

Kapitel 19

Koordinatentransformationen und Matrizen

Einleitung

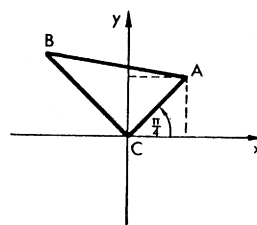
In der Einleitung wird gezeigt, in welchem Umfang der Rechenaufwand von der problemgerechten Wahl des Koordinatensystems abhängen kann.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 19.0 Einleitung
Lehrbuch, Seite 112 - 114

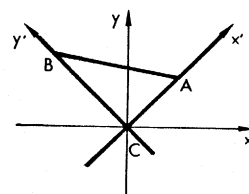
BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

----- ▷ 2

a) $\tan \varphi = 1$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ oder $\varphi = 45^\circ$



b) $A' = (2\sqrt{2}, 0)$
 $B' = (0, 3\sqrt{2})$



----- ▷ 23

Benutzen Sie das Schema:

Das Skalarprodukt aus der 1. Zeile von A und der 1. Spalte von B ist: $3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -2$.

Das Skalarprodukt aus der 2. Zeile von A und der 1. Spalte von B ist $3 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) = 17$.

Vervollständigen Sie nun die 2. Spalte.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = B$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & \dots \\ 17 & \dots \end{pmatrix}$$

----- ▷ 44

2

Welche Typen von Transformationen wurden in der Einleitung genannt?
Können Sie zwei aus dem Gedächtnis rekapitulieren?

1.

2.

----- > 3

23

Das war das Notwendige über Drehungen im zweidimensionalen Raum.

Das Ergebnis von *zwei* hintereinander ausgeführten Drehungen um die Winkel φ und Ψ ist *einer* Drehung um den Winkel $(\varphi + \Psi)$ gleichwertig. Dieser Satz wird im Lehrbuch systematisch abgeleitet.

Sie haben jetzt die Wahl:

Gleich weitergehen und Abschnitt 19.2.2 überspringen ----- > 24

Ableitung studieren: Lehrbuch, Abschnitt 19.2.2

Seite 119 - 120

----- > 24

44

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 17 & 4 \end{pmatrix}$$

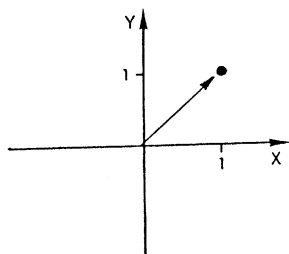
Berechnen Sie noch $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$

Benützen Sie das Hilfsschema.

----- > 45

3

1. Koordinatenverschiebung oder Translation.
2. Drehungen im 2- und 3-dimensionalen Raum.



Zeichnen Sie ein Koordinatensystem, das um den Winkel $\varphi = 45^\circ$ gedreht ist. Geben Sie die Koordinaten für den Ortsvektor $r = (1, 1)$ im neuen System an.

$r' = \dots\dots\dots$

4

24

Drehungen im dreidimensionalen Raum

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 19.2.3 Drehungen im dreidimensionalen Raum
Lehrbuch, Seite 121 - 122

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt

25

45

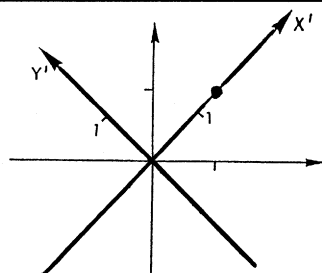
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung gefunden

48

Fehler gemacht

46



$$r' = (\sqrt{2}, 0)$$

4

In Lehrbüchern werden die Probleme meist bereits in geeigneten Koordinaten dargestellt. Dann ist die Arbeit bereits getan.

Wenn Sie jedoch selbstständig ein Problem lösen müssen, geht es oft genau darum, die geeigneten Koordinaten zu finden. Und wenn Sie diese gefunden haben, müssen Sie verschiedene Koordinaten ineinander umrechnen können.

Daher üben wir hier Koordinatentransformationen.

5

25

Das dreidimensionale Koordinatensystem wird um die z-Achse gedreht.

Der Drehwinkel sei $\frac{\pi}{2}$.

Berechnen Sie die neuen Komponenten des Ortsvektors $\vec{r} = (2, 3, 1)$ im gedrehten System.

$$\vec{r}' = \dots\dots\dots$$

26

46

Sie haben entweder einen – verzeihlichen – Rechenfehler gemacht oder Sie beherrschen die Regeln zur Multiplikation von Matrizen noch nicht sicher. Im letzteren Fall ist es notwendig, den Abschnitt 19.3 im Lehrbuch noch einmal zu studieren und anhand des Textes folgende Aufgaben zu lösen:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$

Denken Sie an das Hilfsschema.

47

Koordinatenverschiebungen – Translationen

Beim Mitrechnen und Exzerpieren lernen Sie aktiv. Was Sie mit eigenen Worten ausdrücken können, haben Sie verstanden. Rechnungen, die Sie selbst reproduzieren können, haben Sie im Kopf.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 19.1 Koordinatenverschiebungen – Translationen
Lehrbuch, Seite 115 - 166

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

----- ▷ 6

26

$$\vec{r}' = (3, -2, 1)$$

Hinweis: Es gibt in diesem Fall zwei Lösungswege:

- a) Wir können die Transformationsgleichungen benutzen. Dieser Weg führt immer zum Erfolg.
- b) Wir überlegen: Bei der Drehung um die z-Achse bleibt die z-Achse erhalten: $z' = z$.
Die x-Achse wird in die y-Achse gedreht: $x' = y$
Die y-Achse fällt in die negative x-Achse: $y' = -x$.
Damit haben wir schon als Transformationsformeln
- | | | |
|-----------|-----------------|------------------------------|
| $x' = y.$ | hier: $x' = 3$ | |
| $y' = -x$ | hier: $y' = -2$ | |
| $z' = z$ | hier: $z' = 1$ | also $\vec{r}' = (3, -2, 1)$ |

----- ▷ 27

47

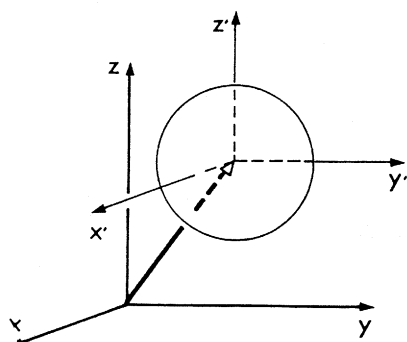
a) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



----- ▷ 48

6



Eine Kugel hat den Radius $R = 2$. Der Ortsvektor zu ihrem Mittelpunkt hat die Koordinaten $(3, 2, 4)$. Die Gleichung für die Kugel ist damit

$$4 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2$$

Folgende Transformation stellt eine Verschiebung des Koordinatenursprungs in den Punkt $(3, 2, 4)$ dar:

$$x' = x - 3 \quad y' = y - 2 \quad z' = z - 4$$

Damit geht die Gleichung für die Kugel über in

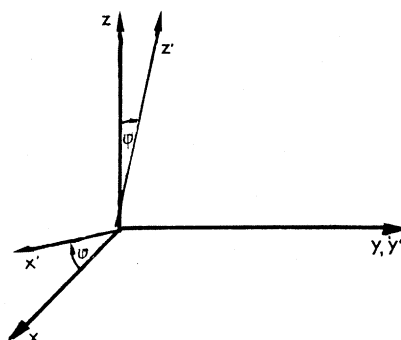
$$4 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Nach der Koordinatentransformation hat der neue Ortsvektor zum Mittelpunkt der Kugel die Koordinaten

-----▷ 7

27

Leiten Sie sich die Transformationsgleichungen ab für eine Drehung um die y -Achse mit dem Drehwinkel φ .



$$x' = \dots\dots\dots$$

$$y' = \dots\dots\dots$$

$$z' = \dots\dots\dots$$

-----▷ 28

48

Darstellung von Drehungen in Matrizenform

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

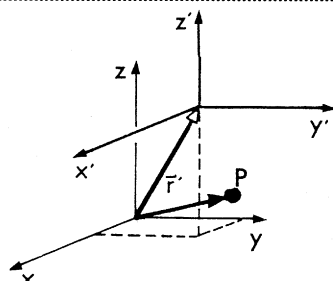
19.4 Darstellung von Drehungen in Matrizenform
Lehrbuch, Seite 128 - 129

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

-----▷ 49

7

$$r' = (0, 0, 0)$$



Welche Koordinaten hat der Ortsvektor zum Punkt $P = (5, 7, 2)$ bei folgender Koordinatentransformation:

$$x' = x - 3$$

$$y' = y - 2$$

$$z' = z - 4$$

$$r' = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden > 10

Erläuterung oder Hilfe erwünscht > 8

28

$$x' = x \cos \varphi + z \sin \varphi$$

$$z' = -x \sin \varphi + z \cos \varphi$$

$$y' = y$$

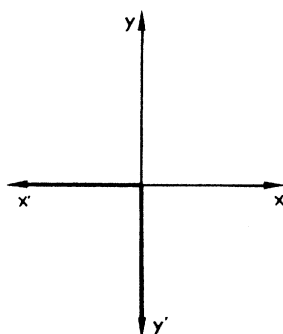
Erläuterung:

Bei einer Drehung um die y -Achse wird die y -Komponente eines Vektors $\vec{r} = (x, y, z)$ nicht verändert. Die Projektion $\vec{r}_{xz} = (x, z)$ des Vektors \vec{r} in die x - z -Ebene wird nach der Formel aus 19.2.1 transformiert, wobei hier y durch z ersetzt werden muß.



..... > 29

49



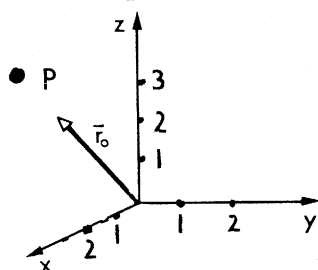
Stellen Sie die Matrix für eine Drehung des zweidimensionalen Koordinatensystems um 180° auf. Sie können die Formeln auf Ihrem Merkzettel oder aus der Formelsammlung benutzen.

.....

..... > 50

8

Lesen Sie im Lehrbuch noch einmal Abschnitt 19.1. Lösen Sie dabei folgende Aufgabe.



Das x, y, z -Koordinatensystem wird um den Vektor $\vec{r}_o = (2, -1, 3)$ verschoben.

a) Zeichnen Sie das neue Koordinatensystem in die Skizze ein.

b) Der Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{r} = (2, -2, 4)$ hat dann die neuen Koordinaten

$x' = \dots\dots\dots$

$y' = \dots\dots\dots$

$z' = \dots\dots\dots$

9

29

Matrizenrechnung

Rechnen Sie die Beispiele des Lehrbuches sorgfältig mit. Dieser Abschnitt ist lang und enthält neue Rechenregeln. Zerlegen Sie ihn deshalb für sich in Teilabschnitte.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 19.3 Matrizenrechnung
Lehrbuch, Seite 123 - 129

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift 30

50

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

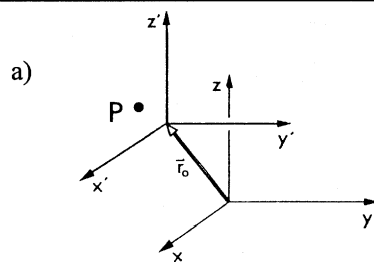
Rechengang: Die Drehmatrix lautet $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

Wir setzen für φ den Winkel $\varphi = \pi$ ein: $\begin{pmatrix} \cos \pi & \sin \pi \\ -\sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Zu der Drehung um 180° gehört also die Matrix: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Dies kann man sich auch leicht anschaulich überlegen, denn $x' = -x$ und $y' = -y$.

51



b) P hat die neuen Koordinaten

$$x' = 0$$

$$y' = -1$$

$$z' = 1$$

9

Welche Koordinaten hat der Ortsvektor \vec{r} zum Punkt $P = (5, 7, 2)$ nach folgender Koordinatentransformation

$$x' = x - 3$$

$$y' = y - 2$$

$$z' = z - 4$$

$$\vec{r}' = \dots\dots\dots$$

----- > 10

30

Schreiben Sie die Spalten und Zeilen der Matrix auf:

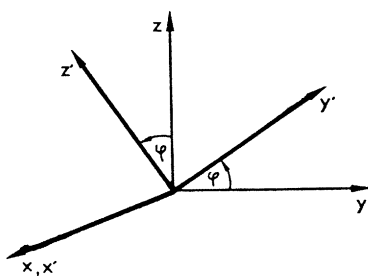
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Spalten:

Zeilen :

----- > 31

51



Stellen Sie die Matrix auf für eine Drehung im dreidimensionalen Raum um die x -Achse.

Der Drehwinkel sei φ .

Drehmatrix $A =$

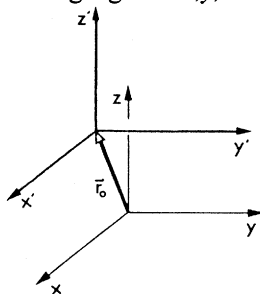
.....

----- > 52

10

$$\vec{r}' = (x' \ y' \ z') = (2, \ 5, \ -2)$$

Der Übergang vom x, y, z -Koordinatensystem in das System $x' y' z'$ erfolge durch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs um den Vektor $\vec{r}_0 = (0, 1, 3)$.



Der Ortsvektor $\vec{r} = (1, 13, -4)$ geht bei dieser Transformation über in den Ortsvektor r' .

$$\vec{r}' = \dots\dots\dots$$

Erläuterung oder Hilfe erwünscht > 11

Lösung gefunden > 12

31

$$\text{Spalten: } \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Zeilen: } (1 \ 2 \ 4), (-3 \ 6 \ 2)$$

Man spricht auch von Zeilenvektoren und Spaltenvektoren.

Gegeben seien zwei Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

A ist eine Matrix

B ist eine Matrix

Kann man A und B addieren?

..... > 32

52

$$A_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Rechengang: Die Transformationsformeln für eine Drehung mit dem Winkel φ um die x -Achse lauten:

$$x = x$$

$$y = y \cdot \cos \varphi + z \cdot \sin \varphi$$

$$z = -y \cdot \sin \varphi + z \cdot \cos \varphi$$

$$\text{Damit erhalten wir für die Drehmatrix } A_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

..... > 53

11

Wenn der Koordinatenursprung um \vec{r}_o verschoben wird, hat ein Ortsvektor r die neuen Koordinaten: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_o$

Ausführlich geschrieben: $x' = x - x_o$

$$y' = y - y_o$$

$$z' = z - z_o$$

Jetzt zur Aufgabe, Sie brauchen nur einzusetzen:

Gegeben $\vec{r}_o = (1, 13, -4)$

$$\vec{r} = (0, 1, 3)$$

Gesucht $\vec{r}' = \dots\dots\dots$

----- > 12

32

$A = 3 \times 2$ Matrix

$B = 2 \times 3$ Matrix

Man kann sie nicht addieren.

Addieren Sie die zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

.....

Welches ist die notwendige Bedingung dafür, daß zwei Matrizen addiert werden können?

.....

----- > 33

53

Jetzt müßte es Ihnen gelingen, die Übungsaufgaben 19.2.1 und 19.2.2 auf Seite 134 des Lehrbuchs zu lösen. Aber erst morgen oder später rechnen.

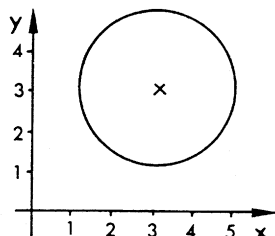
Zweckmäßig wäre es, noch einmal Ihre Notizen mit den Definitionen und Transformationsformeln zu ordnen.

Jetzt ist eine Pause angebracht. Sie haben Sie sich auch wirklich verdient.

----- > 54

12

$$r' = (1, 12, -7)$$



Der Kreis hat den Radius $R = 2$ und den Mittelpunkt $(3, 3)$

a) Geben Sie die Gleichung des Kreises an.

b) Um welchen Vektor r_0 muß das Koordinatensystem verschoben werden, damit die Kreisgleichung folgende Form hat

$$x'^2 + y'^2 = 4$$

$$\vec{r}_0 = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 13

33

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bedingung: Übereinstimmung in Zeilenzahl und Spaltenzahl.

Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 11 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

Geben Sie an: $3A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

----- ▷ 34

54

Spezielle Matrizen

In diesem Abschnitt sollen Sie einige spezielle Formen der Matrizen kennenlernen: Einheitsmatrizen, Diagonalmatrizen u.a.

Legen Sie eine Liste mit den Merkmalen dieser speziellen Matrizen an und reproduzieren Sie ihre Merkmale und Namen anschließend aus dem Gedächtnis.

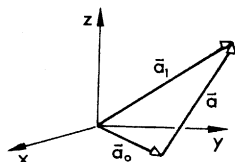
STUDIEREN SIE im Lehrbuch 19.5 Spezielle Matrizen
Lehrbuch, Seite 130 - 133

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ----- ▷ 55

13

a) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$ oder $x^2 - 6x + y^2 - 6y = -14$

b) $\vec{r}_0 = (3, 3)$



Der Vektor \vec{a} hat Anfangspunkt $\vec{a}_0 = (1, 1, 0)$

Endpunkt $\vec{a}_1 = (1, 3, 2)$

a) Komponenten von $\vec{a} = \dots\dots\dots$

b) Betrag von \vec{a} : $|\vec{a}| = \dots\dots\dots$

Das Koordinatensystem wird verschoben um den Vektor $\vec{u} = (1, 1, 1)$

c) Neuer Anfangspunkt $\vec{a}'_0 = \dots\dots\dots$ d) Neuer Endpunkt $\vec{a}'_1 = \dots\dots\dots$

e) Komponenten von \vec{a}' : $\vec{a}' = \dots\dots\dots$ f) Betrag von \vec{a}' : $|\vec{a}'| = \dots\dots\dots$ ----- > 14

34

$$3A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 & 3 \\ 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 33 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Jedes Element wurde mit 3 multipliziert.

Berechnen Sie das Produkt aus der Matrix A und dem Vektor \vec{r} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{r} = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden ----- > 37

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ----- > 35

55

Bezeichnen Sie folgende quadratische Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

..... matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

..... matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

..... matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

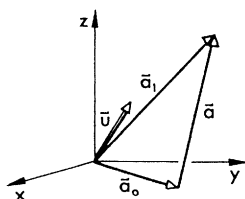
..... matrix

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

..... matrix

----- > 56

14



a) $\vec{a} = (0, 2, 2)$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

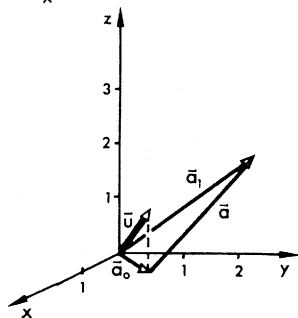
c) $\vec{a}'_0 = (0, 0, -1)$

d) $\vec{a}'_1 = (0, 2, 1)$

e) $\vec{a}'_1 = (0, 2, 2)$

f) $|\vec{a}'| = |\vec{a}|$

Zeichnen Sie das um $\vec{u} = (1, 1, 1)$ verschobene Koordinatensystem ein und überprüfen Sie das Rechenergebnis.



15

35

Zu berechnen ist das Produkt einer Matrix A mit einem Vektor \vec{r} .

Das ergibt einen neuen Vektor \vec{r}' .

$$A \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Die Definition für die Berechnung ist

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie anhand der Definition das Produkt $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \end{pmatrix}$

36

56

A Nullmatrix

B Diagonalmatrix

C Einheitsmatrix

D symmetrische Matrix

E schief-symmetrische Matrix

Bei Unsicherheit studieren Sie Ihre Liste und das Lehrbuch erneut.

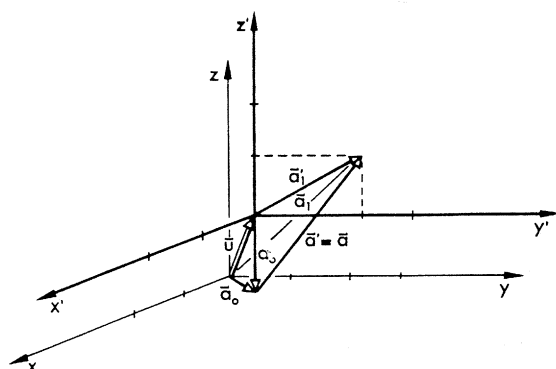
Geben Sie je eine 3×3 Matrix als Beispiel an:

schief-symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$ symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$

Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$

57

15

Der Vektor bleibt erhalten: $\vec{a} = \vec{a}'$

-----▷ 16

36

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Man kann sich die Berechnung durch ein Hilfsschema sehr erleichtern. In der unten stehenden Anordnung erhalten wir die Komponenten des Vektors \vec{r} , indem wir das innere Produkt des Vektors \vec{r} mit der jeweiligen Zeile der Matrix bilden.

 x' ist: r' (1. Zeile) y' ist: r' (2. Zeile)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

-----▷ 37

57

Hier sind Beispiele:

schief-symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Bilden Sie $A^T = \dots\dots\dots$
 $(A^T)^T = \dots\dots\dots$

-----▷ 58

16

Drehungen**Drehungen im zweidimensionalen Raum**

Verfolgen Sie den Rechengang aufmerksam, denn: „Reading without a pencil is daydreaming.“

Notieren Sie sich die Transformationformeln für die Drehung eines zweidimensionalen Koordinatensystems um einen Winkel.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 19.2.1 Drehungen im zweidimensionalen Raum
Lehrbuch, Seite 117 - 119

BEARBEITEN SIE DANACH

-----▷ 17

37

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

.....

Berechnen Sie den Ausdruck unten. Benutzen Sie das Schema und schreiben Sie die Anordnung, die die Übersicht erleichtert, auf einen Zettel.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

-----▷ 38

58

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

.....

Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Bilden Sie $AB = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ $(AB)^T = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

-----▷ 59

17

Das rechtwinklige x - y -Koordinatensystem werde gedreht um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Welche Komponenten hat in dem neuen Koordinatensystem der Vektor $\vec{r} = (1,2)$?

Benutzen Sie die Formeln auf Ihrem Merkzettel! Wir wollen ja üben, bestimmte Sachverhalte so zu exzerpieren, daß man später auf sie zurückgreifen kann.

$r' = \dots\dots\dots$



----- > 18

38

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 0 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \\ -1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Vorübung zur Multiplikation zweier Matrizen. Welche Produkte lassen sich bilden?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

☐ AB

☐ AC

☐ BC

☐ CB

☐ CA

☐ BA

----- > 39

59

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 19 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 3 & 19 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bilden Sie

$$AE = \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$EA = \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix}$$

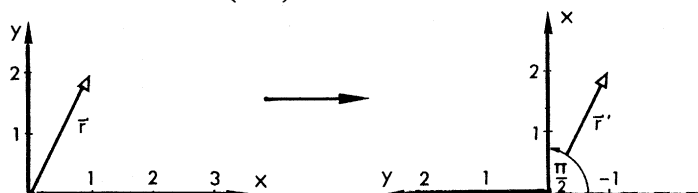
----- > 60

18

$$\vec{r}' = (2, -1)$$

Hinweis: Diese Aufgabe können wir auf zwei Arten lösen:

- a) Wir skizzieren die Koordinatensysteme vor und nach der Drehung und lesen aus der Zeichnung ab: $r' = (2, -1)$



- b) Wir benutzen die Transformationsformeln $x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$ $y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$
Wir setzen ein: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x = 1$ und $y = 2$. ▷ 19

39

AC , BC , BA und CB sind möglich.

Hinweis: Die Zahl der Spalten der ersten Matrix muß gleich der Zahl der Zeilen der zweiten Matrix sein.

Zu multiplizieren seien zwei Matrizen. Geben Sie zunächst das Matrixelement c_{11} an.

Hilfsschema benutzen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \dots\dots\dots$$

..... ▷ 40

60

$$AE = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad EA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Bei der Multiplikation mit der Einheitsmatrix ist die Reihenfolge ohne Bedeutung.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bilden Sie

$$AB = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

..... ▷ 61

19

Das Koordinatensystem wird um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$ gedreht.

Hier gibt es nur einen Weg, Sie müssen die Transformationsformeln benutzen.

Berechnen Sie den Vektor \vec{r}' , der aus $\vec{r} = (-2, 1)$ entsteht.

$\vec{r}' = \dots\dots\dots$

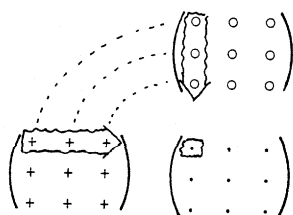
Lösung gefunden ----- > 21

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ----- > 20

40

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

Man kann sich die Matrizenmultiplikation anhand des Schemas merken.



c_{11} kann als Skalarprodukt des Zeilenvektors \vec{a} und des Spaltenvektors \vec{b} aufgefaßt werden. Das Verfahren ist sinngemäß für jedes Element zu übertragen.

Geben Sie nun c_{33} an und markieren Sie die zugehörige Zeile und Spalte.

$c_{33} = \dots\dots\dots$

----- > 41

61

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Bei der Matrizenmultiplikation ist die Reihenfolge von Bedeutung: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Gegeben sei eine Matrix A . Dann heißt A^{-1} Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Bilden Sie $A \cdot A^{-1} = \dots\dots\dots$ $A^{-1} \cdot A = \dots\dots\dots$

----- > 62

20

Es war $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\vec{r} = (x, y) = (-2, 1)$

Einsetzen in die Transformationformeln gibt

$$\begin{aligned}x' &= -2 \cos \frac{\pi}{3} + 1 \sin \frac{\pi}{3} \\y' &= 2 \sin \frac{\pi}{3} + 1 \cos \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Hinweis: $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ und $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\vec{r}' = (x', y') = (\dots\dots\dots)$$

----- > 21

41

$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & | \\ \cdot & \cdot & | \\ \cdot & \cdot & | \\ \cdot & \cdot & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ - & - & \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{pmatrix}$$

Die Matrizenmultiplikation ist unübersichtlich. Es ist hilfreich, sich die Matrizen in der angegebenen Form anzuordnen. Dann ist die Zuordnung der Spaltenvektoren und Zeilenvektoren unmittelbar zu erkennen.

----- > 42

62

inverse Matrix

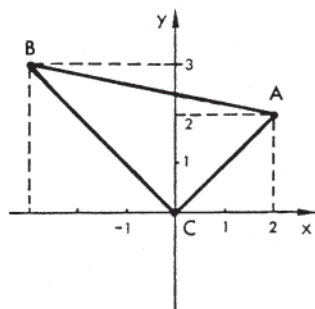
$$AA^{-1} = A^{-1}A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung inverser Matrizen wird im nächsten Kapitel gezeigt. Damit ist dieses Kapitel geschafft. Aber vergessen Sie nicht, zu wiederholen und – später – die Übungsaufgaben im Lehrbuch zu bearbeiten. Sie wissen doch, Übungsaufgaben sollte man gerade dann rechnen, wenn sie etwas Mühe machen.

----- > 63

21

$$\vec{r}' = (-1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \sqrt{3} + \frac{1}{2}) = (-0,134, 2,23)$$



Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Punkten

$$A = (2, 2) \quad B = (-3, 3) \quad C = (0, 0).$$

Drehen Sie das Koordinatensystem so, daß A und B auf die Achsen fallen:

a) Drehungswinkel bestimmen:

$$\tan \varphi = \dots \quad \varphi = \dots$$

b) Koordinatentransformation für A und B durchführen und neue Lage einzeichnen.

$$A' = \dots \quad B' = \dots$$

----- > 22

42

Bilden Sie das Matrizenprodukt $A \cdot B$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Lösung gefunden

----- > 44

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

----- > 43

63

Sie haben das



des Kapitels erreicht.