
Kapitel 18

0

Divergenz, Rotation und Potential

18 Divergenz

1

Mit der Einführung des Begriffs Divergenz schließen wir unmittelbar an das vorhergehende Kapitel 17 "Oberflächenintegrale" an. Rekapitulieren Sie, bitte, kurz den letzten Abschnitt 17.5.

STUDIEREN Sie im Lehrbuch 18.1 Divergenz eines Vektorfeldes
 18.2 Integralsatz von Gauß
 Lehrbuch Seite 95 – 99

BEARBEITEN Sie danach Lehrschrift

-----> 2

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

20

Jetzt ist die Feldstärke im Inneren der Kugel zu ermitteln.

Wir betrachten eine Kugeloberfläche im Inneren mit Radius R_{innen} ,

berechnen die eingeschlossene Ladung,

wenden den Gauß'schen Satz an und

setzen schließlich den Ausdruck für die Gesamtladung Q der ursprünglichen Kugel ein.

$$\vec{E}_{\text{innen}} = \dots\dots\dots$$

Hilfen und detaillierte Rechnung erwünscht

-----> 21

Lösung gefunden

-----> 24

$$\varphi_1 = mgz$$

$$\varphi_2 = mg(z + 10)$$

$$\varphi_3 = mg(z - 90)$$

39

Ermitteln Sie für alle drei Fälle das Gravitationsfeld \vec{F}_g .

$$\vec{F}_{g1} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{F}_{g2} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{F}_{g3} = \dots\dots\dots$$

-----> 40

\vec{F} sei ein Vektorfeld.

2

Ergänzen Sie die Definition:

$\operatorname{div} \vec{F} = \dots\dots\dots$

$\operatorname{div} \vec{F}$ ist ein $\dots\dots\dots$

-----> 3

Die Kugeloberfläche im Inneren schließt folgende Ladung ein:

21

$Q_{\text{innen}} = \dots\dots\dots$



-----> 22

$\vec{F}_{g1} = \vec{F}_{g2} = \vec{F}_{g3} = (0, 0, mg)$

40

Im Lehrbuch (Seite 108) wird das Gravitationsfeld einer Masse M betrachtet, die homogen eine Kugel mit Radius R ausfüllt. Es gilt außerhalb der Kugel:

$$\vec{F}_g(x, y, z) = -\gamma \cdot M \frac{x, y, z}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

Vereinfachen Sie mit $\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{F}_g(x, y, z) = \dots\dots\dots$

-----> 41

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

3

$\operatorname{div} \vec{F}$ ist ein Skalarfeld.

Berechnen Sie die Divergenz für das Vektorfeld

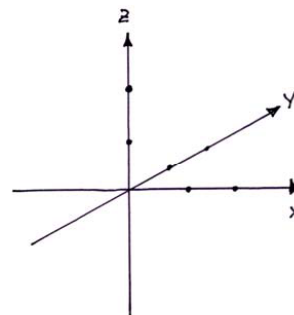
$$\vec{F} = (x, y + b, -z^2)$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \dots\dots\dots$$

Geben Sie an, wo gegebenenfalls Bereiche von Quellen und Senken liegen.

.....

.....



-----> 4

$$Q_{\text{innen}} = \int \rho dV = \frac{4\pi}{3} \cdot R_{\text{innen}}^3 \cdot \rho$$

22

Jetzt wenden wir den Gauß'schen Satz an, wobei $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

$$\oint_{\text{Oberfläche}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{Volumen}} \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV$$

Wir berechnen beide Integrale:

$$\text{a) } \oint_{\text{Oberfläche}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dots\dots\dots$$

$$\text{b) } \int_{\text{Volumen}} \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV = \dots\dots\dots$$

Eingesetzt in den Gauß'schen Satz erhalten wir: =
-----> 23

$$\vec{F}_g = -\gamma \cdot M \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\gamma \cdot M \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

41

Jetzt berechnen wir das Potential $\varphi = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ für einen Integrationsweg in radialer Richtung.

Dann gilt $\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = dr$.

$$\varphi = \gamma \cdot M \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r}{r} dr = \dots\dots\dots$$

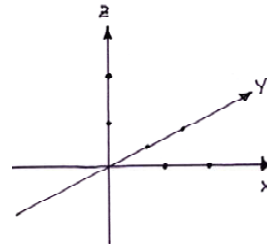
-----> 42

$$\operatorname{div} \vec{F} = (1 + 1 - 2z) = (2 - 2z) = 2(1 - z)$$

Für die Ebene $z = 1$ ist das Feld frei von Quellen und Senken.

Der Raum oberhalb dieser Ebene, $z > 1$, besteht aus Senken.

Der Raum unterhalb dieser Ebene, $z < 1$, besteht aus Quellen.



4

Alles richtig, weiter

-----> 7

Noch eine Übung mit Erläuterungen

-----> 5

$$\text{a) } \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 4\pi \cdot R_{\text{innen}}^2$$

$$\text{b) } \int \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R_{\text{innen}}^3$$

23

$$\text{Eingesetzt in den Gauß'schen Satz erhalten wir: } |\vec{E}| \cdot 4\pi \cdot R_{\text{innen}}^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R_{\text{innen}}^3$$

$$\text{Also: } |\vec{E}| = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{R_{\text{innen}}}{3}$$

Um den Vektor \vec{E} zu erhalten, muss noch die Richtung berücksichtigt werden (wieder mit $r = |\vec{r}|$):

$$\vec{E} = |\vec{E}| \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \dots\dots\dots$$

* Beachten Sie: $r = R_{\text{innen}}$

-----> 24

$$\varphi(r) = \gamma \cdot M \cdot \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = -\gamma \cdot M \left[\frac{1}{r} \right]_{r_0}^r$$

42

$$\varphi(r) = \gamma \cdot M \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right]$$

Wir können das Potential des Gravitationsfeldes der Masse M so normieren, dass es für $r \rightarrow \infty$ Null wird oder so dass es für die Oberfläche mit $r = r_{\text{Oberfläche}}$ Null wird.

Im Lehrbuch ist der erste Fall erläutert. Im Leitprogramm haben wir ein Beispiel für den zweiten Fall gerechnet.

Geben Sie das Potential an für den ersten Fall, sodass es im Unendlichen verschwindet.

$$\varphi_1 = \dots\dots\dots$$

-----> 43

Keine Quellen und Senken gibt es, wenn $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ ist.

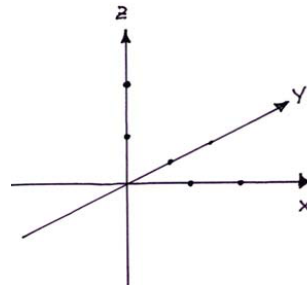
Für das vorhergehende Beispiel war das der Fall für

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2(1-z) = 0.$$

Die Gleichung $1-z=0$ oder $z=1$ beschreibt eine Ebene

parallel zur x - y -Ebene. Für $z > 1$ ist $\operatorname{div} \vec{F}$ negativ. Das besagt, dass der Raum oberhalb der Ebene $z=1$ aus Senken besteht.

Unterhalb der Ebene $z=1$ ist $\operatorname{div} \vec{F}$ positiv und dementsprechend besteht der Raum aus Quellen.



5

Berechnen Sie die Divergenz für das Vektorfeld $\vec{F} = (x^2 + 1, y, z + 5)$:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \dots\dots\dots$$

Geben Sie an, wo gegebenenfalls Quellen oder Senken liegen und wo das Feld frei von Quellen und Senken ist.

-----▷ 6

$$\vec{E}_{\text{innen}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{(x, y, z)}{3}$$

24

Zum Abschluss ersetzen wir ρ durch die Gesamtladung Q der ursprünglichen Kugel mittels der bekannten Beziehung

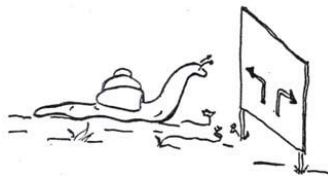
$$Q = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$\vec{E}_{\text{innen}} = \dots\dots\dots$$

-----▷ 25

$$\varphi_1 = -\gamma \cdot M \frac{1}{r}$$

43



Alles richtig

-----▷ 46

Erläuterung erwünscht

-----▷ 44

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2x + I + I = 2(x + I)$$

6

Für die Ebene $x = -1$ ist das Feld frei von Quellen und Senken.

Der Raum links von dieser Ebene, für den gilt $x < -1$, besteht aus Senken.

Der Raum rechts von dieser Ebene, für den gilt $x > -1$, besteht aus Quellen.

Weiter



-----> 7

$$\vec{E}_{\text{innen}} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3} \cdot (x, y, z)$$

25

Falls Sie Schwierigkeiten hatten, noch einmal im Leitprogramm ab Lehrschrift 9 arbeiten und dabei gegebenenfalls in das Lehrbuch schauen.



Weiter

-----> 26

$$\text{Das Potential des Gravitationsfeldes war } \varphi(r) = \gamma \cdot M \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = \gamma \cdot M \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right]$$

44

Die Forderung war $\varphi(r = \infty) = 0$

Dann muss die Klammer zu Null werden. Das erreichen wir, wenn wir setzen $\frac{1}{r_0} = 0$ oder $r_0 = \infty$.

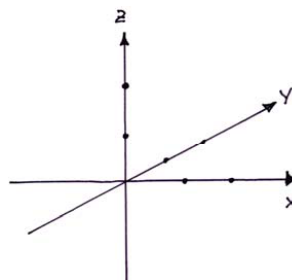
Verständnisschwierigkeiten können auftreten, weil r_0 die untere Integrationsgrenze ist und wir die untere Integrationsgrenze schlecht gegen ∞ gehen lassen können, wenn die obere Integrationsgrenze endlich bleiben soll. Das Problem löst sich auf, wenn wir die Integrationsrichtung vertauschen und von r bis r_0 integrieren.

$$\text{Dann wird } \varphi(r) = \gamma \cdot M \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = -\gamma \cdot M \int_r^{r_0} \frac{dr}{r^2} = \dots\dots\dots$$

-----> 45

Berechnen Sie die Divergenz für das Vektorfeld $\vec{F} = (x^3, y^3, -3z)$

Geben Sie an, wo gegebenenfalls
Quellen und Senken liegen.



7

.....

.....

.....

-----▷ 8

18.3 Rotation eines Vektorfeldes
18.4 Integralsatz von Stokes

26

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Rotation eines Vektorfeldes eingeführt. Bitte, rechnen Sie die Ableitungen und die Beispiele parallel auf einem Zettel mit. Gönnen Sie sich eine kleine Kaffeepause, wenn Sie den Abschnitt 18.3 geschafft haben.

STUDIEREN Sie im Lehrbuch

18.3	Rotation eines Vektorfeldes
18.4	Integralsatz von Stokes
Lehrbuch Seite 99 – 106	

Bearbeiten Sie danach Lehrschrift

-----▷ 27

$$\varphi(r) = \gamma \cdot M \left[\frac{l}{r_0} - \frac{l}{r} \right]$$

45

Jetzt können wir ohne Probleme r_0 gegen unendlich gehen lassen und erhalten wie oben

$$\varphi_1 = -\gamma \cdot M \frac{l}{r}$$

Weitere Probleme können entstehen, wenn die Vorzeichen vertauscht werden.
Bitte Vorzeichenprobleme nicht unterschätzen und sorgfältig rechnen!



-----▷ 46

$$\operatorname{div} \vec{F} = 3x^2 + 3y^2 - 3 = 3(x^2 + y^2 - 1)$$

8

Quellen und Senken verschwinden für $x^2 + y^2 = 1$.

Das ist ein Kreis mit Radius 1 unabhängig von z , also ein Zylinder um die z -Achse.

Innerhalb des Zylinders ist $\operatorname{div} \vec{F}$ negativ, der Raum also voller Senken.

Außerhalb des Zylinders ist $\operatorname{div} \vec{F}$ positiv, der Raum also voller Quellen.

-----▷ 9

Für ein wirbelfreies Vektorfeld \vec{F}_1 gilt:=.....

27

Für ein Wirbelfeld \vec{F}_2 gilt:=.....

-----▷ 28

Jetzt wollen wir den zweiten Fall behandeln und diesmal das Potential des Gravitationsfeldes für die Oberfläche der Erde gleich Null setzen.

46

$$\text{Es war } \varphi(r) = \gamma \cdot M \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right]$$

Die Höhe z über der Oberfläche ist gegeben durch $r = r_0 + z$

Damit wird $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \dots\dots\dots$$

-----▷ 47

Im Lehrbuch wird der Nabla-Operator für zwei Dimensionen in Kapitel 14, Seite 36, eingeführt. Es handelt sich um eine zunächst formale neue Schreibweise.

9

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Die Übertragung auf drei Dimensionen ist unmittelbar analog möglich. Schreiben Sie für drei Dimensionen:

$$\vec{\nabla} = \dots\dots\dots$$

-----> 10

Feld wirbelfrei: $\oint \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = 0$

Wirbelfeld: $\oint \vec{F}_2 \cdot \vec{ds} \neq 0$

28

Es ist gut, wenngleich nicht ganz einfach, die Definition der Rotation im Kopf zu haben, oder wenigstens mit der Definition $\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ rekonstruieren zu können.

$$\text{rot } \vec{F} = \dots\dots\dots$$

-----> 29

$$\varphi(r) = \gamma \cdot M \left[\frac{I}{r_0} - \frac{I}{r_0 + z} \right]$$

47

Für die Umgebung der Oberfläche gilt $z \ll r_0$ und wir können näherungsweise schreiben

$$\frac{1}{r_0 + z} = \frac{1}{r_0 \left(1 + \frac{z}{r_0} \right)} = \frac{1}{r_0} (\dots\dots\dots)$$

Dies oben eingesetzt ergibt

$$\varphi(z) = \gamma \cdot M [\dots\dots\dots]$$

-----> 48

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

10

Mit Hilfe des Nabla-Operators lassen sich der Gradient eines Skalarfeldes $f(x, y, z)$ und die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z)$ vereinfacht schreiben.

Wir beginnen mit der Bildung der Gradienten:

$$\text{grad } f(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot f(x, y, z) = \dots\dots\dots$$

-----> 11

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

29

Schreiben Sie als Determinante:

$$\text{rot } \vec{F} = \dots\dots\dots$$

-----> 30

$$\text{Näherung: } \frac{1}{r_0 \left(1 + \frac{z}{r_0} \right)} \approx \frac{1}{r_0} \left[1 - \frac{z}{r_0} \right]$$

48

$$\varphi(z) = \gamma \cdot M \frac{z}{r_0^2}$$

Für den Fall der Erde mit Masse M und Radius r_E entspricht das genau dem Potential, das wir in den Lehrschritten 38, 39 und 40 benutzt haben. Dort galt: $\varphi(z) = (0, 0, g \cdot z) = g \cdot z$

Dies ist identisch mit $\varphi(z) = \gamma \cdot M \frac{z}{r_0^2}$, wenn wir setzen

$$g = \dots\dots\dots$$

-----> 49

$$\text{grad } f(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot f(x, y, z) = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \vec{e}_z$$

11

$\vec{\nabla}$ ist ein Vektor. Hier wird das Produkt mit einem Skalar gebildet, nämlich der Funktion $f(x, y, z)$. Das Ergebnis ist, wie das Produkt eines jeden beliebigen Vektors mit einem Skalar, ein Vektor. Er ist oben einmal abgekürzt und einmal ausführlich geschrieben.

Jetzt betrachten wir die Bildung der Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z)$:

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\delta F_x}{\delta x} + \frac{\delta F_y}{\delta y} + \frac{\delta F_z}{\delta z}$$

Hier wird $\vec{\nabla}$ wieder als Vektor betrachtet und das innere Produkt aus $\vec{\nabla}$ und dem Vektor \vec{F} gebildet, der das Feld \vec{F} beschreibt. Das Ergebnis ist ein Skalar.

Bilden Sie $\vec{\nabla} \cdot \varphi(x, y, z)$ für $\varphi = (x^2 + y^2 + z^2)$: $\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \cdot \varphi = \dots\dots\dots$

Bilden Sie $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ für $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$: $\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \dots\dots\dots$

-----> 12

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

30

Multiplizieren Sie die Determinante aus und geben Sie noch einmal an:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$



-----> 31

$$g = \gamma \cdot \frac{M}{r_0^2}$$

49



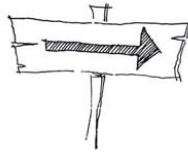
-----> 50

$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla} \cdot \varphi = (2x, 2y, 2z) = 2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z.$$

(Der Vektor $\operatorname{grad} \varphi$ kann abgekürzt oder ausführlich geschrieben werden.)

12

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2x + 2y + 2z$$



-----> 13

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

31

Das Geschwindigkeitsfeld einer Wasserströmung sei gegeben durch $\vec{v} = (1, \ln z, 0)$

Berechnen Sie:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \dots\dots\dots$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \dots\dots\dots$$

-----> 32

Zum Abschluss des Kapitels wiederholen wir noch einmal wesentliche Inhalte.

50

Geben Sie die Definition der Divergenz eines Vektorfeldes \vec{F} an:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

-----> 51

Auf S. 98 im Lehrbuch wird ein Ergebnis aus der Elektrodynamik angegeben: Für eine Kugel mit homogener Ladungsdichte ρ , der Gesamtladung Q und dem Radius R ist das elektrische Feld außerhalb der Kugeloberfläche gegeben durch:

13

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

Berechnen Sie, möglichst ohne in das Buch zu sehen, die Divergenz von \vec{E} außerhalb der Kugeloberfläche:

$\operatorname{div} \vec{E} = \dots\dots\dots$

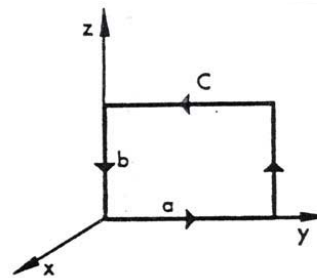
-----> 14

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{v} = \left(-\frac{1}{z}, 0, 0\right)$$

32

Nächste Aufgabe: Es sei $\vec{F}(x, y, z) = (5, 0, z^2)$
Berechnen Sie das Linienintegral längs des Rechtecks in der y - z -Ebene mit den Seiten a und b für einen vollen Umlauf.

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = \dots\dots\dots$$



-----> 33

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

51

Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F} = \left(\frac{x^3}{3}, \frac{y^3}{3}, -\frac{z^2}{2}\right)$

$\operatorname{div} \vec{F} = \dots\dots\dots$

Verteilung von Quellen und Senken:

.....
.....
.....

-----> 52

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

Bei Schwierigkeiten im Lehrbuch Seite 98, Beispiel 3, erneut studieren.

14

Im Inneren der Kugel ist das elektrische Feld gegeben durch

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} (x, y, z)$$

Berechnen Sie die Divergenz innerhalb der Kugel:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \dots\dots\dots$$

-----> 15

Man sieht sofort: Das Feld ist wirbelfrei, also ist

33

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

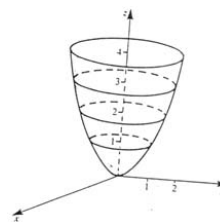
-----> 34

$$\operatorname{div} \vec{F} = x^2 + y^2 - z$$

Keine Quellen und Senken für

$\operatorname{div} \vec{F} = 0$: Das ergibt $0 = x^2 + y^2 - z$ oder $z = x^2 + y^2$. Das ist ein Rotationsparaboloid um die z-Achse.

Innen befinden sich Senken, außen Quellen.



52

Geben Sie den Gauß'schen Satz an:

.....=



-----> 53

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

15

Bei Schwierigkeit bedenken Sie, dass $\frac{3}{4}\pi R^3 = V$ ist und dass $\frac{Q}{V} = \rho$ gilt.

Geben Sie den Integralsatz von Gauß aus dem Gedächtnis an.

.....



-----> 16

18.5 Potential eines Vektorfeldes

34

STUDIERN Sie

18.5 Potential eines Vektorfeldes
 Lehrbuch Seite 106 – 108

-----> 35

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \oint \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

53

Volumenintegral = Oberflächenintegral

Definition der Rotation eines Vektorfeldes \vec{F} :

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \dots\dots\dots$$

-----> 54

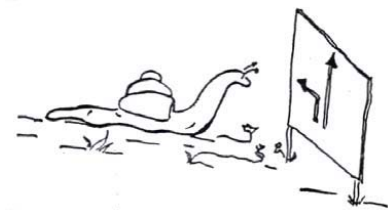
$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \oint_{A(V)} \vec{F} \cdot \vec{dA}$$

16

Wir werden jetzt den Gauß'schen Satz benutzen, um das angegebene elektrische Feld innerhalb und außerhalb der Kugel zu berechnen.

Berechnen Sie das elektrische Feld außerhalb der Kugeloberfläche.

$$\vec{E} = \dots\dots\dots$$



Aufgabe gelöst -----▷ 20

Hilfe und Erläuterung erwünscht -----▷ 17

Im Lehrbuch wurde als Beispiel das allgemeine radialsymmetrische Gravitationsfeld einer Kugel mit der Masse M betrachtet.

35

Der vertraute Fall dafür ist die Erde. Auf der Erdoberfläche rechnen wir oft mit der Vereinfachung eines homogenen Gravitationsfeldes.

Die x - y -Ebene liege dann parallel zur Erdoberfläche. Die z -Achse weise nach oben, und der Nullpunkt falle mit der Erdoberfläche zusammen. Dann ist die Kraft für eine Masse m gegeben durch:

$$\vec{F} = \dots\dots\dots$$

-----▷ 36

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

54

Eine Wasserströmung sei gegeben durch

$$\vec{V} = (z^2, 0, 0)$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \dots\dots\dots$$

-----▷ 55

Im Lehrbuch, S. 98, ist das elektrische Feld einer Kugel (Radius R , Ladungsdichte ρ) angegeben. Außerhalb der Kugel gilt:

17

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

Wir können diesen Ausdruck mit Hilfe des Satzes von Gauß gewinnen. Der Mittelpunkt der Kugel liege im Nullpunkt des Koordinatensystems.

Zunächst berechnen wir die Ladung Q der Kugel mit Kugelradius R . Die Ladungsdichte im Inneren sei ρ .

$$Q = \dots\dots\dots$$

-----> 18

$$\vec{F} = (0, 0, -m \cdot g)$$

36

Im Fall des Gravitationsfeldes ist die Kraft \vec{F} das Produkt aus der Masse m des betrachteten Körpers und der Feldstärke \vec{F}_g des Gravitationsfeldes. Die Gravitationsfeldstärke ist in diesem Fall

$$\vec{F}_g = -g \cdot \vec{e}_z = (0, 0, -g)$$

Im Folgenden werden wir Felder und ihre Feldstärken betrachten. Die Betrachtung gilt auch für Kräfte in statischen elektrischen Feldern. Dort ist die Kraft das Produkt aus der Ladung Q und der elektrischen Feldstärke \vec{E} : $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$

Das elektrische Feld wird vollständig charakterisiert durch die Feldstärke \vec{E} .

Prüfen Sie, ob das Gravitationsfeld \vec{F}_g wirbelfrei ist.

$$\text{rot } \vec{F}_g = \dots\dots\dots \quad \text{Folglich gilt: } \vec{F}_g \text{ ist } \dots\dots\dots$$

-----> 37

$$\text{rot}(z^2, 0, 0) = (0, 2z, 0)$$

55

Geben Sie den Satz von Stokes an.

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

-----> 56

$$Q = \int_{V_{\text{Kugel}}} \rho \cdot dV = \frac{4\pi}{3} \rho \cdot R^3$$

18

Jetzt berechnen wir das elektrische Feld außerhalb der Kugel.

Wir betrachten eine Kugeloberfläche außerhalb und wenden den Gauß'schen Integralsatz an:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \oint_{A(V)} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Aus der Elektrodynamik wissen wir, dass der Fluss der elektrischen Feldstärke durch eine geschlossene Oberfläche proportional zur eingeschlossenen Ladung Q ist:

$$\oint_{\text{Oberfläche}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Berechnen Sie für alle Kugelflächen außerhalb mit dem Radius $R_{\text{außen}}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dots = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

-----> 19

$\operatorname{rot} \vec{F}_g = \operatorname{rot}(0, 0, -g) = 0$. Folglich gilt: \vec{F}_g ist wirbelfrei, also ein konservatives Feld.

37

Ermitteln Sie das Potential von $\vec{F} = m \cdot \vec{F}_g$.

Beachten Sie die Konvention in der Physik, dass bei einem Kraftfeld \vec{F}_g das Potential die Arbeit ist, die auf dem Integrationsweg gegen das Kraftfeld geleistet wird.

$$\varphi(x, y, z) = \dots$$

-----> 38

Wir fassen zusammen

56

Integralsatz von Stokes

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{C(A)} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Oberflächenintegral = Linienintegral

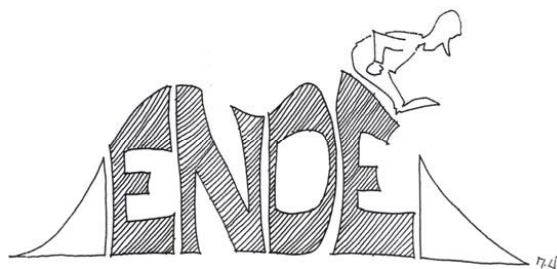
Integralsatz von Gauß

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \oint_{A(V)} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Volumenintegral = Oberflächenintegral

Die Sätze von Gauß und Stokes sollte man schon im Kopf haben, um sie später problemlos anwenden zu können und vor allem, um zu verstehen, wenn sie in physikalischem Kontext benutzt werden.

Sie haben hiermit einen guten Schritt voran getan und das Ende des Kapitels 18 erreicht.



$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = |E| \cdot 4\pi \cdot R_{\text{au\ss en}}^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

19

Daraus erhalten wir $|E| = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi R_{\text{au\ss en}}^2}$

Wir haben eine kugelsymmetrische Anordnung. Der Feldvektor weist nach au\ss en und seine Richtung ist gegeben durch den Einheitsvektor. (Erinnerung: Wir setzen $r = |\vec{r}|$.)

$$\frac{\vec{r}}{r} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Damit erhalten wir mit $r = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi R^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \dots\dots\dots$$

-----> 20

$$\varphi(x, y, z) = m \cdot g \cdot z + C$$

38

Das Potential ist bis auf die Integrationskonstante C bestimmt.

Legen Sie $\varphi(x, y, z)$ und damit C f\ur drei verschiedene Randbedingungen fest:

1) $\varphi_1 = 0$ f\ur $z_0 = 0$

$$\varphi_1 = \dots\dots\dots$$

2) $\varphi_2 = 0$ f\ur den Keller eines Hochhauses mit $z_0 = -10$

$$\varphi_2 = \dots\dots\dots$$

3) $\varphi_3 = 0$ f\ur das Dach eines Hochhauses mit $z_0 = 90$

$$\varphi_3 = \dots\dots\dots$$

-----> 39