

Kapitel 21

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren werden sowohl in der Technik wie in der Physik benutzt. In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung in die Grundgedanken gegeben. Voraussetzung ist, daß Sie die Kapitel 19 „Koordinatentransformationen und Matrizen“ und 20 „Lineare Gleichungssysteme und Determinanten“ studiert haben. Denken Sie daran, die Beispiele im Lehrbuch auf einem Zettel mitzurechnen. Nur wenn man selbst etwas ausführen und reproduzieren kann, hat man es im Kopf.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 21.1 Eigenwerte von 2×2 Matrizen

21.2 Bestimmung von Eigenwerten

Lehrbuch, Seite 159 - 164

BEARBEITEN SIE danach Lehrschrift

----- ▷ 2

$$\vec{r}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_{22} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_{23} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es sind beliebig viele gleichwertige Eigenvektoren zu r_{21} möglich.

Verifizieren Sie nun auch hier numerisch, daß $\vec{r}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist für λ_2 .

Gilt $(A - \lambda_2 E) \cdot \vec{r}_{21} = 0$? ☐ Ja ☐ Nein

Verifizieren Sie numerisch, daß $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ kein Eigenvektor ist für $\lambda_1 = 1$.

Gilt $(A - \lambda_1 E) \cdot \vec{r}_2 = 0$? ☐ Ja ☐ Nein

----- ▷ 19

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die charakteristische Gleichung für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie im Zweifel das Lehrbuch, Seite 164, zu Hilfe.

----- ▷ 36

2

Gegeben seien eine quadratische Matrix A und ein Vektor \vec{r} .

Das Produkt $A \cdot \vec{r}$ ergebe einen neuen Vektor \vec{r}' gemäß

$$\vec{r}' = A \cdot \vec{r} = \lambda \cdot \vec{r}$$

Dann ist \vec{r} ein von A und λ ist ein

Voraussetzung ist $\lambda \neq \dots\dots\dots$ und $\vec{r} \neq \dots\dots\dots$

3

19

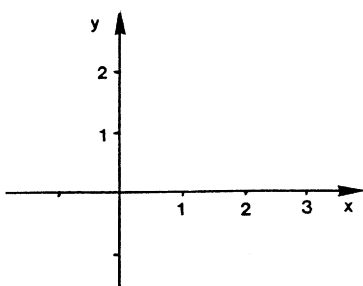
JA $(A - \lambda_2 E) \cdot \vec{r}_{21} = 0$

NEIN $(A - \lambda_1 E) \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \neq 0$

Zeichnen Sie die beiden Eigenvektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2

ein für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



20

36

Charakteristische Gleichung für A : $\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 16 = 0$

Da wir einen Eigenwert bereits kennen, können wir einen Linearfaktor herausziehen und die charakteristische Gleichung wie folgt schreiben:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 16 = (\lambda - \lambda_1) (\dots\dots\dots)$$

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 16 = (\lambda + 2) (\dots\dots\dots)$$

Hinweis: Lösen Sie den Ausdruck

$$\frac{\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 16}{\lambda + 2} = \dots\dots\dots$$

37

3

Eigenvektor Eigenwert $\lambda \neq 0$ $\vec{r} \neq 0$

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Die folgende Gleichung hat einen Namen:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

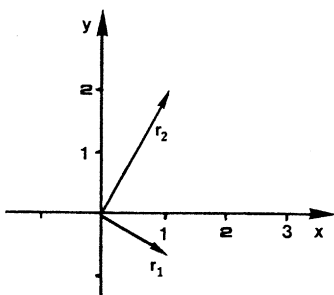
Die Gleichung heißt

E ist die

Die Gleichung lautet ausführlich geschrieben

$$\det \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = 0 \quad \text{-----} \triangleright 4$$

20



Zeigen Sie, daß \vec{r}_1 und \vec{r}_2 rechtwinklig aufeinander stehen

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hilfe ----- \triangleright 21

Beweis gefunden ----- \triangleright 22

37

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 16 = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda - 8)$$

Hinweis: $\frac{\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 16}{\lambda + 2} = \lambda^2 + 2\lambda - 8$

Verifizieren Sie im Zweifel.

Lösen Sie die quadratische Gleichung und bestimmen Sie die Eigenwerte λ_2 und λ_3

$$\lambda_2 = \dots$$

$$\lambda_3 = \dots$$

----- \triangleright 38

4

Charakteristische Gleichung, Einheitsmatrix

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Gesucht seien die Eigenwerte von A . Wir gehen schrittweise vor. Geben Sie zunächst an

Charakteristische Gleichung in Kurzform:

Charakteristische Gleichung ausführlich notiert

5

21

Hier ist ein Hinweis:

Das innere Produkt rechtwinklig aufeinander stehender Vektoren verschwindet. Bilden Sie

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \text{ für } \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \dots$$

22

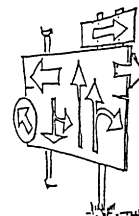
38

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = -4$$

Suchen Sie nun einen Eigenvektor für λ_2

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$



Lösung gefunden

42

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

39

5

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Bestimmen Sie jetzt die Eigenwerte

$$\lambda_1 = \dots\dots\dots$$

$$\lambda_2 = \dots\dots\dots$$

Lösung

----- ▷ 7

Erläuterung oder Hilfe

----- ▷ 6

22

$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$ Das innere Produkt der Vektoren $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschwindet.

Also stehen die Vektoren rechtwinklig aufeinander.

Mit anderen – gelehrten – Worten, sie sind

----- ▷ 23

39

Ein Eigenvektor für die gegebene Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ und den Eigenwert $\lambda_2 = 2$

erfüllt die Gleichung: $(A - \lambda_2 E) \cdot \vec{r}_2 = 0$. Also $(A - 2E) \cdot \vec{r}_2 = 0$

Das entspricht dem Gleichungssystem

$$\dots\dots\dots = 0$$

$$\dots\dots\dots = 0$$

$$\dots\dots\dots = 0$$

----- ▷ 40

6

Die Eigenwerte sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Die Determinante ist in diesem Fall

$$(2-\lambda) \cdot (5-\lambda) - 2 \cdot 2 = 0$$

Ausmultipliziert:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

Das ergibt

$$\lambda_1 = \dots\dots\dots$$

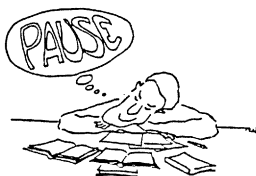
$$\lambda_2 = \dots\dots\dots$$

----- ▷ 7

23

orthogonal

Sie wissen doch, auch die Fachsprache muß man lernen und üben.



----- ▷ 24

40

$$-3x_2 - y_2 + 2z_2 = 0$$

$$-x_2 - 3y_2 - 2z_2 = 0$$

$$2x_2 - 2y_2 - 4z_2 = 0$$

Addiert man die beiden oberen Gleichungen erhält man

$$x_2 = \dots$$

Mit diesem Resultat folgt aus der unteren Gleichung

$$z_2 = \dots$$

----- ▷ 41

7

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 6$

Nachdem wir die Eigenwerte für A gefunden haben, suchen wir noch die Eigenvektoren.
Die Eigenvektoren müssen genügen der folgenden Gleichung



8

24

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 3×3 -Matrix Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

21.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer 3×3 -Matrix

21.4 Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

Lehrbuch, Seite 165 - 168

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschrift

25

41

$x_2 = -y_2 \quad z_2 = x_2 \quad \text{oder} \quad z_2 = -y_2$

Einen Eigenvektor erhalten wir, wenn wir wählen $x_2 = 1$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots \end{pmatrix}$$

42

8

$$A\vec{r} = \lambda \cdot \vec{r} \quad \text{oder} \quad (A - \lambda E) \cdot \vec{r} = 0$$

Die erste Gleichung bedeutet: Wird der Vektor \vec{r} mit A multipliziert, ändert er seine Richtung nicht. Er ändert nur seinen Betrag um den Faktor λ . Die zweite Gleichung ergibt sich durch Umformung.

Gegeben war $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$

Gesucht sind die Eigenvektoren für λ_1 und λ_2 . Beginnen wir mit λ_1 und dem

Eigenvektor $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Für \vec{r}_1 gilt folgende Matrixgleichung: = 0

----- > 9

25

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Die Matrix hat ... Eigenvektoren.

Die Matrix ist

Über die Richtungen der Eigenvektoren läßt sich sagen: Die Eigenvektoren sind

----- > 26

42

$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Hinweis: Jeder Vektor $\vec{r}_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor.

Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ kennen wir bereits die

Eigenwerte: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -4$ und die Eigenvektoren $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir können nun \vec{r}_3 in gleicher Weise bestimmen.

Einfacher geht es, wenn wir den Satz auf Seite 168 im Lehrbuch beachten: Eine symmetrische Matrix hat Eigenvektoren, die sind. ----- > 43

$$(A - \lambda_1 E) \cdot \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 2 & 5-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$$

Dieser Ausdruck entspricht zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\dots\dots\dots = 0$$

$$\dots\dots\dots = 0$$

Es handelt sich um ein $\dots\dots\dots$ Gleichungssystem.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Matrix A mit dem Vektor $r_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ aus.

----- > 10

Drei Eigenvektoren

Die Matrix ist symmetrisch.

Bei symmetrischen Matrizen sind die Eigenvektoren orthogonal.

Gegeben sei wieder $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Verifizieren Sie, daß $\lambda_1 = -2$ ein Eigenwert ist.

Bestimmen Sie einen Eigenvektor \vec{r}_1 : $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots \end{pmatrix}$

Lösung ----- > 33

Erläuterung oder Hilfe ----- > 27

orthogonal

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch.

Also ist \vec{r}_3 orthogonal zu $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir erinnern uns, daß das Vektorprodukt $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ ein Vektor ist, der orthogonal zu \vec{r}_1 und \vec{r}_2 ist. Damit erhalten wir einen dritten Eigenvektor in dem wir das Vektorprodukt bilden:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \dots\dots\dots$$

----- > 44

10

$$\begin{aligned} x_1 + 2y_1 &= 0 \\ 2x_1 + 4y_1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{homogenes Gleichungssystem}$$

Eine nichttriviale Lösung existiert, falls eine Gleichung oben von der anderen linear abhängt. Die Lösung führt dann zu den Komponenten des Eigenvektors \vec{r}_1 .

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Lösung gefunden ▷ 12
 Erläuterung oder Hilfe erwünscht ▷ 11

27

Um zu verifizieren, daß $\lambda_1 = -2$ ein Eigenwert ist, muß gelten:

$$\det(A - \lambda_1 E) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie nun

$$\det(A - \lambda_1 E) = \dots\dots\dots$$

Lösung ▷ 29
 Erläuterung oder Hilfe ▷ 28

44

$$\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{r}_3 = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Wieviele reelle Eigenwerte kann eine $n \times n$ -Matrix haben? ...

b) Gibt es Matrizen, die keine reellen Eigenwerte haben?

Könnten Sie dafür gegebenenfalls ein Beispiel nennen?

..... ▷ 45

11

Gegeben ist $x_1 + 2y_1 = 0$

$$2x_1 + 4y_1 = 0$$

Die zweite Gleichung ist das Doppelte der ersten. Also sind beide Gleichungen linear abhängig.

Zunächst gilt $x_1 = -2y_1$ Es gilt aber auch $ax_1 = -a2y_1$

x_1 ist also frei wählbar. Wir wählen $x_1 = 1$. Daraus folgt $y_1 = -\frac{1}{2}$

Damit erhalten wir $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

----- ▷ 12

28

Zu berechnen ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda_1 E) &= \det \begin{pmatrix} -1 - (-2) & -1 & 2 \\ -1 & -1 - (-2) & -2 \\ 2 & -2 & -2 - (-2) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit den bekannten Rechenvorschriften, beispielsweise der Regel von Sarrus, erhalten wir:

$$\det(A - \lambda_1 E) = \dots$$

----- ▷ 29

45

a) n

b) Ja

Ein Beispiel sind Drehmatrizen. Dargestellt sind sie im Abschnitt 19.4.

Bisher haben wir als Beispiele nur symmetrische Matrizen behandelt. Betrachten Sie nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = \dots \quad \lambda_2 = \dots \quad \vec{r}_1 = \dots \quad \vec{r}_2 = \dots$$

Lösung gefunden

----- ▷ 47

Erläuterung oder Hilfe erwünscht

----- ▷ 46

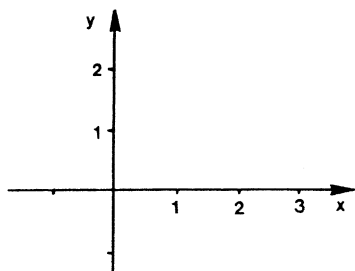
12

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Hätten wir $x_1 = 2$ gewählt, hätten wir erhalten: $\vec{r}_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Allgemein gilt $\vec{r}_{13} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Zeichnen Sie \vec{r}_1 , \vec{r}_{12} und \vec{r}_{13} mit $a = -1$.



----- ▷ 13

29

$$\det (A - \lambda_1 E) = 0$$

Damit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst, $\lambda_1 = -2$ ist ein Eigenwert.

Zu bestimmen ist noch ein Eigenvektor für $\lambda_1 = -2$. Dafür müssen Sie ein Gleichungssystem lösen.

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Lösung

----- ▷ 33

Hilfe und weitere Erläuterung

----- ▷ 30

46

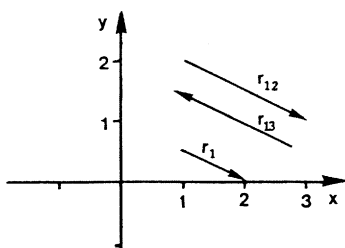
Die Lösung folgt genau den bisher demonstrierten Beispielen. Lösen Sie das Beispiel entweder anhand des Lehrbuches, Abschnitt 21.1 oder anhand der Beispiele und Erläuterungen im Leitprogramm ab Lehrschrift 4 und ab Lehrschrift 26.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \dots \quad \lambda_2 = \dots \quad \vec{r}_1 = \dots \quad \vec{r}_2 = \dots$$

----- ▷ 47

13



Hinweis: Die Vektoren können an beliebigen Stellen gezeichnet werden. Die Wirkungslinie aller Vektoren hat die gleiche Richtung. Die Eigenvektoren sind also durch die Richtung der Wirkungslinie bestimmt. Frei und unbestimmt ist der Betrag einschließlich des Vorzeichens.

Verifizieren Sie numerisch, daß gilt

$$A\vec{r}_1 = \lambda_1 \vec{r}_1 \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und } \lambda_1 = 1 \quad \text{und } \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

.....

----- > 14

30

Als Matrixgleichung gilt für Eigenvektoren

$$A\vec{r}_1 = \lambda \cdot \vec{r}_1 \quad \text{mit } \lambda_1 = -2 : A\vec{r}_1 = -2\vec{r}_1$$

Umformung

$$(A - \lambda_1 E) \cdot \vec{r}_1 = 0 \quad \text{mit } \lambda_1 = -2 \text{ erhalten wir}$$

$$(A + 2E) \cdot \vec{r}_1 = 0$$

Schreiben Sie nun das vollständige Gleichungssystem mit $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

$$\dots\dots\dots = 0$$

$$\dots\dots\dots = 0$$

$$\dots\dots\dots = 0$$

----- > 31

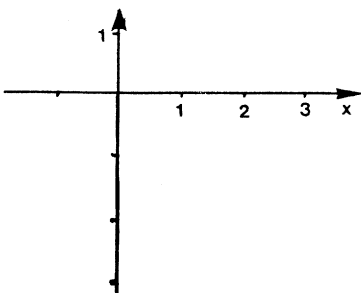
47

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = -2$$

Hinweis: Charakteristische Gleichung $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



a) Zeichnen Sie \vec{r}_1 und \vec{r}_2 in das Diagramm

b) Sind \vec{r}_1 und \vec{r}_2 orthogonal? ☐ ja ☐ nein

c) Prüfen Sie rechnerisch die Orthogonalität von \vec{r}_1 und \vec{r}_2 .

----- > 48

14

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der zweite Eigenwert für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ war $\lambda_2 = 6$.

Bestimmen Sie nun analog drei gleichwertige Eigenvektoren:

$$r_{21} = \dots\dots\dots r_{22} = \dots\dots\dots r_{23} = \dots\dots\dots$$

Erläuterung oder Hilfe erwünscht > 15

Lösung* > *18

* Die Lehrschritte ab 18 befinden sich **auf der Mitte** der Seiten.

Sie finden Lehrschritt 18 unterhalb Lehrschritt 1.

BLÄTTERN SIE ZURÜCK

31

$$x_1 - y_1 + 2z_1 = 0$$

$$-x_1 + y_1 - 2z_1 = 0$$

$$2x_1 - 2y_1 = 0$$

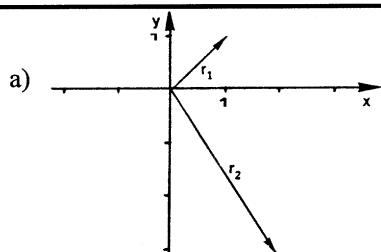
Die ersten beiden Gleichungen sind linear abhängig. Wird nämlich die zweite Gleichung mit (-1) multipliziert, erhalten wir die erste. Nun ist es möglich, aus der dritten und der ersten Gleichung eine Lösung für einen Eigenwert zu ermitteln.

$$x_1 = \dots\dots\dots$$

$$z_1 = \dots\dots\dots$$

..... > 32

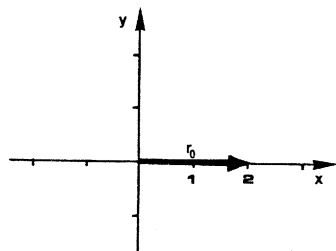
48



b) nein

$$c) \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = (1, 1) (2, -3) = -1 \neq 0$$

Hinweis: Das Skalarprodukt orthogonaler Vektoren muß verschwinden. Hier ist das nicht der Fall.



Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und der

$$\text{Vektor } \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie den Vektor $A \cdot \vec{r}_0 = \vec{r}_1$

..... > 49

15

Für $\lambda_2 = 6$ gilt $A\vec{r}_2 = 6\vec{r}_2$ oder $(A - 6E)\vec{r}_2 = 0$

Also gilt $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ oder

$$\begin{pmatrix} 2-6 & 2 \\ 2 & 5-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

Das ergibt folgende Gleichungen

$$\dots\dots\dots = 0$$

$$\dots\dots\dots = 0$$

----- > 16

32

$$x_1 = y_1$$

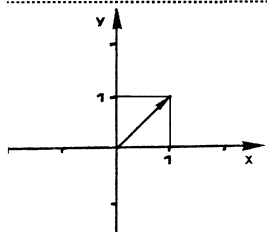
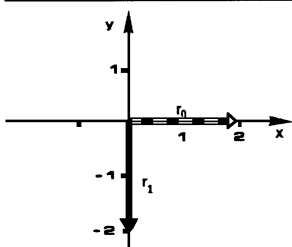
$$z_1 = 0$$

Wählen wir $x_1 = 1$ erhalten wir:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots \end{pmatrix}$$

----- > 33

49



Ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ symmetrisch? ☐ Ja ☐ Nein

Gegeben sei $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie den Vektor $\vec{r} = A \cdot \vec{r}_0$

Die Matrix A bewirkt eine ----- > 50

16

$$-4x_2 + 2y_2 = 0$$

$$2x_2 - y_2 = 0$$

Sind die Gleichungen linear abhängig? Geben Sie eine Lösung an

$$x_2 = \dots\dots\dots$$

Geben Sie einen Eigenvektor an $\vec{r}_{21} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

----- ▷ 17

33

$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Hinweis: Alle Vektoren der Form $\vec{r}_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren.

Die Lösung des homogenen Gleichungssystems führte auf

$$x_1 = y_1 \text{ und } z_1 = 0$$

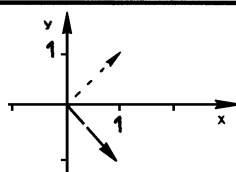
Die Musterlösung oben galt für $x_1 = 1$. Wir könnten auch wählen $x_1 = 0,001$. Dann erhielten wir den Eigenvektor

$$\vec{r}_{11} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$$

----- ▷ 34

50

Nein



Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ bewirkt eine Drehung um den Winkel $-\frac{\pi}{2}$.

Hat A reelle Eigenwerte? ☐ Ja ☐ Nein

Können Sie Ihre Antwort beweisen?

----- ▷ 51

17

Ja

$$x_2 = \frac{1}{2}y_2 \quad \text{oder} \quad 2x_2 = y_2$$

$$\vec{r}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie insgesamt drei gleichwertigen Eigenvektoren zu \vec{r}_{21} an

$$\vec{r}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_{22} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \quad \vec{r}_{23} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$$

----- ▷ 18

34

$$\vec{r}_{11} = \begin{pmatrix} 0,001 \\ 0,001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie nun, daß $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Tat ein Eigenvektor ist für $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Es muß gelten für $\lambda_1 = -2$

$$A \cdot \vec{r}_1 = \lambda_1 \vec{r}_1 = -2\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

----- ▷ 35

51

Nein. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine Drehmatrix.

Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + 1 = 0$. λ ist nicht reell sondern imaginär.

Wenn Sie das Leitprogramm bis hierher durchgearbeitet haben, haben Sie wesentliches erreicht. Sie haben sich ein solides Grundlagenwissen in der anwendungsorientierten Mathematik erarbeitet. Sie haben darüber hinaus gelernt, daß stetige Arbeit zu bemerkenswerten Fortschritten führt. Sie haben erfahren, daß auch weite Wege aus einzelnen Schritten bestehen – und daß jeder Schritt Sie etwas weiter bringt. Sie werden so auch die Aufgaben meistern, die später noch in Ihrem Studium und in Ihrem Beruf auf Sie zukommen werden.

**Dafür wünschen Ihnen alle, die an diesem Leitprogramm mitgearbeitet haben,
gutes Gelingen!**