

Kapitel 20

Lineare Gleichungssysteme und Determinanten

Lineare Gleichungssysteme**Gauß'sches Eliminationsverfahren, Schrittweise Elimination der Variablen****Gauß-Jordan Elimination**

In den nächsten Abschnitten des Lehrbuchs werden verschiedene numerische Beispiele durchgerechnet. Versuchen Sie, die Beispiele jeweils selbst anhand des vorher im Text erklärten Lösungsverfahrens zu lösen

STUDIERN SIE im Lehrbuch 20.1 Lineare Gleichungssysteme
 20.1.1. Gauß'sches Eliminationsverfahren
 20.1.2 Gauß-Jordan Elimination
 Lehrbuch, Seite 136 - 139

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift ----- ▷ 2

$$A|E \text{ ist eine } 4 \times 8 \text{ Matrix} \quad A|E = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Zunächst berechnen wir die inverse Matrix A^{-1} . Dafür muß $A|E$ so verändert werden, daß der erste Teil zu einer Einheitsmatrix wird. Dann ist der zweite Teil A^{-1} .

$$E|A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right)$$



Lösung gefunden ----- ▷ 20

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ----- ▷ 16

Existenz von Lösungen

Im Lehrbuch sind zwei ausführliche Beispiele durchgerechnet. Dabei wird die Matrixschreibweise benutzt. Bei Verständnisschwierigkeiten hilft es, die vollständigen Gleichungen hinschreiben und an ihnen die Umformungen der Beispiele durchzuführen.

STUDIERN SIE im Lehrbuch 20.1.4 Existenz von Lösungen
 Lehrbuch, Seite 142 - 145

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift ----- ▷ 30

2

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem entweder nach dem Gauß'schen oder dem Gauß-Jordan'schen Eliminationsverfahren

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$-2x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 = \dots\dots\dots$$

$$x_2 = \dots\dots\dots$$

3

16

Wir gehen von $A|E$ aus. Der erste Teil soll E werden.

1. Schritt: Elimination der Elemente in der ersten Spalte unterhalb a_{11} :

$$A|E = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{Zeile 1: } a_{11} \text{ ist bereits 1.} \\ \text{Zeile 2: Zeile 1 abziehen.} \\ \text{Zeile 3: } a_{13} \text{ ist bereits 0} \\ \text{Zeile 4: } 3 \times \text{Zeile 1 abziehen.} \end{array}$$

Das Ergebnis ist: $\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right)$

17

30

A) Zu lösen seien 4 nicht homogene lineare Gleichungen mit 6 Variablen.

Höchstens Variablen können bestimmt werden.

Mindestens Variablen sind unbestimmt und frei wählbar.

B) Zu lösen seien 4 homogene lineare Gleichungen.

Triviale Lösung:

Falls eine nicht-triviale Lösung existiert:

.....

.....

31

3

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

Lösen Sie jetzt

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$-2x_1 + x_2 - 6x_3 = -7$$

$$2x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 4$$

$$x_1 = \dots\dots\dots$$

$$x_2 = \dots\dots\dots$$

$$x_3 = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden ----- ▷ 5

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ----- ▷ 4

17

Die veränderten Elemente sind fett gedruckt

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -1 & \mathbf{2} & -\mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & -2 & \mathbf{3} & -\mathbf{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2. Schritt: Elimination der Elemente unterhalb und oberhalb a_{22} : Zeile 1: Zeile 2 abziehen
 Zeile 3: Zeile 2 abziehen
 Zeile 4: 2 x Zeile 2 abziehen.

Ergebnis: $\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right)$

----- ▷ 18

31

A) Höchstens 4 Variablen können bestimmt werden. Mindestens 2 Variablen sind unbestimmt und frei wählbar.

B) Triviale Lösung: $x_j = 0 \quad j = 1, 2, 3, 4$

Falls eine nichttriviale Lösung existiert, ist sie nicht eindeutig und hat mindestens eine frei wählbare Variable.

Bei praktischen Rechnungen ist es empfehlenswert, vorweg zu prüfen, ob Lösungen existieren und ob sie eindeutig sind. Führt man die Gauß-Jordan Elimination durch, zeigt die Lösung klar ihre Struktur.

Nun haben Sie sich eine PAUSE verdient!

----- ▷ 32

4

Anstatt einer Hilfe nur ein Hinweis. Es kann hier keine grundsätzlichen Verständnisschwierigkeiten geben.

Lösen Sie die Gleichung anhand des im Lehrbuch Seite 137 demonstrierten Beispiels.

Das beste wäre, Sie lösten danach dieselbe Aufgabe auch anhand des im Lehrbuch auf Seite 138 demonstrierten Beispiels. Dann hätten Sie die beiden Beispiele durchgespielt.

----- ▷ 5

18

Die veränderten Elemente sind fett gedruckt $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -1 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$

3. Schritt:

Elimination der Elemente unterhalb und oberhalb von a_{33} : Zeile 1: Zeile 3 abziehen

Zeile 2: Zeile 3 addieren

Zeile 4: a_{34} ist bereits 0

Ergebnis: $\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right)$

----- ▷ 19

32

Determinanten

In diesem Abschnitt sollen Sie den Begriff „Determinante“ und deren Eigenschaften kennenlernen, sowie üben, die Determinanten von 2×2 und 3×3 Matrizen auszurechnen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 20.2 Determinante
 20.2.1 Einführung
 20.2.2 Definition und Eigenschaften der n-reihigen
 Determinanten
 Lehrbuch Seite 145 - 151

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

----- ▷ 33

5

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = \frac{1}{3}$$

Hier im Leitprogramm wird jetzt die allgemeine Lösung für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren berechnet. Allgemeine Rechnungen sind oft schwerfälliger als Zahlenbeispiele.

Entscheiden Sie selbst:

Möchte Rechnung kennenlernen ----- ▷ 6

Möchte weiter zum nächsten Thema übergehen ----- ▷ 13

19

Die veränderten Elemente sind fett gedruckt:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

4. Schritt: Elimination der Elemente oberhalb a_{44} :

Zeile 1: 2 x Zeile 4 addieren

Zeile 2: Zeile 4 addieren

Zeile 3: Zeile 4 subtrahieren

Zeile 4: mit (-1) multiplizieren

Ergebnis: $E|A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right)$

----- ▷ 20

33

Gegeben sei die Determinante der Ihnen von vorhergehenden Übungen bekannten Matrix:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 12 \end{vmatrix}$$

Geben Sie die Unterdeterminante für a_{12} :

Schreiben Sie das algebraische Komplement auf:

$$A_{12} = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Im Zweifel im Lehrbuch nachschauen. ----- ▷ 34

6

Gegeben sei ein System von zwei linearen Gleichungen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Berechnen Sie die Lösung mittels der Gauß'schen Elimination.

$$x_1 = \dots\dots\dots$$

$$x_2 = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden > 11

Erläuterung oder Hilfe erwünscht > 7

20

$$E|A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Nachdem wir $A|E$ in $E|A^{-1}$ transferiert haben, können wir A^{-1} separat hinschreiben.

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right)$$

Überprüfen Sie das Resultat und berechnen Sie $A^{-1} \cdot A = \dots\dots\dots$ $A \cdot A^{-1} = \dots\dots\dots$
 > 21

34

Unterdeterminante für a_{12} : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix}$

Algebraisches Komplement $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix}$

Rechnen Sie nun das algebraische Komplement aus. Benutzen Sie einmal die allgemeine Methode (Entwicklung nach einer Zeile) und einmal die Sarrus'sche Regel:

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

..... > 35

7

Gegeben ist

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad (2)$$

Erster Schritt: Wir teilen Gleichung (1) durch a_{11} : $x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}$

Wir eliminieren x_1 in Gleichung (2): $0 + \left[a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} \right] \cdot x_2 = b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}$

Führen Sie den zweiten Schritt aus:

$$x_1 = \dots\dots\dots$$

$$x_2 = \dots\dots\dots$$

Weitere Hinweise

8

21

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wenn kein Rechenfehler gemacht wurde, müßten Sie erhalten $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

Kehren wir zurück zu unserem Gleichungssystem von Lehrschrift 14: $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & x_1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 3 & 5 & -2 & 12 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \\ 8 \\ 64 \end{pmatrix} \quad \text{Die erweiterte Matrix } A|b \text{ ist: } A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 16 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & 12 & 64 \end{array} \right)$$

22

35

Entwicklung nach der ersten Zeile

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - (-1)(-3)) = 1$$

Die Benutzung der Sarrus'schen Regel ergibt natürlich das gleiche Ergebnis.

Entwickeln Sie zur weiteren Übung einmal nach der 2. Zeile und dann noch einmal nach der 1. Spalte. Da das Ergebnis bekannt ist, haben Sie selbst gleich die Kontrolle.

36

8

Das Ergebnis des ersten Schrittes war:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (1)$$

$$0 + \left(a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} \right) \cdot x_2 = b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \quad (2)$$

Zweiter Schritt: Elimination von x_2 in Gleichung(1)

Dafür muß Gleichung (2) nach x_2 aufgelöst werden.

$$x_2 = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 9

22

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 16 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & 12 & 64 \end{array} \right)$$

Lösen Sie das Gleichungssystem mit der Gauß-Jordan Elimination.

Das entspricht der Transformation des Teils A in eine Einheitsmatrix genau wie eben bei der Ermittlung von A^{-1} . Einziger Unterschied ist, daß hier die Erweiterung aus b besteht.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} x_1 = \dots\dots\dots \\ x_2 = \dots\dots\dots \\ x_3 = \dots\dots\dots \\ x_4 = \dots\dots\dots \end{array}$$

Lösung gefunden

----- ▷ 24

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

----- ▷ 23

36

$A_{12} = 1$ Das Ergebnis ist immer gleich, der Rechenaufwand nicht.

Der Rechenaufwand bei der Bestimmung von Determinanten größerer Matrizen kann ganz erheblich reduziert werden, wenn man die Eigenschaften der Determinanten geschickt zur Vereinfachung ausnutzt.

$$\text{Gegeben sei} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 12 \end{vmatrix}$$

Benutze Regel (6) – Addition von Vielfachen einer Zeile zu einer anderen:

$$\det A = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} \quad \text{-----} \triangleright 37$$

9

$$x_2 = \frac{b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}}{a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}}} = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Dies ist bereits die Lösung für x_2 .

Um x_1 zu erhalten muß nun noch x_2 in Gleichung (1) eliminiert werden.

Gleichung (1) war $x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}$

Nach Elimination von x_2 erhalten wir $x_1 = \dots\dots\dots$

----- > 10

23

Bei der Berechnung der Inversen haben wir die erweiterte Matrix $A|E$ so transformiert, daß wir $E|A^{-1}$ erhielten. Jetzt ist die erweiterte Matrix $A|b$ so zu transformieren, daß wir $E|x$ erhalten.

Die Transformationsschritte sind die gleichen wie in den Lehrschritten 16-20. Nur die rechte Seite ist verändert. Es handelt sich um die Gauß-Jordan Elimination in einer abgekürzten Schreibweise. Führen Sie die Transformation anhand der Lehrschritte 16-20 durch. Dafür müssen Sie zurückblättern

$$E|x = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 = \\ x_2 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{array}$$

----- > 24

37

Es gibt viele Möglichkeiten. Eine davon wäre

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 12 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Subtraktion von Zeile 1} \\ \text{Subtraktion von } 3 \times \text{Zeile 1} \end{array} = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{array} \right|$$

Die Vereinfachung entspricht im übrigen genau den Operationen der Gauß-Jordan Elimination. Jetzt braucht nur noch das algebraische Komplement A_{11} berechnet zu werden.

$$\text{Det}A = \dots\dots\dots$$

----- > 38

10

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{(b_2 a_{11} - b_1 a_{21})}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}$$

Dieser Ausdruck läßt sich auf die gleiche Form bringen, wie der für x_2 . Dann ergibt sich die vollständige Lösung zu

$$x_1 = \dots\dots\dots$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

----- ▷ 11

24

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{array}$$

Bei der Ausführung der Transformationen muß man aufpassen, aber prinzipiell sind sie nicht schwierig. Die Matrixschreibweise und die schrittweise Durchführung der Transformationen anhand der erweiterten Matrix $A|b$ sparen Schreibarbeit und helfen damit, Fehler zu vermeiden.

----- ▷ 25

38

$$\text{Det}A = a_{11} \cdot A_{11} = -1$$

Vereinfachen Sie die Determinante derselben Matrix, indem Sie Vielfache einer Spalte zu einer anderen addieren und dann ausrechnen:

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 12 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right| = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 39

11

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Nun lösen Sie ein Zahlenbeispiel:

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{10}$$

$$2x_1 + 5x_2 = 2$$

$$x_1 = \dots\dots\dots$$

$$x_2 = \dots\dots\dots$$



----- ▷ 12

25

Jetzt folgt eine Aufgabe, wie sie in Anwendungssituationen auftreten kann. Die Zahlenrechnungen können nicht mehr im Kopf durchgeführt werden, es muß ein Taschenrechner benutzt werden. Systematisches Vorgehen hilft, Fehler zu vermeiden, die bei diesen Zahlenrechnungen sehr leicht auftreten können.

$$2,15x_1 + 1,05x_2 + 0,56x_3 = 3,25$$

$$x_1 = \dots\dots\dots$$

$$3,80x_1 + 0,95x_2 - 0,98x_3 = -9,50$$

$$x_2 = \dots\dots\dots$$

$$4,90x_2 + 2,05x_3 = 0,05$$

$$x_3 = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden

----- ▷ 28

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

----- ▷ 26

39

Eine mögliche Vereinfachung:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

oder eine andere Vereinfachung:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -1$$

Weitere Übungsaufgaben finden Sie im Lehrbuch, Seite 157. Im Leitprogramm üben wir nicht weiter, hier ist nur eine erste Orientierung beabsichtigt.

----- ▷ 40

12

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{5}$$

Das Zahlenbeispiel machte viel weniger Schreibarbeit als die Ableitung der allgemeinen Lösung. Die allgemeinen Lösungen für Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen sind noch viel schwerfälliger und aufwendiger. Die Durchführung des Lösungsverfahrens ist demgegenüber einfach und folgerichtig. Daher ist das Verständnis der Logik des Lösungsverfahrens so wichtig, nicht die Kenntnis der Lösungsformel. Weitere Übungen sind im Lehrbuch auf Seite 157 zu finden.

----- ▷ 13

26

Schwierigkeiten macht bei dieser Aufgabe vor allem die Schreib- und Rechenarbeit. Das Lösungsverfahren ist bekannt. Zur Kontrolle ist das Gleichungssystem nach Elimination der Variablen x_1 in der ersten Spalte dargestellt. Natürlich in Matrix-Schreibweise. Die Rechnungen sind mit einem Taschenrechner durchgeführt. Bei Schwierigkeiten studieren Sie im Lehrbuch noch einmal die Abschnitte 20.1.2 und 20.1.3 und rechnen Sie die Aufgabe anhand des Lehrbuchs.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,488372 & 0,260465 & 1,511628 \\ 0 & 0,905814 & 1,969767 & 15,244185 \\ 0 & 4,90 & 2,05 & 0,05 \end{array} \right)$$

Lösung gefunden ----- ▷ 28

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ----- ▷ 27

40

Rang einer Determinanten und einer Matrix

Anwendungsbeispiele

Cramer'sche Regel

Der Rang einer Matrix und ihrer Determinanten bestimmt die Struktur der Lösungen eines linearen Gleichungssystems. Rechnen sie die ausführlichen Beispiele im Lehrbuch mit und, besser noch, versuchen Sie, die Beispiele zunächst selbständig zu lösen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 20.2.3 Rang einer Determinanten und einer Matrix
 20.2.4 Anwendungsbeispiele
 20.2.5 Cramersche Regel
 Lehrbuch Seite 153 - 156

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift ----- ▷ 41

Matrixschreibweise linearer Gleichungssysteme und Bestimmung der inversen Matrix

Die Lösung linearer Gleichungssysteme wird durch die Matrixschreibweise erleichtert. Das wird für die Gauß-Jordan Elimination gezeigt. Die inverse Matrix, die im vorhergehenden Kapitel bereits erwähnt wurde, kann mit Hilfe der Gauß-Jordan Elimination berechnet werden.

STUDIERN SIE im Lehrbuch

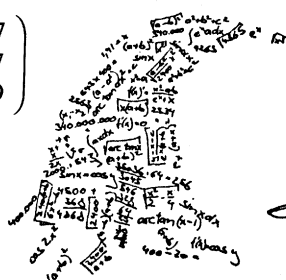
20.1.3 Matrixschreibweise linearer Gleichungssysteme
und Bestimmung der inversen Matrix
Lehrbuch, Seite 139 - 142

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt

----- ▷ 14

Hier ist – wieder in Matrix-Schreibweise – der Stand der Rechnung nach der Elimination der Variablen x_2 in der zweiten Spalte notiert. Aufgrund von Abrundungen können bei Ihren Rechnungen Abweichungen in der letzten angegebenen Ziffer auftreten.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0,801540 & 6,707317 \\ 0 & 1 & 2,174583 & 16,829267 \\ 0 & 0 & 8,605456 & 82,413409 \end{array} \right)$$



----- ▷ 28

Beim Studium des Lehrbuchs haben Sie Beispiele ausführlich durchgerechnet. Weitere Beispielaufgaben finden Sie in der letzten Übungsaufgabe im Lehrbuch Seite 157. Üben Sie nach Ihrem Bedarf. Die Cramersche Regel ist vor allem theoretisch interessant. Für praktische Anwendungen empfiehlt es sich immer, die Gauß-Elimination oder die Gauß-Jordan Elimination durchzuführen. Dabei ergibt sich im übrigen der Rang der Koeffizientenmatrix automatisch.

Aus diesem Grund werden wir hier keine weiteren Beispiele zur Cramerschen Regel rechnen.

----- ▷ 42

14

Gegeben sei ein System linearer Gleichungen $Ax = b$

$$x_1 + x_2 + 0 + 3x_4 = 16$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 25$$

$$0 + x_2 + 0 + x_4 = 8$$

$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 12x_4 = 64$$

Die erweiterte Matrix $A|E$ ist eine $\dots \times \dots$ Matrix.

$$A|E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right)$$

----- ▷ 15

28

Lösung in Matrix-Schreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,968940 \\ 0 & 1 & 0 & -3,996449 \\ 0 & 0 & 1 & 9,576879 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 = 0,969 \\ x_2 = -3,996 \\ x_3 = 9,577 \end{array}$$

Im Ergebnis sind die Zahlen gerundet. Ergebnisse sollten immer mit der Genauigkeit angegeben werden, die durch die zugrundeliegenden Daten begrenzt sind.

----- ▷ 29

42

Sie haben das



des Kapitels erreicht!!