

## Kapitel 17

### Oberflächenintegrale

---

**Der Vektorfluß durch eine Fläche**

Dieses Kapitel setzt voraus, daß Sie das Kapitel 13 bearbeitet haben. Funktionen mehrerer Variablen, skalare Felder und Vektorfelder müssen Ihnen bekannt sein. Auch eine kurze Wiederholung des Kapitels 13 könnte für Sie nützlich sein.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

17.1 Der Vektorfluß durch eine Fläche

Lehrbuch, Seite 80 - 82

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

----- ▷

Leider falsch!



Suchen Sie sich aus dem Lehrbuch die Konvention über die Richtung der Flächenvektoren für den Fall geschlossener und nichtgeschlossener Flächen heraus und notieren Sie sich diese.

Die orientierten Flächenelemente stehen

- a) senkrecht auf der Oberfläche
- b) zeigen bei geschlossenen Flächen *immer* nach .....

----- ▷ 23

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint \frac{dA}{r^2} = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{R^2} = 4\pi$$

Gegeben ist ein radialsymmetrisches Kraftfeld  $\vec{F}(r)$ :

$$\vec{F}(r) = \frac{a}{r^3} \vec{e}_r \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Wie groß ist der Fluß des Kraftfeldes  $\vec{F}(r)$  durch eine Kugelfläche, die den Abstand  $R$  vom Kraftzentrum hat (das Kraftzentrum liegt bei  $r = 0$ )?

Lösung gefunden

----- ▷ 45

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

----- ▷ 44

2

In Abschnitt 17.1 wurden mehrere neue Begriffe definiert.

Welche waren es? An vier von ihnen sollten Sie sich erinnern. Schreiben Sie sie auf:

1. ....

2. ....

3. ....

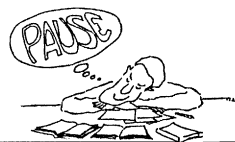
4. ....

----- ▷ 3

23

außen

Dies war die Konvention: Die Richtung der orientierten Flächenelemente steht senkrecht zum Flächenelement und zeigt bei geschlossenen Flächen nach außen.



----- ▷ 24

44

Das Kraftfeld ist  $F(r) = \frac{a}{r^3} \cdot \vec{e}_r$  mit  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$

Gesucht  $\oint \vec{F} d\vec{A}$

1. Hinweis: Es handelt sich um ein radialsymmetrisches Feld der Form  $\vec{F} = f(r) \cdot \vec{e}_r$ .

2. Hinweis:  $\oint \vec{F} d\vec{A}$  für den obigen Fall ist allgemein gegeben auf Seite 87 des Lehrbuches.

$\oint \vec{F} \cdot d\vec{A} = \dots\dots\dots$

----- ▷ 45

3

Stromdichte  $\vec{j}$ Strom  $I$ Vektoriellcs Flächenelement  $\vec{A}$ Fluß eines homogenen Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch eine Fläche  $\vec{A}$ .

Versuchen Sie zunächst aus dem Gedächtnis, dann anhand Ihres Exzerptes die Bedeutungen und Definitionen sinngemäß zu reproduzieren.

Schreiben Sie Bedeutungen und Definitionen auf einen Zettel und bearbeiten Sie erst dann

----- ▷ 4

24

### Berechnung des Oberflächenintegrals für Spezialfälle

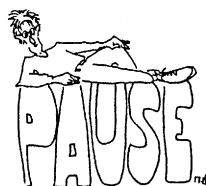
#### Der Fluß eines homogenen Feldes durch einen Quader

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 17.3.1 Der Fluß eines homogenen Feldes  
durch einen Quader  
Lehrbuch, Seite 85 - 86

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ----- ▷ 25

45

$$\oint \frac{a}{r^3} \vec{e}_r d\vec{A} = \oint f(r) \vec{e}_r d\vec{A} = 4\pi R^2 \cdot f(R) = 4\pi R^2 \cdot \frac{a}{R^3} = \frac{4\pi a}{R}$$



----- ▷ 46

4

*Stromdichte  $j$*  : Der Betrag von  $j$  gibt die durch eine Querschnittsfläche  $A$  hindurchfließende Menge pro Zeiteinheit und Querschnittsfläche an:

$$j = \frac{\text{Menge}}{\text{Zeit} \times \text{Querschnittsfläche}}$$

*Strom  $I$* : Er ist die durch einen Querschnitt hindurchfließende Menge pro Zeit.

*Vektorieller Flächenelement*:  $\vec{A}$  ist ein Vektor, der senkrecht auf der Fläche steht und dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt  $\vec{A}$  ist.

*Fluß eines homogenen Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch eine Fläche  $\vec{A}$*  ist gegeben durch  $\vec{F} \cdot \vec{A}$ .

----- &gt; 5

25

Entscheiden Sie bei den folgenden Vektorfeldern, ob sie homogen oder inhomogen sind. Falls Sie die Definition des homogenen Vektorfeldes nicht sicher erinnern, wiederholen Sie die Definition, indem Sie im Register die Seitenzahlen ermitteln und nachlesen.

homogenes Vektorfeld

ja                      nein

1.  $\vec{F} = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}$

☐☐

2.  $\vec{F} = (1, 0, x)$

☐☐

3.  $\vec{F} = (y, z, x)$

☐☐

4.  $\vec{F} = (6, 3, 5)$

☐☐

5.  $\vec{F} = (2, 0, 0)$

☐☐

----- &gt; 26

46

### Die Berechnung des Oberflächenintegrals im allgemeinen Fall

Im Abschnitt 17.4 wird beschrieben, wie das Oberflächenintegral im allgemeinen Fall berechnet wird. Dieser Abschnitt ist etwas formal und schwieriger. Dennoch lohnt es sich, den Abschnitt zu bearbeiten, wenn Sie nicht gerade unter Zeitdruck stehen oder mit dem Lehrstoff große Schwierigkeiten haben. Aber entscheiden Sie selbst.

Möchte den Abschnitt 17.4 überschlagen und sofort weitergehen ----- > 54

Möchte den Abschnitt 17.4 studieren. Dann

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

17.4 Die Berechnung des Oberflächenintegrals im  
allgemeinen Fall  
Lehrbuch, Seite 88 - 91

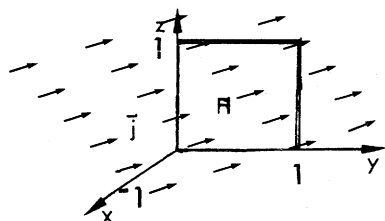
BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

----- &gt; 47

5

Gesucht ist der Fluß eines Vektorfeldes durch eine ebene quadratische Fläche mit dem Flächeninhalt  $A$ . Die Fläche  $\vec{A}$  liege in der  $y$ - $z$ -Ebene. Die Flüssigkeitsströmung treffe in einem Winkel  $\beta$ ,  $\beta < \frac{\pi}{2}$ , auf die Fläche.

Der überall konstante Stromdichtevektor sei  $\vec{j} = (-j_x, j_y, 0)$



Wir zerlegen die komplexe Aufgabe in Teilaufgaben.

1. Wir bestimmen zuerst  $\vec{A}$  mit  $|\vec{A}| = A$

2. Wir berechnen den Fluß  $\vec{j} \cdot \vec{A}$ .

Der Fluß beträgt  $I = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden

----- > 11

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

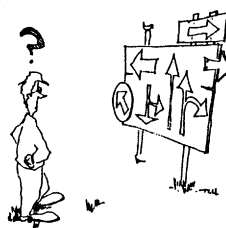
----- > 6

26

$F$  homogen:

ja nein

- |    |                                     |                                     |
|----|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 2. | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 3. | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 4. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| 5. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |



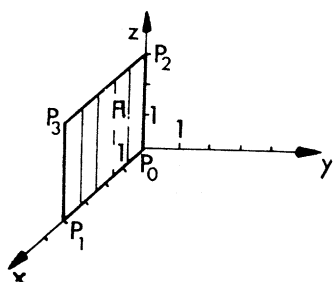
keine Fehler gemacht

----- > 30

Fehler gemacht

----- > 27

47



Eine rechteckige Fläche  $A$  sei gegeben durch die Punkte  $P_0 = (0, 0, 0)$ ,  $P_1 = (4, 0, 0)$  und  $P_3 = (4, 0, 3)$ . Das nichthomogene Vektorfeld sei gegeben durch  $\vec{F} = (0, 2x, 0)$ .

Berechnen Sie  $\int_A \vec{F} d\vec{A} = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden

----- > 53

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

----- > 48

6

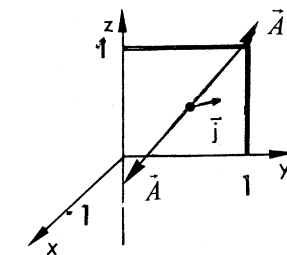
Beginnen wir mit der Bestimmung des vektoriellen Flächenelementes  $\vec{A}$ .

Wir beachten, daß die quadratische Fläche in der  $z$ - $y$ -Ebene liegt. Also hat  $\vec{A}$  die Richtung der  $x$ -Achse.

$$\vec{A} = A(+1, 0, 0) \quad \text{oder} \quad \vec{A} = A(-1, 0, 0)$$

Die Richtung von  $\vec{A}$  legen wir so fest, daß sie mit  $\vec{j}$  einen Winkel einschließt, der kleiner ist als  $\frac{\pi}{2}$ .

Also gilt für  $\vec{A}$ :  $\vec{A} = \dots\dots\dots$



7

27

Es ist in diesem Fall zweckmäßig, den Abschnitt über *homogene Vektorfelder* zu wiederholen. Die Aufgaben war nur mit Verständnis zu lösen. Rechenfehler sind nicht gut möglich.

1. Im Register das Stichwort *homogene Vektorfelder* suchen (Vektorfelder, homogene)
2. Nachlesen und danach ankreuzen.

	homogen	nicht homogen
1. $\vec{F} = \frac{(1, 2, 3)}{x^2 + y^2 + z^2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. $\vec{F} = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. $\vec{F} = (1, 0, 0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. $\vec{F} = (x, 0, 0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. $\vec{F} = (1, 1, 1)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

28

48

Hier handelt es sich um ein inhomogenes Feld, das – und damit wird die Sache einfacher – nur eine Komponente in  $y$ -Richtung hat. Das Feld ändert sich in  $x$ -Richtung wegen  $\vec{F} = (0, 2x, 0)$ .

Um  $I = \int_A \vec{F} d\vec{A}$  zu erhalten, gehen wir systematisch vor und bestimmen  $\vec{F}$  und  $d\vec{A}$

$$\vec{F} = \dots\dots\dots$$

$$d\vec{A} = \dots\dots\dots$$

$$I = \dots\dots\dots$$

Hilfe und Erläuterung

49

Lösung

51

7

$$\vec{A} = A(-1, 0, 0)$$

Alles klar	----- >	9
Weitere Erläuterung	----- >	8

28

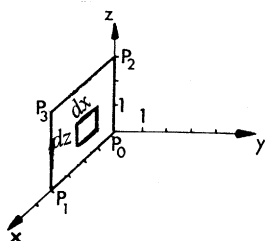
	homogen	nicht homogen
1.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
3.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
5.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Alles richtig	----- >	30
Noch Fehler gemacht	----- >	31

49

Die Teilaufgabe war,  $\vec{F}$  und  $d\vec{A}$  zu bestimmen für den Ausdruck  $I = \int_A \vec{F} \cdot d\vec{A}$

Schwierigkeiten kann es geben bei der Bestimmung von  $d\vec{A}$ . Die Fläche A liegt in der x-z-Ebene und das vektorielle Flächenelement zeigt demzufolge in die y-Richtung.



Ein differentielles Flächenelement ist für kartesische Koordinaten hier gegeben durch  $|d\vec{A}| = dx \cdot dz$ .  
 Vektoriell geschrieben erhalten wir dann ein vektorielles Flächenelement in y-Richtung mit dem Betrag  $dx \cdot dz$  also:  
 $d\vec{A} = ( \dots\dots\dots )$

$\vec{F}$ ist bereits in der Aufgabe gegeben worden zu $\vec{F} = (0, 2x, 0)$	----- >	50
---	---------	----

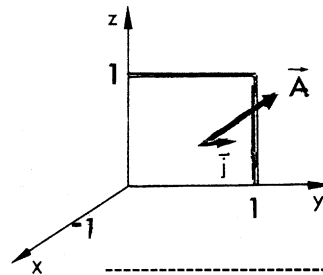


8

Die Fläche liegt in der  $z$ - $y$ -Ebene. Die gerichtete Fläche  $\vec{A}$  hat nur eine Komponente in  $x$ -Richtung. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:  $\vec{A} = A(1, 0, 0)$  oder  $\vec{A} = A(-1, 0, 0)$ . Weiter müssen wir die Konvention berücksichtigen, daß  $\vec{A}$  mit  $\vec{j}$  bis auf einen Winkel übereinstimmt, der kleiner ist als  $\frac{\pi}{2}$ .

In unserer Aufgabe ist die  $x$ -Komponente von  $\vec{j}$  negativ. Also zeigt auch  $\vec{A}$  in Richtung der negativen  $x$ -Achse.

Also gilt  $A = (-1, 0, 0)$



9

29

Haben Sie wirklich über das Register das Stichwort *Vektorfelder, homogene* gesucht?

Aber wie auch immer – jetzt ist es wirklich notwendig, die Aufgaben in Lehrschritt 25 und 27 anhand des Lehrbuchabschnittes über homogene Vektorfelder, zu lösen.

30

50

$$\vec{F} = (0, 2x, 0)$$

$$d\vec{A} = (0, dx dz, 0)$$

Zu bestimmen war der Strom  $I = \int_A \vec{F} \cdot d\vec{A}$ .

Setzen Sie ein und rechnen Sie unter dem Integral das Skalarprodukt aus

$$I = \int_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_A (0, 2x, 0) \cdot (0, dx dz, 0) = \int_A \dots\dots\dots$$

51

9

Wir hatten den Flächenvektor  $\vec{A}$  bestimmt:

$$\vec{A} = A(-1, 0, 0)$$

Jetzt können wir den Fluß  $I$  von  $\vec{j}$  durch die Fläche  $\vec{A}$  bestimmen.

$$\vec{j} = (-j_x, j_y, 0)$$

$$I = \vec{j} \cdot \vec{A} = \dots\dots\dots$$

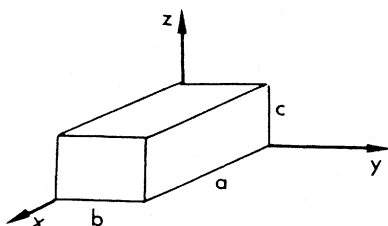
Lösung gefunden ..... ▷ 11

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ..... ▷ 10

30

Sehr gut so!

Wie groß ist der Fluß des Feldes  $\vec{F}(x, y, z) = (1, 4, 3)$  durch einen Quader, dessen Seitenkanten parallel an den Koordinatenachsen liegen?



Fluß  $I$  des Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch den Quader:  
 $I = \dots\dots\dots$

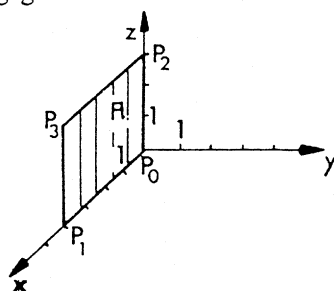
Lösung ..... ▷ 32

Hilfe und Erläuterung ..... ▷ 31

51

$$\int_A \vec{F} d\vec{A} = \int_A 2x dx dz$$

Es handelt sich hier um ein für die Fläche  $A$  auszuführendes Integral. Es ist korrekt geschrieben ein Doppelintegral. Setzen Sie die Grenzen ein, die durch unsere Fläche  $A$  gegeben sind.



$$\int_A 2x dx dz = \int_{x=\dots}^{\dots} \int_{z=\dots}^{\dots} 2x dx dz$$

..... ▷ 52

10

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  und  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  ist definiert durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Damit wird

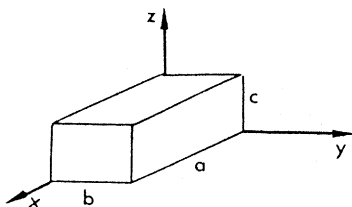
$$\vec{j} \cdot \vec{A} = (-j_x, j_y, 0) \cdot (-A, 0, 0) = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 11

31

Hinweis:  $\vec{F} = (1, 4, 3)$  Dies ist ein homogenes Vektorfeld und damit gilt die Regel 17.7 auf Seite 86 des Lehrbuches.

Wie groß ist der Fluß des Feldes  $\vec{F}(x, y, z) = (1, 4, 3)$  durch einen Quader, dessen Seitenkanten parallel an den Koordinatenachsen liegen?



$$I = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 32

52

$$\int_A 2x \, dx \, dz = \int_{x=0}^4 \int_{z=0}^3 2x \, dx \, dz$$

Das Doppelintegral können Sie lösen. Sie haben dies in Kapitel 15 in Abschnitt 15.6 gelernt. Notfalls dort nachsehen.

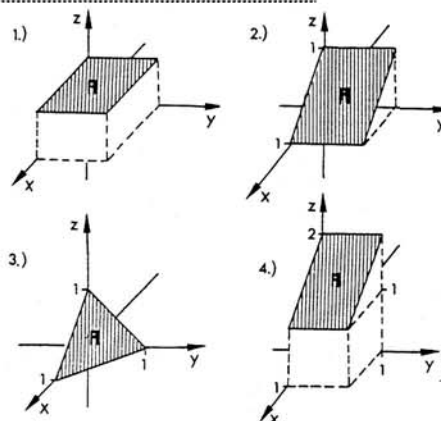
$$I = \int_A 2x \, dx \, dz = \int_{x=0}^4 \int_{z=0}^3 2x \, dx \, dz = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 53

11

$$I = j_x \cdot A$$

Die Begriffe  
„vektorielles Flächenelement“,  
„Flächenvektor“,  
„orientierte Fläche“  
sind gleich-bedeutend. Geben Sie  
die Flächenvektoren zu den vier  
Flächen an. Flächeninhalt  $A$ .



12

32

$$I = 0$$

Für welche Fläche hat der Fluß des homogenen Feldes  $\vec{F} = (0, 1, 0)$  einen von Null  
verschiedenen Wert. Die Flächen sind geschlossen.

Kreuzen Sie an:

Quader



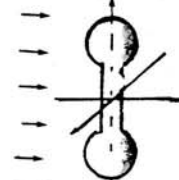
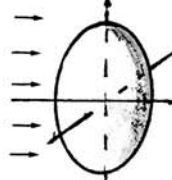
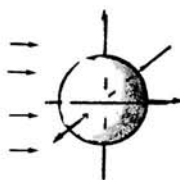
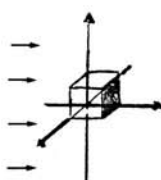
Kugel



Ellipsoid



Hantel



33

53

$$I = \int_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = 48$$

Ganz herzlichen Glückwunsch, daß Sie sich durch diese etwas schwierigen Überlegungen  
hindurchgearbeitet haben.



54

12

Es gibt jeweils zwei Lösungen, die sich durch das Vorzeichen unterscheiden. Hier ist kein Vektorfeld vorgegeben, das die Richtung bestimmt hätte.

1.  $\vec{A} = A(0, 0, 1)$                       oder                       $\vec{A} = A(0, 0, -1)$
2.  $\vec{A} = \frac{A}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$                       oder                       $\vec{A} = \frac{A}{\sqrt{2}}(-1, 0, -1)$
3.  $\vec{A} = \frac{A}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$                       oder                       $\vec{A} = \frac{A}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$
4.  $\vec{A} = \frac{A}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$                       oder                       $\vec{A} = \frac{A}{\sqrt{2}}(-1, 0, -1)$

Alles richtig gemacht ..... ▷ 16

Noch Fehler gemacht oder Erläuterung gewünscht ..... ▷ 13

33

Für keine Fläche. Der Fluß verschwindet in *allen* Fällen. Das Vektorfeld ist homogen, die Flächen sind geschlossen.

Verschwindet der Fluß des Feldes  $\vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  durch eine Kugeloberfläche?

☐ ja                      ☐ nein

Lösung gefunden ..... ▷ 36

Hilfe und Erläuterung ..... ▷ 34

54

### Fluß des elektrischen Feldes einer Punktladung durch eine Kugeloberfläche mit Radius $R$ .

Hier wird die Anwendung von Abschnitt 17.3.2 auf ein physikalisches Problem dargestellt.

STUDIERN SIE im Lehrbuch

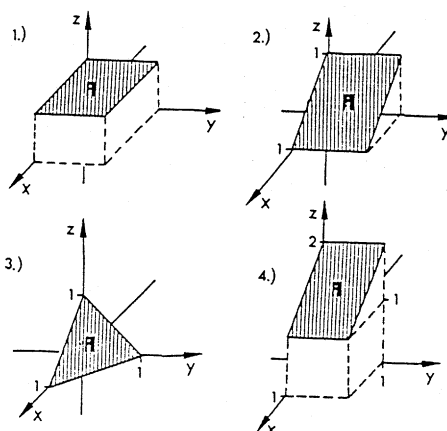
17.5 Fluß des elektrischen Feldes einer Punktladung  
durch eine Kugeloberfläche mit Radius  $R$   
Lehrbuch, Seite 92

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ..... ▷ 55

$\vec{A}$  muß senkrecht auf  $A$  stehen.  
Also suche man zunächst einen beliebigen Vektor, der senkrecht auf der Fläche steht.

$a =$  unbestimmte Konstante.

1.  $\vec{A} = a(0, 0, 1)$
2.  $\vec{A} = a(1, 0, 1)$
3.  $\vec{A} = a(\dots\dots\dots)$
4.  $\vec{A} = a(\dots\dots\dots)$

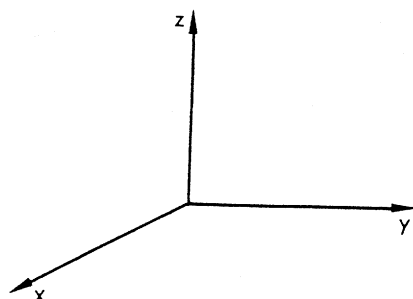


13

-----▷ 14

Die Kugeloberfläche ist geschlossen.

Gegeben ist das Vektorfeld  $\vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ . Es ist nicht homogen.



Zeichnen Sie die Vektoren des Vektorfeldes  $\vec{F}$  entlang der Achsen in das Koordinatensystem.

-----▷ 35

55

Hier ist wenig abzufragen.

Die Rechnung in 17.5 erklärt sich selbst. Hier liegt einer der Fälle vor, daß durch das Einsetzen der physikalischen Größen die Ausdrücke einfacher werden.

Das ist kein Zufall.

Bei der Definition der physikalischen Größen ist das in diesem Fall beabsichtigt gewesen.

-----▷ 56

14

1.  $\vec{A} = a(0, 0, 1)$

2.  $\vec{A} = a(1, 0, 1)$

3.  $\vec{A} = a(1, 1, 1)$

4.  $\vec{A} = a(1, 0, 1)$

$\vec{A}$  muß den Betrag  $A$  haben:  $|\vec{A}| = A$ .

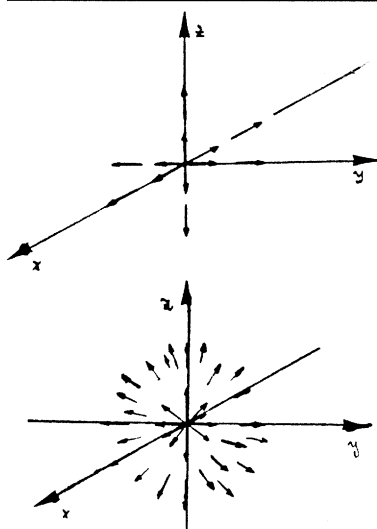
Dafür muß  $a$  jeweils geeignet gewählt werden. Für die erste Aufgabe ist unmittelbar klar, daß gilt:  $\vec{A} = A(0, 0, 1)$  also ist  $a = 1$ .

Für die zweite Aufgabe gilt  $\vec{A} = \frac{A}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ . Verifizierung:  $A^2 = \frac{A^2}{2}(1+1)$

Für die dritte Aufgabe gilt:  $\vec{A} = \dots (1, 1, 1)$

----- > 15

35



Mit Vektoren auch in anderen Richtungen als entlang der Achsen, sieht das Feld so aus, wie es links unten gezeichnet ist.

Denken Sie sich jetzt eine Kugel. Das Feld durchstößt die Kugel überall von innen nach außen.

Kann der Fluß durch die Kugeloberfläche verschwinden?

----- > 36

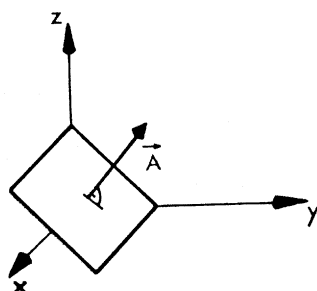
56

Vor dem Abschluß noch eine kurze Wiederholung des ganzen Kapitels.

In einem Vektorfeld  $\vec{F}$  befinde sich eine quadratische Fläche  $A$  mit dem Flächeninhalt 2.

a) Geben Sie den Flächenvektor  $\vec{A}$  an.  $\vec{A} = \dots$

b) Zeichnen Sie den Flächenvektor ein.



----- > 57

15

$$\vec{A} = \frac{A}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\text{Verifizierung: } (\vec{A})^2 = \frac{A^2}{3}(1+1+1) = A^2$$

Systematischer Lösungsweg:  $\vec{A} = a(a_x, a_y, a_z)$

$$\text{Forderung: } |\vec{A}| = A \text{ oder } (\vec{A})^2 = A^2 \quad \text{Also gilt: } A^2 = a^2(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)$$

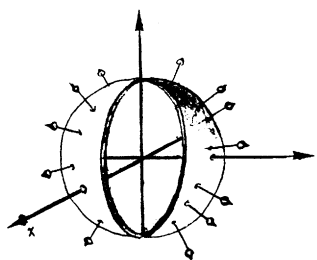
$$a = \frac{A}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Hier ist kein Vektorfeld vorgegeben, durch das die Richtung des Flächenvektors festgelegt wäre. Man kann in diesem Fall beim Flächenvektor die Vorzeichen vertauschen.

----- ▷ 16

36

NEIN.



Der Fluß von  $\vec{F} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  durch eine Kugeloberfläche verschwindet keineswegs. Überall tritt das Vektorfeld aus der Kugeloberfläche heraus.

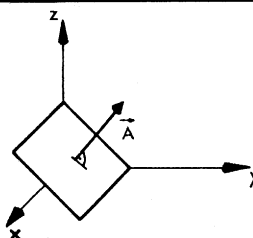
Ein Feld  $\vec{F}$  ist genau dann radialsymmetrisch, wenn es

1. ....
2. ....

Falls Sie sich nicht sicher sind, sehen Sie im Lehrbuch nach: Abschnitt 13.5.2 ----- ▷ 37

57

$$\text{a) } A = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ oder } A = \sqrt{2} (0, 1, 1) \quad \text{b)}$$



Berechnen Sie nun für diese Fläche  $A$  den Fluß  $I$  für drei Vektorfelder

$$\vec{F}_1 = (0, 6, 0) \quad I_1 = \dots\dots\dots$$

$$\vec{F}_2 = (0, 2, 1) \quad I_2 = \dots\dots\dots$$

$$\vec{F}_3 = (6, 0, 0) \quad I_3 = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 58



16

**Das Oberflächenintegral**

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 17.2 Das Oberflächenintegral  
Lehrbuch, Seite 82 - 84

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift ..... ▷ 17

37

Ein Vektorfeld ist radialsymmetrisch, wenn es

1. radiale Richtung hat und
2. sein Betrag nur von  $r$  abhängt.

Entscheiden Sie, ob folgendes Vektorfeld Radialsymmetrie hat:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Lösung gefunden ..... ▷ 40

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ..... ▷ 38

58

$$I_1 = 6 \cdot \sqrt{2}$$

$$I_2 = 3\sqrt{2}$$

$$I_3 = 0$$

Gegeben sei ein radialsymmetrisches Vektorfeld  $\vec{j}$

$|\vec{j}|$  sei konstant. Wie groß ist der Fluß  $I$  von  $\vec{j}$  durch eine Kugel mit dem Radius  $R$ ?

$$I = \dots\dots\dots$$

..... ▷ 59

17

Das folgende Integral heißt .....

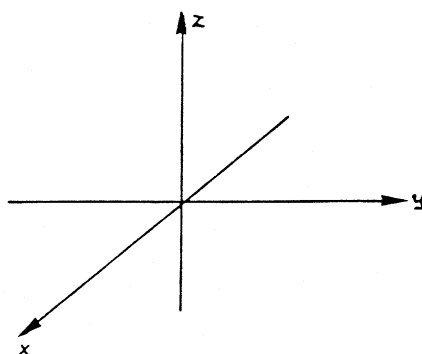
$$I = \oint \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Der Kreis in dem Integralzeichen  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{A}$  symbolisiert, daß die Integration über eine ..... Fläche erstreckt wird.

18

38

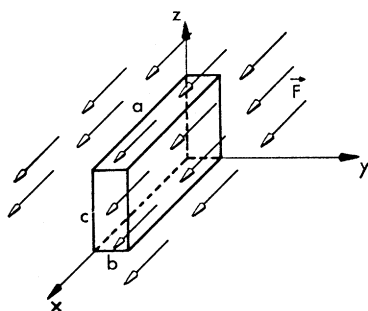
Skizzieren Sie in das Koordinatensystem auf den Koordinatenachsen einige Vektoren des Feldes  $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$



39

59

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = 4\pi R^2 |\vec{j}|$$



Wie groß ist der Fluß  $\phi$  des Vektorfeldes  $\vec{F} = (1, 0, 0)$  durch den gezeichneten Quader mit den Kanten  $a = 6$ ,  $b = 1$ ,  $c = 3$ .

$$\phi = \dots\dots\dots$$

60

18

Oberflächenintegral  
geschlossene

Geben Sie mindestens drei Beispiele für geschlossene Flächen an.

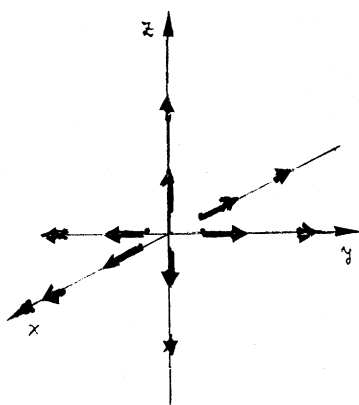
1. ....

2. ....

3. ....

----- > 19

39



So könnte Ihre Zeichnung aussehen. Die Vektoren zeigen nach außen in die Achsenrichtung

Wegen  $r^3$  im Nenner nehmen die Beträge mit dem Abstand vom Ursprung ab. Auch an Stellen, die nicht auf den Koordinatenachsen liegen, zeigen die Vektoren des Feldes  $\vec{A}$  in radialer Richtung.

Wegen  $|(x, y, z)| = r$  wird

$$|\vec{F}| = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} = \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2}$$

d.h.  $\vec{F}$  hängt nur von  $r$  ab. Somit ist das Vektorfeld  $\vec{F}$  .....

----- > 40

60

$$\phi = 0$$

Gegeben sei  $\vec{F} = (0, 5, 0, -0, 5)$

Geben Sie den Fluß an für drei Flächen.

$$\vec{A}_1 = (1, 1, 0) \quad I_1 = \dots\dots\dots$$

$$\vec{A}_2 = (1, 0, 1) \quad I_2 = \dots\dots\dots$$

$$\vec{A}_3 = (1, 1, 1) \quad I_3 = \dots\dots\dots$$

----- > 61

19

Prüfen Sie Ihre Beispiele anhand der Definition (17.5) des Lehrbuches und mit Hilfe der im Lehrbuch angeführten Beispiele.

Diese Art der Selbstkontrolle liefert Ihnen keine sichere Antwort, ob Sie den Begriff *geschlossene Fläche* richtig erfaßt haben. Man verwendet diese schwierigere und umständlichere Art der Selbstkontrolle immer dann, wenn bei Aufgaben keine Lösungen vorliegen.

Dies ist die allgemeine Situation in der Forschung und in der Praxis. Dort kann man sich auch auf keine Autorität verlassen und muß sehr, aber auch sehr genau prüfen, ob die eigenen Überlegungen korrekt sind.

----- &gt; 20

40

$F$  ist radialsymmetrisch.

Begründung:  $\vec{F} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  zeigt in radiale Richtung und  $|\vec{F}| = \frac{1}{r^2}$  hängt nur von  $r$  ab.

----- &gt; 41

61

$$I_1 = 0,5$$

$$I_2 = 0$$

$$I_3 = 0$$

Hinweis zur Arbeitstechnik Informationssuche.

In diesem Leitprogramm wiederholte sich die Aufgabe: Suchen Sie im Register ein Stichwort.

Dies ist Absicht. Registerbenutzung muß zur Gewohnheit werden. Niemand kann alles behalten – und niemand kann von allem wissen, wo es ausführlich steht.

Aber fast alles steht im Register.

Stoppen Sie einmal die Zeit, die Sie brauchen, um das Stichwort Zylindersymmetrie im Lehrbuch über das Register anzusteuern.

10 sec

20 sec

40 sec

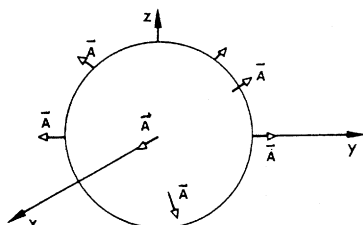
80 sec

160 sec

----- &gt; 62

20

Die Richtung des vektoriellen Flächenelementes oder der orientierten Flächenelemente ist bei geschlossenen Flächen



eindeutig definiert ----- ▷ 21

nicht eindeutig definiert ----- ▷ \*22

\*Ab Lehrschrift 22 geht es weiter auf der **Mitte der Seiten**.

Lehrschrift 22 finden Sie unterhalb Lehrschrift 1. BLÄTTERN SIE, bitte, ZURÜCK

41

**Der Fluß eines radialsymmetrischen Feldes durch eine Kugeloberfläche.**

Hier wird die Berechnung von Oberflächenintegralen radialsymmetrischer Felder über eine Kugelschale gezeigt. Das ist ein für die Physik sehr wichtiger Sonderfall.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

17.3.2 Der Fluß eines radialsymmetrischen Feldes  
durch eine Kugeloberfläche

Lehrbuch, Seite 87

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

----- ▷ 42

62

Normale Suchzeiten liegen bei 10-30 sec. Das ist nicht viel.

Wer unbekannte oder vergessene Begriffe überliest und darauf wartet, daß sie ihm später von selbst klar werden, wartet meist vergebens (Beckett hat dies gestaltet in „Warten auf Godot“).

Oft verursachen vergessene Begriffe Lernschwierigkeiten, die Sie mehr Zeit kosten, als rasch im Register nachzusehen und die Begriffskennntnis aufzufrischen. Man kann es sich angewöhnen, bei unbekannten Begriffen aufzumerken, innezuhalten und im Register oder in einem Lexikon nachzuschauen.. Es ist eine gute Angewohnheit und per saldo auch eine zeitsparende Angewohnheit.

----- ▷ 63

21

Richtig! Bei geschlossenen Flächen ist das Vorzeichen eindeutig definiert.

Bei geschlossenen Flächen ist die Richtung so festgelegt, daß die Flächenvektoren nach ..... zeigen.

----- ▷ 23

42

Berechnen Sie das Oberflächenintegral  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{A}$  des Feldes  $\vec{F} = \frac{\vec{e}_r}{r^2}$  mit  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  über eine Kugeloberfläche mit dem Radius  $R$ .

Zu berechnen ist also der Fluß von  $\vec{F}$  durch die Kugeloberfläche.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{A} = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 43

62

Die Tendenz, Unverstandenes zu überlesen ist natürlich, weit verbreitet und überlebensnotwendig. Niemand kann alles verstehen. Wenn wir aber beim Lesen nicht einmal mehr *merken*, daß uns Wörter und Begriffe unbekannt sind, kann dies sehr unerwünschte Folgen haben. Trainieren Sie daher Ihre Fähigkeit, Unbekanntes als unbekannt wahrzunehmen und bauen Sie selbst Ihre Hemmschwelle ab, Lexika, Wörterbücher und Register zu benutzen. Als Faustregel könnte während Ihres Studiums gelten, mindestens einmal am Tag ein Lexikon, Wörterbuch oder Register benutzen



Sie haben das

dieses Kapitels erreicht.