy)$

Bilden Sie das innere Produkt und setzen Sie ein:

$$W = q \int_K \dots\dots\dots$$

..... > 34

54

$$\vec{r}(t) = \vec{p}_1 + (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) t \quad x = 2 - 3t \quad y = 1 + 2t \quad z = 1$$

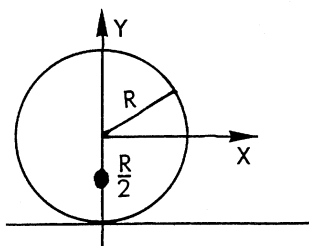
Hinweis: Als Punkt auf der Geraden ist hier der Ortsvektor \vec{p}_1 gewählt. Die Richtung der Geraden ist durch die Differenz der Ortsvektoren bestimmt.

Ein Rad rolle auf einer Ebene nach rechts. Geben
Sie die Bahnkurve des Punktes auf dem Rad an.

Hilfe finden Sie auf Seite 68 im Lehrbuch.

$$r(\varphi) = \dots\dots\dots$$

Die Kurve heißt



..... > 55

Eine Parameterdarstellung ist z.B.

$$x = -10 + 10t$$

$$y = -30t$$

Wäre auch folgende Darstellung eine richtige Lösung? $x = 5t$ $y = -30 - 15t$

☐ Ja

☐ Nein

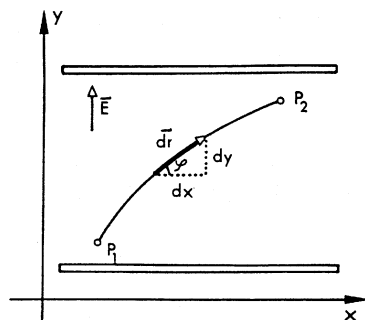
Hinweis: Jede Parameterdarstellung muß auf die gleiche Geradengleichung führen, nämlich

$y = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden > 15

Erläuterung oder Hilfe erwünscht > 14

$$W = q \int_K E \sin \varphi \, dr$$



$$\sin \varphi \, dr = dy$$

$$P_1 = (x_1, y_1)$$

$$P_2 = (x_2, y_2)$$

$$\text{Damit wird } W = \int_K q E \sin \varphi \, dr$$

$$W = \int \dots\dots\dots$$

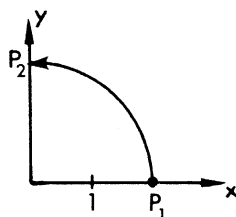
..... > 35

$$\vec{r}(\varphi) = \left(R \cdot \varphi - \frac{R}{2} \sin \varphi, R - \frac{R}{2} \cos \varphi \right) = R \left(\varphi - \frac{\sin \varphi}{2}, 1 - \frac{\cos \varphi}{2} \right) \quad \text{Zykloide}$$

In einem homogenen Kraftfeld $\vec{F} = (-3N, 2N)$ wird ein Körper längs des gezeichneten Kreisbogens von $\vec{p}_1 = (2m, 0)$ nach $\vec{p}_2 = (0, 2m)$ gebracht.

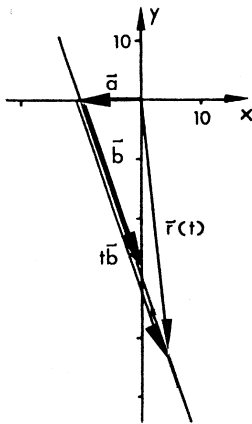
Welche Arbeit ist erforderlich?

$$W = \dots\dots\dots$$



..... > 56

14



Gegeben ist die Gerade. Bekannt ist die Vektorschreibweise

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$$

Bedeutung: Der Ortsvektor zu jedem Punkt der Geraden kann wie in der Zeichnung aus zwei Vektoren zusammengesetzt werden:

- Vektor vom Nullpunkt zu *einem Punkt* der Geraden: \vec{a}
- Vektor in *Richtung* der Geraden: $t \cdot \vec{b}$

In der Zeichnung ist $\vec{a} = (-10, 0)$ und $\vec{b} = (10, -30)$.

Wir schreiben die Vektorgleichung mit \vec{a} und \vec{b} komponentenweise hin: $x = -10 + 10t$ und $y = -30t$.

Wenn wir noch den Parameter t eliminieren, so erhalten wir:

$y = \dots\dots\dots$

----- > 15

35

$$W = q \int_{y_1}^{y_2} E \, dy = q E (y_1 - y_2)$$

Der entscheidende Übergang war hier, daß wir dr durch dy ausdrücken konnten und wir dann ein Integral über die Variable y erhielten. Für y sind die Grenzen gegeben gewesen. Die physikalische Bedeutung unseres Ergebnisses ist, daß die Arbeit nicht von dem Weg selbst abhängt, sondern nur von den y -Koordinaten der Endpunkte.

----- > 36

56

$$W = -3(0 - 2) \text{ Nm} + 2(2 - 0) \text{ Nm} = 10 \text{ Nm}$$

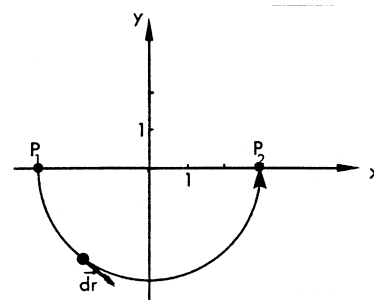
Hinweis: Bei homogenen Kraftfeldern ist die Arbeit unabhängig vom Weg.

Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{F} = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ N}$

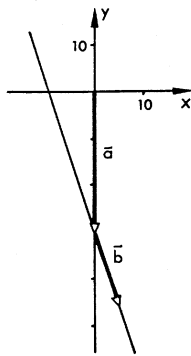
Ein Körper mit der Masse m werde auf einem Kreisbogen bewegt von $\vec{p}_1 = (-3\text{m}, 0)$ nach $\vec{p}_2 = (3\text{m}, 0)$.

Die geleistete Arbeit ist: $W = \dots\dots\dots$

Hinweis: Struktur des Feldes beachten.



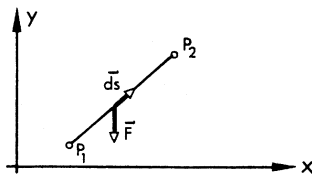
----- > 57

Ja $y = -3x - 30$ Die Wahl der Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist an zwei Punkten frei:

- Der Vektor \vec{a} muß vom Nullpunkt zu *einem* Punkt der Gerade führen, zu *welchem* ist beliebig.
- der Vektor \vec{b} muß in *Richtung* der Geraden liegen. Sein *Betrag* ist beliebig.

Auch die links skizzierte Wahl von $\vec{a} = (0, -30)$ und $\vec{b} = (5, -15)$ ist möglich. Schreiben wir dafür die Vektorgleichung komponentenweise auf:

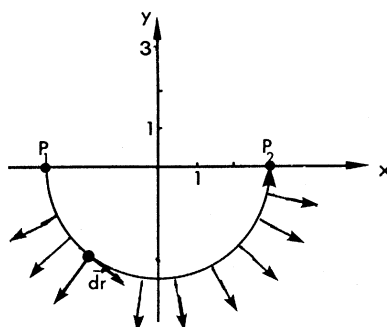
$$x = 5t \quad y = -30 - 15t$$

Setzen Sie $t = \frac{x}{5}$ in die Gleichung für y ein. $y = \dots\dots\dots$ > 16Hier noch ein Beispiel zum homogenen Feld. Beachten Sie, daß die Variable hier nicht r genannt wird sondern s .Ein Gegenstand soll auf der Linie K von P_1 nach P_2 gebracht werden. Auf den Körper wirke die Kraft

$$\vec{F} = (F_x, F_y) = (0, -m \cdot g) = 0 \cdot \vec{e}_x - m g \vec{e}_y$$

Hinweis: Hier wird über den Weg s integriert. Das ist das Neue. Die Variable ist s .Das Wegelement \vec{ds} in Komponentendarstellung: $\vec{ds} = (dx, dy)$. Die Entfernung $\overline{P_1 P_2}$ sei S .

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \dots\dots\dots$$
 > 37

 $W = 0$ Hinweis: Es handelte sich um ein radialsymmetrisches Feld und einen Weg auf einem Kreisbogen. Die Masse m spielt überhaupt keine Rolle.

> 58

$$y = -3x - 30$$

Hinweis: Wir haben die gleiche Gleichung erhalten.

Handlungsanweisung für die Bestimmung einer Parameterdarstellung für eine Gerade:

1. Schritt: Suche einen Vektor \vec{a} vom Nullpunkt zu einem Punkt der Geraden.
2. Schritt: Suche einen Vektor \vec{b} in Richtung der Geraden – seine Länge spielt keine Rolle.
3. Schritt: Bilde $\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$. Wenn t von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert wird, tastet die Spitze des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ jeden Punkt der Geraden ab.
4. Schritt: Schreibe die Vektorgleichung komponentenweise hin

$$x(t) = a_x + t b_x$$

$$y(t) = a_y + t b_y$$

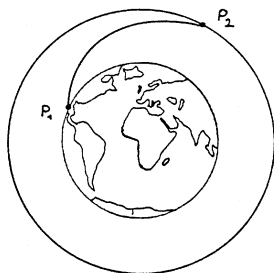
----- > 17

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Dann können wir zur Komponentendarstellung übergehen:

$$W = \dots\dots\dots$$

----- > 38



Zum Schluß noch eine etwas komplexere Aufgabe.

Die Zeichnung stellt die Erde und die Bahn eines Satelliten dar. Auf dem eingezeichneten Weg soll der Satellit vom Startpunkt P_1 auf die Kreisbahn (Radius R_2) gebracht werden.

Im Punkt P_2 möge er seine Bahn erreicht haben.

Abstand des Satelliten vom Erdmittelpunkt sei R .
Erdradius sei R_1 .

Wie groß ist die potentielle Energie W , die dem Satelliten dabei zugeführt wird?

Hinweis: Ein Ausdruck für die Schwerkraft ist: $F = m \cdot g \left(\frac{R_1}{R}\right)^2$ $W = \dots\dots\dots$

Lösung ----- > 63

Erläuterung und Hilfe ----- > 59

Rechnen Sie in den nächsten Tagen die Übungsaufgaben 16.1 auf Seite 77 im Lehrbuch. Sie sollten alle Übungsaufgaben 16.1 rechnen. Sie sind nicht schwer und erfordern mehr Überlegung als Rechenaufwand.

----- ▷ 18

$$W = \int_{x_1}^{x_2} 0 \cdot dx - \int_{y_1}^{y_2} m \cdot g \cdot dy$$

Das erste Integral verschwindet. Damit hat man:

$$W = - \int_{y_1}^{y_2} mg \, dy = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 39

Formuliert man die Fragestellung um, so läßt sich das Problem in eine Form bringen, in der es anderen Problemen ähnelt, die in diesem Leitprogramm behandelt wurden.

Gesucht ist die Arbeit, die notwendig ist, um den Satelliten gegen die Schwerkraft vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 zu bringen.

Hinweis: Gefragt ist hier nur nach der potentiellen Energie, nicht nach der kinetischen Energie, die dem Satelliten für eine Bewegung auf der Kreisbahn zugefügt werden muß.

In diesem Kapitel haben Sie gelernt, diese Arbeit als Linienintegral zu berechnen.

Wie lautet das allgemeine Linienintegral?

$$W = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 60

Differentiation eines Vektors nach einem Parameter.

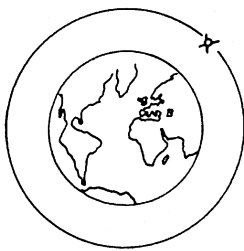
Wir haben bisher den Ortsvektor für eine beliebige Bahnkurve so beschrieben, daß wir die Koordinaten des Vektors als Funktion einer dritten Größe – des Parameters – dargestellt haben. Der Parameter kann die Zeit sein. Nun wird gezeigt werden, daß wir von dieser Darstellung sofort zur Ermittlung der Geschwindigkeit kommen, indem wir nach der Zeit differenzieren.

STUDIERN SIE im Lehrbuch

16.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter
Lehrbuch, Seite 68-70

-----▷ 19

$$W = mg(y_1 - y_2)$$



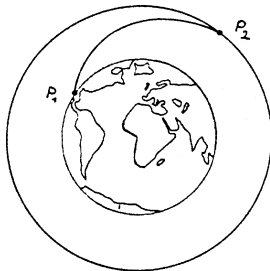
Ein Satellit bewege sich auf einer kreisförmigen Bahn um die Erde. Die Arbeit für eine Erdumrundung ist

$$W = \int_{\text{Kreis}} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

Die Arbeit verschwindet, weil

\vec{F} und \vec{ds}
aufeinander stehen.

-----▷ 40



$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

Wir erinnern uns, daß das Gravitationsfeld radialsymmetrisch ist.

Weiter hängt der Wert des Integrals $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}$

von den Endpunkten P_1 und P_2 des Integrationsweges ab, nur nicht von seinem Verlauf.

Versuchen Sie jetzt die Arbeit zu berechnen. $W = \dots\dots\dots$

Lösung

-----▷ 63

Benötige weitere Hilfe

-----▷ 61

Hinweis: $F = m \cdot g\left(\frac{R_1}{R}\right)^2$

Kennen wir die Koordinaten eines Punktes als Funktion der Zeit, so können wir unmittelbar die Geschwindigkeit für die Koordinaten berechnen.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung für den schiefen Wurf nach oben (Wurfwinkel = α).

$$\vec{r}(t) = (v_o \cdot \cos \alpha \cdot t, \quad v_o \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2)$$

$$\vec{v}(t) = \dots\dots\dots$$

$$\vec{a}(t) = \dots\dots\dots$$

----- > 20

Senkrecht

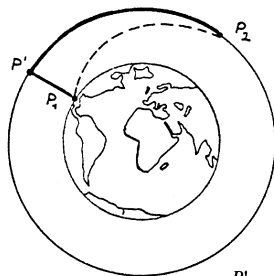
Im letzten Beispiel handelte es sich um den Sonderfall radialsymmetrisches Feld, kreisförmiger Weg.

Rechnen Sie jetzt die Übungsaufgaben 16.3.1 auf Seite 77 im Lehrbuch. Die Lösungen finden Sie im Lehrbuch auf den Seiten 78 und 79.

Hinweis für Aufgabe C: Ermitteln Sie aufgrund des Kapitels 13 „Funktionen mehrerer Veränderlicher“ welcher Typ eines Vektorfeldes hier vorliegt.

Dann ist die Aufgabe sofort zu lösen.

----- > 41



Der Wert des Integrals hängt nur von den Endpunkten P_1 und P_2 ab. Der Weg ist beliebig.

Ein geschickt gewählter Weg besteht aus zwei Teilstücken

- a) einem radialen Wegstück von P_1 nach P' und
- b) einem Stück auf der Kreisbahn von P' nach P_2 .

Die Arbeit ist dann $W = \int_{P_1}^{P'} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{P'}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$. Hinweis: $F = m \cdot g \cdot \frac{R_1^2}{R^2}$.

Berechnen Sie nun die beiden Integrale: $W = \dots\dots\dots$

Lösung

----- > 63

Weitere Hilfe erwünscht

----- > 62

$$\vec{v}(t) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha - gt)$$

$$\vec{a}(t) = (0, -g)$$

Hinweis: Die Beschleunigung ist die Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit. Wir mußten den Ortsvektor zweimal differenzieren.

Ein Punkt bewege sich auf einer Geraden. Die Bewegung wird beschrieben durch:

$$x = -10 \text{ cm} + 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \cdot t$$

$$y = -30 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \cdot t$$

Wie groß ist der Betrag der Geschwindigkeit des Punktes? $v = \dots\dots\dots$

Lösung ▷ 24

Erläuterung oder Hilfe ▷ 21

Der Begriff des Linienintegrals hilft, bestimmte physikalische Problemstellungen zu beschreiben. Wichtig sind vor allem die besprochenen Sonderfälle.

homogenes Feld	beliebiger Weg
radialsymmetrisches Feld	radialer Weg
radialsymmetrisches Feld	kreisförmiger Weg
ringförmiges Feld	kreisförmiger Weg

Versuchen Sie immer, das Problem auf einen dieser Spezialfälle zurückzuführen.

Nun könnten Sie denken, die Mathematiker könnten das Linienintegral nur für Sonderfälle berechnen. Dem ist nicht so. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß die Berechnung des Linienintegrals im allgemeinen Fall durchgeführt werden kann.

..... ▷ 42

Das zweite Integral verschwindet, denn \vec{F} und \vec{ds} stehen auf dem Kreisbogen

von P' bis P_2 senkrecht aufeinander. $\int_{P'}^{P_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0$

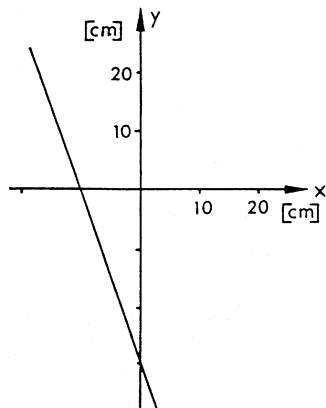
Um das erste Integral zu berechnen, muß man nun die Kraft einsetzen, mit der der Satellit gegen die Schwerkraft bewegt wird. Diese Kraft zeigt in radialer Richtung und hat den

Betrag $F = mg \frac{R_1^2}{R^2}$

R_1 ist dabei der Erdradius, R der Abstand vom Erdmittelpunkt. Da \vec{F} und \vec{ds} auf dem radialen Wegstück parallel sind, gilt:

$$\int_{P_1}^{P'} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{R_1}^{R_2} F dR = \int_{R_1}^{R_2} mg \frac{R_1^2}{R^2} dR \quad \text{Also ist: } W = \dots\dots\dots \text{} \triangleright 63$$

21



Gegeben sind die Bahngleichungen in Parameterdarstellung

$$x = -10\text{cm} + 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \cdot t \quad y = -30 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \cdot t$$

Hinweis: Bei der Angabe einer Geschwindigkeit müssen auch die Maßeinheiten mitgenannt werden. Hier wird die Zeit in sec und der Weg in cm angegeben. x und y sind Längenangaben.

Kontrollieren Sie, daß dies für die beiden Gleichungen erfüllt ist.

-----▷ 22

42

Berechnung des Linienintegrals im allgemeinen Fall

Nur wenige können die Umformungen im Kopf nachvollziehen. Den meisten hilft es, auf einem Zettel mitzurechnen.

STUDIERN SIE im Lehrbuch

16.3.2 Berechnung des Linienintegrals im allgemeinen Fall

Lehrbuch, Seite 75 - 76

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt

-----▷ 43

63

$$W = mg R_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2}$$

$$W = mg R_1^2 \left[-\frac{1}{R} \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$W = mg R_1^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



Sie haben das



des Kapitels erreicht.