
Kapitel 22

0

Fourierreihen

22.1 Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourierreihe

1

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass jede periodische Funktion als Summe von trigonometrischen Funktionen dargestellt werden kann.

Für die Physik ist dies sehr bedeutsam.

Zum Beispiel hängen bei der Übertragung von periodischen Signalen durch technische Systeme die Übertragungseigenschaften einer trigonometrischen Funktion von der Frequenz ab. Kennt man diese, so kann man daraus auf die Übertragungseigenschaften und gegebenenfalls Verformungen des Ausgangssignals schließen.

-----> 2

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1) \cdot dt = -1 + 1 = 0$$

30

Berechnen Sie nun die b_n für unsere Rechteckfunktion $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < \pi \end{cases}$

Schreiben Sie abschnittsweise:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin nt \, dt = \dots\dots\dots$$

-----> 31

Für $t = T$ wird $x = 2\pi$.

59

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos\left(\frac{n2\pi}{T}t\right) \cdot \frac{2\pi}{T} dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos\left(\frac{n2\pi}{T}t\right) dt$$

-----> 60

Im Folgenden werden mehrfach die Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen benutzt.

2

Das Verständnis der Argumentationen wird für Sie erheblich leichter, wenn Sie einige der in den Kapiteln 3, 5 und 8 des Lehrbuchs Band 1 bereits behandelten Beziehungen zur Vorbereitung rekapitulieren.

Geben Sie an:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \, dx = \dots\dots\dots$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \, dx = \dots\dots\dots$$

-----> 3

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \sin(nt) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) \, dt$$

31

Lösen Sie nun die Integrale auf und beachten Sie die Integrationsgrenzen.

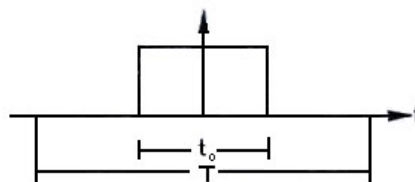
$$b_n = \dots\dots\dots$$

-----> 32

Berechnen Sie die Fourierreihe für eine Rechteckfunktion, die hier als zeitlich aufgefasst werden soll. Die Funktion stellt dann einen Rechteckimpuls der Dauer t_0 dar, der sich mit der Periode T wiederholt.

60

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} \leq t \leq -\frac{t_0}{2} \\ 1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} \leq t \leq \frac{t_0}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{t_0}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$



Weil es sich um eine gerade Funktion handelt, sind alle $b_n = 0$

Wir müssen abschnittsweise vorgehen. Da $f(t) = 0$ für den ersten und den dritten Abschnitt, brauchen wir nur die Integrale für den mittleren Abschnitt zu berechnen:

$$\text{Wir beginnen mit der Berechnung von } a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt = \dots\dots\dots$$

-----> 61

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \, dx = 0$$

3

Erinnerung an die Additionstheoreme.

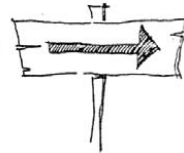
Im Zweifel nachsehen im Lehrbuch Band 1, Seite 77.

$$\sin(n+m)x = \dots\dots\dots$$

$$\sin(n-m)x = \dots\dots\dots$$

$$\cos(n+m)x = \dots\dots\dots$$

$$\cos(n-m)x = \dots\dots\dots$$



-----> 4

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[(-1) \cdot \left(-\frac{\cos 0}{n} \right) - (-1) \cdot \left(-\frac{\cos(-n\pi)}{n} \right) \right] + \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{\cos n\pi}{n} \right) - \left(-\frac{\cos 0}{n} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} [1 - \cos(-n\pi) + 1 - \cos(n\pi)]$$

32

$$b_n = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi]$$

Geben Sie nun an: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dots\dots\dots$

-----> 33

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} f(t) dt = 2 \frac{t_0}{T}$$

61

Jetzt berechnen wir die weiteren a_n :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt = \dots\dots\dots$$

Aufgabe gelöst

-----> 63

Hilfe erwünscht

-----> 62

$$\sin(n+m)x = \sin nx \cdot \cos mx + \sin mx \cdot \cos nx$$

4

$$\sin(n-m)x = \sin nx \cdot \cos mx - \sin mx \cdot \cos nx$$

$$\cos(n+m)x = \cos nx \cdot \cos mx - \sin nx \cdot \sin mx$$

$$\cos(n-m)x = \cos nx \cdot \cos mx + \sin nx \cdot \sin mx$$

Mit Hilfe der obigen Additionstheoreme lassen sich folgende Beziehungen herleiten, die wir mehrfach benutzen werden. Diese Aufgaben sind etwas mühselig aber lösbar.

$$\sin nx \cdot \cos mx = \dots\dots\dots$$

$$\cos nx \cdot \cos mx = \dots\dots\dots$$

$$\sin nx \cdot \sin mx = \dots\dots\dots$$



Lösungen gefunden

-----> 11

Hilfe bei der Herleitung

-----> 5

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \cdot \sin(nt)$$

33

Schreiben Sie die Reihe ausführlich für die ersten drei Glieder auf und beachten Sie $\cos n\pi = (-1)^n$

$$f(t) \approx \frac{2}{\pi} [\dots\dots\dots]$$

-----> 34

$$\text{Zu berechnen ist } a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

62

Wir haben für den mittleren Abschnitt $f(t)=1$ für $-\frac{t_0}{2} < t < \frac{t_0}{2}$

$$\text{Wir erinnern uns: } \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt = \left[\frac{T}{2\pi n} \cdot \sin \frac{2\pi n \cdot t}{T} \right]_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}}$$

Jetzt können wir einsetzen und die Grenzen beachten:

$$a_n = \dots\dots\dots$$

-----> 63

Wir beginnen mit der ersten Aufgabe:

$$\sin nx \cdot \cos mx = \dots\dots\dots$$

5

Wir benutzen die Additionstheoreme

$$\sin(n+m)x = \sin nx \cdot \cos mx + \sin mx \cdot \cos nx$$

$$\sin(n-m)x = \sin nx \cdot \cos mx - \sin mx \cdot \cos nx$$

Addieren wir beide Zeilen, so erhalten wir:

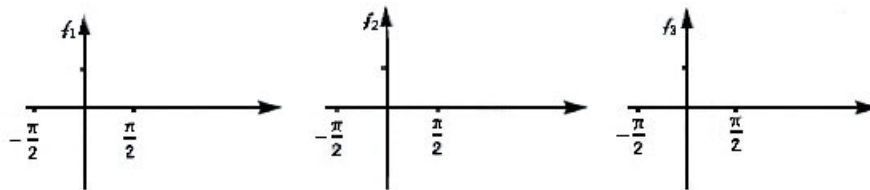
$$\sin(n+m)x + \sin(n-m)x = \dots\dots\dots$$

-----> 6

$$f(t) \approx \frac{2}{\pi} \left[\frac{2}{1} \sin t + \frac{2}{3} \sin 3t + \frac{2}{5} \sin 5t \right]$$

34

Skizzieren Sie diese drei Glieder:



-----> 35

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{n 2\pi} \cdot 2 \sin \frac{n\pi \cdot t_0}{T} = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi \cdot t_0}{T}$$

63

Mit $a_0 = \frac{2t_0}{T}$ wird nun die Fourierreihe für das Rechtecksignal der Dauer t_0 und der Periode T zu

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

-----> 64

$$\sin(n+m)x + \sin(n-m)x = 2 \sin nx \cdot \cos mx$$

6

Daraus folgt bereits die Lösung der ersten Aufgabe:

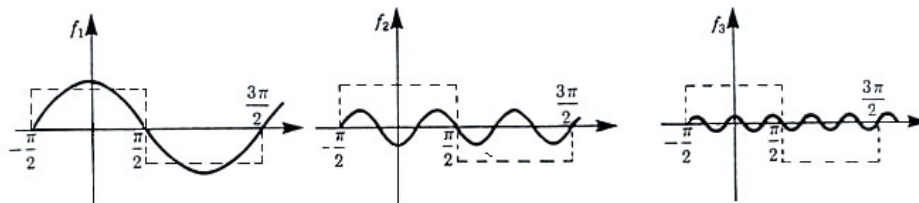
$$\sin nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2} \sin(n+m)x + \frac{1}{2} \sin(n-m)x$$

In der entsprechenden Weise können Sie nun die zweite Aufgabe lösen:

$$\cos nx \cdot \cos mx = \dots\dots\dots$$

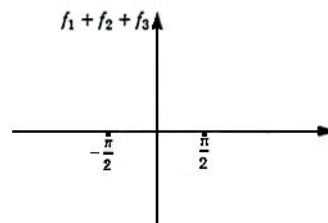
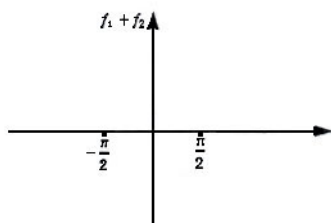
Lösung gefunden -----> 8

Weitere Hilfe erwünscht -----> 7



35

Zeichnen Sie die Summe der zwei ersten Glieder $f_1 + f_2$ und danach die der drei Glieder $f_1 + f_2 + f_3$



-----> 36

$$f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi \cdot t_0}{T} \cdot \cos \frac{n 2\pi \cdot t}{T}$$

64



Noch eine Übung erwünscht -----> 65

Weiter -----> 70

Die zweite Aufgabe war:

$$\cos nx \cdot \cos mx = \dots\dots\dots$$

7

Wir benutzen diesmal die Additionstheoreme, in denen Produkte von cos-Funktionen vorkommen.

$$\cos(n+m)x = \cos nx \cdot \cos mx - \sin nx \cdot \sin mx$$

$$\cos(n-m)x = \cos nx \cdot \cos mx + \sin nx \cdot \sin mx$$

Wir addieren beide Zeilen und erhalten:

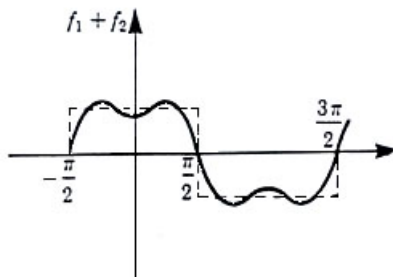
$$\cos(n+m)x + \cos(n-m)x = \dots\dots\dots$$

Damit ist die Lösung gefunden:

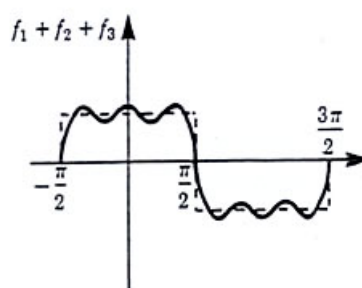
$$\cos nx \cdot \cos mx = \dots\dots\dots$$

-----> 8

Überlagerung von zwei Gliedern



Überlagerung von drei Gliedern



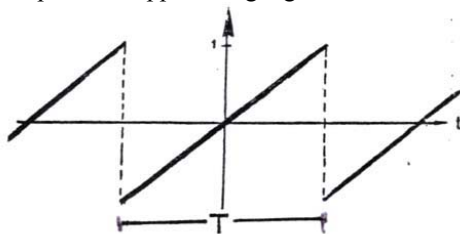
36

Man kann gut erkennen, wie sich die Rechteckschwingung schrittweise aufbaut.

-----> 37

Wir betrachten das im Lehrbuch, Seite 179, bereits für die Periode 2π berechnete Beispiel der Kippschwingung nunmehr für die beliebige Periode T .

65



Diese Kippschwingung ist definiert durch $f(t) = \dots\dots\dots$

Hinweis: Für $t = \frac{T}{2}$ wird $f(t) = 1$.

-----> 66

$$\cos nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2} \cos(n+m)x + \frac{1}{2} \cos(n-m)x$$

8

In entsprechender Weise lösen wir auch die dritte Aufgabe:

$$\sin nx \cdot \sin mx = \dots\dots\dots$$

Hinweis: Benutzen Sie die Additionstheoreme, in denen das Produkt von Sinusfunktionen vorkommt.



Lösung gefunden -----> 10

Noch eine Hilfe nötig? -----> 9

Falls Sie die Beispiele im Lehrbuch und hier im Leitprogramm schrittweise ohne größere Schwierigkeiten mitgerechnet haben, können Sie die nächste Übung überspringen.



37

-----> 56

Falls Sie jedoch Schwierigkeiten hatten, sollten Sie besser noch die folgende Übung rechnen, bei der die Umformungen erläutert werden.

-----> 38

$$f(t) = \frac{2}{T} \cdot t \quad \text{für} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

66

Wir stellen fest: $f(t)$ ist ungerade. Also sind alle $a_n = 0$ und wir brauchen nur die b_n zu berechnen.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin\left(\frac{n2\pi}{T}t\right) dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \sin\left(\frac{n2\pi}{T}t\right) dt$$

Das Integral wird durch partielle Integration berechnet: $b_n = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden -----> 68

Hilfe und Erläuterung erwünscht -----> 67

Zu lösen ist: $\sin nx \cdot \sin mx = \dots\dots\dots$

9

Wir benutzen

$$\cos(n+m)x = \cos nx \cdot \cos mx - \sin nx \cdot \sin mx$$

$$\cos(n-m)x = \cos nx \cdot \cos mx + \sin nx \cdot \sin mx$$

Wir subtrahieren die Gleichungen und erhalten

$$\cos(n+m)x - \cos(n-m)x = \dots\dots\dots$$

Damit ist die Lösung gefunden

$$\sin nx \cdot \sin mx = \dots\dots\dots$$

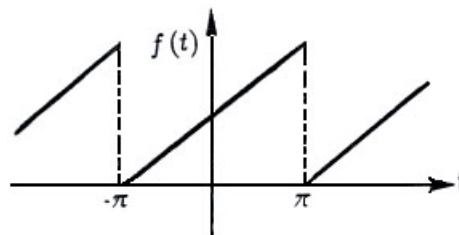
-----> 10

Gegeben sei jetzt eine Sägezahnkurve, die eine Kippschwingung darstellt.

38

Hier brauchen wir nicht abschnittsweise vorzugehen. Die Funktion ist für die ganze Periode durch einen Term definiert.

$$f(t) = \left(\frac{t}{\pi} + 1\right) \quad \text{für} \quad -\pi < t < \pi$$



$$\text{Berechnung von } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{t}{\pi} + 1\right) dt$$

$$\text{Dieses einfache Integral ist sofort ausgewertet zu: } a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\dots\dots\dots \right]_{-\pi}^{\pi}$$

-----> 39

$$\text{Zu berechnen ist: } b_n = \left(\frac{2}{T}\right)^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin\left(\frac{n2\pi}{T}t\right) dt$$

67

$$\text{Erinnerung an die partielle Integration: } \int u \cdot v' = [u \cdot v] - \int u' \cdot v$$

$$\text{Mit } u = t \text{ und } v' = \sin\left(\frac{n2\pi}{T}t\right) dt \text{ gilt weiter } u' = 1 \text{ und } v = -\cos\frac{n2\pi}{T}t \cdot \frac{T}{2\pi n}$$

Dies brauchen Sie nur in das obige Integral einzusetzen und geduldig zu rechnen.

$$b_n = \left(\frac{2}{T}\right)^2 \left(\left[\dots\dots\dots \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\dots\dots\dots \right] \right)$$

-----> 68

$$\cos(n+m)x - \cos(n-m)x = -2 \cos nx \cdot \sin mx$$

$$\sin nx \cdot \sin mx = \frac{1}{2} \cos(n-m)x - \frac{1}{2} \cos(n+m)x$$

10

Damit haben wir die drei wichtigsten Beziehungen gefunden, die wir bei der Herleitung von Fourierreihen benötigen werden:

$$\sin nx \cdot \cos mx = \dots\dots\dots$$

$$\cos nx \cdot \cos mx = \dots\dots\dots$$

$$\sin nx \cdot \sin mx = \dots\dots\dots$$

-----▷ 11

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2\pi} + t \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} [\pi - (-\pi)] = 2$$

39

Nun beachten wir, dass die hier zu behandelnde Kippschwingung $f(t)$ durch Koordinatenverschiebung in Richtung der y -Achse $f(t) - 1 = g(t)$ in die im Lehrbuch (Seite 179) behandelte ungerade Kippschwingung überführt werden kann, für die galt $a_n = 0$ für alle $n > 0$.

Wir können also vermuten, dass auch für $f(t)$ für alle $n > 0$ gilt $a_n = 0$.



Will die Berechnung der a_n überspringen -----▷ 46

Will die a_n berechnen -----▷ 40

$$b_n = \left(\frac{2}{T} \right)^2 \left[\left[t \left(-\cos \left(\frac{n 2\pi}{T} t \right) \cdot \frac{T}{n 2\pi} \right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \left[-\cos \left(\frac{n 2\pi}{T} t \right) \cdot \frac{T}{n 2\pi} \right] \right]$$

68

Das verbleibende Integral ist elementar lösbar und verschwindet wegen $\sin \left(\frac{n 2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) = \sin(n 2\pi) = 0$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{n 2\pi}{T} t \right) = \frac{T}{n 2\pi} \left[\sin \left(\frac{n 2\pi}{T} t \right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$$

Damit wird $b_n = \left(\frac{2}{T} \right)^2 \dots\dots\dots$

(Hinweis: $-\cos n\pi = (-1)^{n+1}$)

-----▷ 69

$$\sin nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2} \sin(n+m)x + \frac{1}{2} \sin(n-m)x$$

11

$$\cos nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2} \cos(n+m)x + \frac{1}{2} \cos(n-m)x$$

$$\sin nx \cdot \sin mx = \frac{1}{2} \cos(n-m)x - \frac{1}{2} \cos(n+m)x$$

Notieren Sie sich auf einem separaten Zettel diese Ergebnisse sowie $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \, dx = 0$

Jetzt haben wir uns alle Voraussetzungen erarbeitet, um unser eigentliches Ziel zu erreichen.
Lesen Sie nun sorgfältig, alle Umformungen begleitend

22.1 Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourierreihe Lehrbuch Seite 172 – 176

Danach

-----> 12

Berechnung der a_n für die gegebene Sägezahnkurve

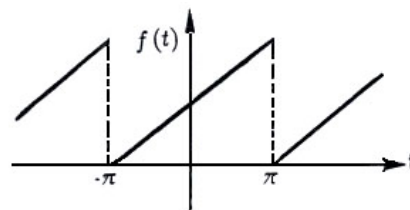
40

$$f(t) = \left(\frac{t}{\pi} + 1 \right) \quad \text{für } -\pi < t < \pi$$

Zu berechnen ist: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) \, dt$

Wir setzen $f(t)$ in das Integral ein und erinnern uns:
Das Integral über eine Summe ist die Summe der
Integrale.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \dots + \int_{-\pi}^{\pi} \dots \right]$$



-----> 41

$$b_n = \left(\frac{2}{T} \right)^2 \left[2 \left(\frac{T}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{n \cdot \pi} (-1)^{n+1} \right] = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

69

Damit wird die Fourierreihe der Kippschwingung mit der Periode T zu

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin\left(\frac{n2\pi}{T} t\right)$$

Dies entspricht dem Ergebnis auf Seite 179 des Lehrbuchs.

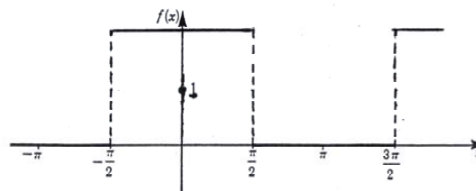
-----> 70

Schwierigkeiten beim Nachvollziehen der Argumentation könnten daraus resultieren, dass Ihnen die Beziehungen der trigonometrischen Funktionen, die wir in den vorbereitenden Lehrschritten übten, noch nicht geläufig genug sind. Notfalls die Herleitungen auf separatem Zettel noch einmal anhand des Lehrbuchs rechnen!

12

Mit der Zusammenfassung im Lehrbuch auf Seite 176 oben wollen wir die Fourierreihe angeben für die Rechteckfunktion $f(x)$, die im Intervall von $-\pi < x < \pi$ definiert ist.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\pi \end{cases}$$



$f(x) = \dots\dots\dots$



Lösung gefunden

-----> 21

Hilfe und Erläuterungen

-----> 13

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{t}{\pi} + 1 \right) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \cos nt \, dt}_{\text{Integral 1}} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt}_{\text{Integral 2}} \right]$$

41

Beide Integrale in der Klammer sind nun zu berechnen. Integral 1 kann mit Hilfe der partiellen

Integration ausgewertet werden: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \cos nt \, dt = \dots\dots\dots$



Lösung selbständig gefunden

-----> 45

Erinnerung an partielle Integration gewünscht

-----> 42

Ausführliche Lösung

-----> 44

22.4 Fourierreihe in spektraler Darstellung

70

Vermutlich völlig überflüssige Erinnerung: $\sin \frac{n2\pi}{T} t = \sin \omega t$, wobei $\omega = \frac{n2\pi}{T}$

STUDIEREN Sie

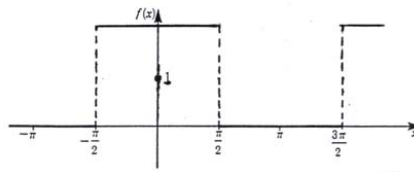
22.4 Fourierreihe in spektraler Darstellung
Lehrbuch Seite 181 – 182

-----> 71

Zu berechnen ist die Rechteckfunktion, die definiert ist durch:

13

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\pi \end{cases}$$



Das heißt, die Funktion ist abschnittsweise definiert. Für die Berechnung der Koeffizienten in der Übersicht (22.3) auf Seite 176 im Lehrbuch müssen wir die Integrale für jeden Abschnitt separat berechnen. Beginnen wir mit a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden -----> 15

Hilfe und Erläuterung -----> 14

Die partielle Integration ermöglicht in vielen Fällen die Integration von Produkten. Sie ist im Lehrbuch Band 1 auf Seite 149 hergeleitet und sollte gegebenenfalls dort nachgelesen werden. Erinnern wir uns: Es seien $u(t)$ und $v(t)$ zwei verschiedene

42

Funktionen. Dann gilt für beliebige Grenzen a und b $\int_a^b u \cdot v' = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v$

In unserem Fall war Integral 1: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \cos nt \, dt$

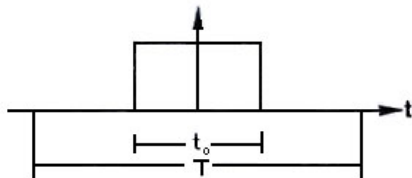
Wir setzen: $u = \frac{t}{\pi}$ $v' = \cos nt$. Daraus erhalten wir

$u' = \dots\dots\dots$ $v = \dots\dots\dots$

-----> 43

Wir berechnen jetzt das Frequenzspektrum für die Rechteckschwingung, deren Fourierreihe wir soeben in den Lehrschritten 60 – 64 berechneten.

71



$$\text{Es war: } f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi t_0}{T} \cdot \cos \frac{n2\pi t}{T}$$

Berechnen Sie die a_n für $n=1$ bis $n=8$, für $T=2$ und $t_0=1$

$a_1 = \dots\dots\dots$ $a_2 = \dots\dots\dots$ $a_3 = \dots\dots\dots$ $a_4 = \dots\dots\dots$
 $a_5 = \dots\dots\dots$ $a_6 = \dots\dots\dots$ $a_7 = \dots\dots\dots$ $a_8 = \dots\dots\dots$

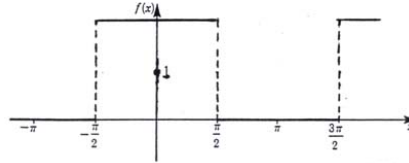


Aufgabe gelöst -----> 73

Hilfe erwünscht -----> 72

Zu berechnen ist $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx$

$$\text{Es war } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\pi \end{cases}$$



14

Das Integral ist über das gesamte Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ zu erstrecken. Dort ist die Funktion in drei Abschnitten definiert.

Das vollständige Integral ist die Summe der drei Teilintegrale, die sich für jeden Abschnitt ergeben.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{+\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx$$

Jetzt muss die Funktion für jeden Abschnitt eingesetzt werden, um die drei Integrale zu erhalten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \dots\dots\dots \rightarrow 15$$

$$u' = \frac{1}{\pi} \quad v = \frac{1}{n} \sin nt$$

43

$$\text{Es war: } u = \frac{t}{\pi} \quad v' = \cos nt$$

Im Zweifel verifizieren Sie dies, indem Sie die Ableitungen bilden. Nun brauchen Sie nur noch die obigen Funktionen in die bekannte Formel für die partielle Integration einzusetzen.

$$\int_{-\pi}^{\pi} u \cdot v' = [u \cdot v]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u' \cdot v$$

$$\text{Damit erhalten wir für das Integral 1: } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \cos nt \, dt = \dots\dots\dots$$

-----> 44

$$\text{Die } a_n \text{ sind in unserem Fall gegeben durch: } a_n = \frac{2}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi t_0}{T}$$

72

Wir formen um und setzen ein: $T = 2$, $t_0 = 1$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \cdot \sin \left(n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

Damit erhalten wir gerundet:

$$\begin{array}{llll} a_1 = \dots\dots\dots & a_2 = \dots\dots\dots & a_3 = \dots\dots\dots & a_4 = \dots\dots\dots \\ a_5 = \dots\dots\dots & a_6 = \dots\dots\dots & a_7 = \dots\dots\dots & a_8 = \dots\dots\dots \end{array}$$

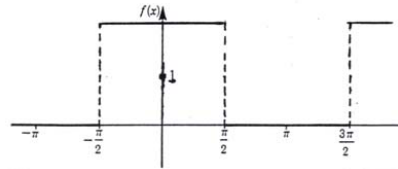
-----> 73

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \cdot dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 2$$

15

Wir berechnen nun, ebenfalls abschnittsweise, die weiteren $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx$

Die Funktion war $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\pi \end{cases}$



$a_n = \dots\dots\dots$ Lösung gefunden $\dots\dots\dots \triangleright 18$

Hilfe und Erläuterung $\dots\dots\dots \triangleright 16$

Integral 1 ist: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \cos ntdt = \left[\frac{t}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin nt \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin ntdt$

44

Die Klammer wird zu Null, denn es gilt $\sin n\pi = \sin(-n\pi) = 0$.

Das verbleibende Integral ist elementar zu lösen, denn:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin ntdt = \left[-\frac{1}{n} \cos nt \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Hier erinnern wir uns: $\cos n\pi = \cos(-n\pi)$. Also gilt auch $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt = 0$

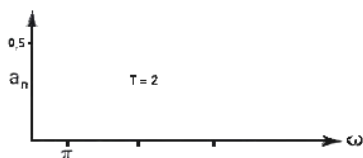
Damit haben wir das Integral 1 berechnet mit dem Ergebnis $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \cos ntdt = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots \triangleright 45$

$a_1 = 0,64$	$a_2 = 0$	$a_3 = -0,21$	$a_4 = 0$
$a_5 = 0,13$	$a_6 = 0$	$a_7 = -0,09$	$a_8 = 0$

73

Skizzieren Sie das Frequenzspektrum der Rechteckkurve



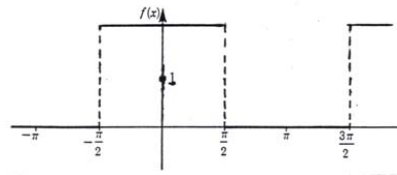
Hilfshinweis: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_n = \frac{n2\pi}{T} = n \cdot \pi$

$\dots\dots\dots \triangleright 74$

Zu berechnen ist: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx$ für

16

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$



Wieder müssen wir die Integrale für die drei Abschnitte, für die die Funktion definiert ist, separat berechnen:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \dots\dots\dots$$

-----> 17

Integral 1: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \cos nt \cdot dt = 0$

45

Es war insgesamt zu berechnen:

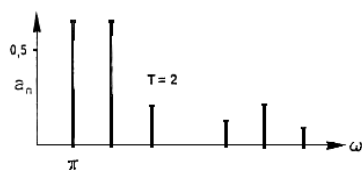
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{t}{\pi} + 1 \right) \cos nt \cdot dt = \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \cos nt \cdot dt}_{\text{Integral 1}} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cdot dt}_{\text{Integral 2}} \right]$$

Integral 1 ist berechnet und liefert keinen Beitrag.

Das Integral 2 ist elementar zu bearbeiten, was und Ihnen nicht zu schwer fallen dürfte.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cdot dt = \left[\dots\dots\dots \right]_{-\pi}^{\pi} = \dots\dots\dots$$

-----> 46



74

Gegeben sei wieder die Fourierreihe der Rechteckkurve $f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi t_0}{T} \cdot \cos \frac{n2\pi t}{T}$

Berechnen Sie die a_n für ein größeres T , nämlich für $T = 8$ und $t_0 = 1$

$$\begin{array}{llll} a_1 = \dots\dots\dots & a_2 = \dots\dots\dots & a_3 = \dots\dots\dots & a_4 = \dots\dots\dots \\ a_5 = \dots\dots\dots & a_6 = \dots\dots\dots & a_7 = \dots\dots\dots & a_8 = \dots\dots\dots \end{array}$$



Hilfe erwünscht

-----> 75

Lösung

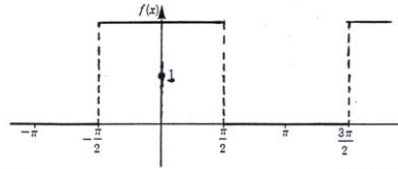
-----> 76

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \cos nx \, dx$$

17

Die Funktion war

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Eingesetzt erhalten wir $a_n = \dots\dots\dots$

-----> 18

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cdot dt = \left[\frac{\sin nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{Damit ist bewiesen, was zu vermuten war: } a_n = 0 \text{ für } n=1,2,3\dots$$

46

Nun sind die Koeffizienten $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \cdot dt$ zu berechnen.Wir setzen ein: $f(t) = \frac{t}{\pi} + 1$. Damit erhalten wir $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots\dots\dots$

Wir erinnern uns: Das Integral über eine Summe von Funktionen ist die Summe der Integrale:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \dots\dots\dots + \int_{-\pi}^{\pi} \dots\dots\dots \right]$$

-----> 47

$$\text{Die } a_n \text{ sind in unserem Fall gegeben durch } a_n = \frac{2}{n\pi} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{T} \cdot t_0\right)$$

75

Geändert hat sich gegenüber der vorhergehenden Aufgabe nur T , es ist diesmal größer,nämlich $T = 8$. Wir setzen ein, berechnen die Werte von $\sin\left(n \frac{\pi}{8}\right)$ und erhalten gerundet

$$\sin \frac{\pi}{8} = \dots\dots\dots \quad \sin \frac{2\pi}{8} = \dots\dots\dots \quad \sin \frac{3\pi}{8} = \dots\dots\dots \quad \sin \frac{4\pi}{8} = \dots\dots\dots$$

$$\sin \frac{5\pi}{8} = \dots\dots\dots \quad \sin \frac{6\pi}{8} = \dots\dots\dots \quad \sin \frac{7\pi}{8} = \dots\dots\dots \quad \sin \frac{8\pi}{8} = \dots\dots\dots$$

Dieses setzen wir ein und erhalten schließlich:

$$\begin{array}{llll} a_1 = \dots\dots\dots & a_2 = \dots\dots\dots & a_3 = \dots\dots\dots & a_4 = \dots\dots\dots \\ a_5 = \dots\dots\dots & a_6 = \dots\dots\dots & a_7 = \dots\dots\dots & a_8 = \dots\dots\dots \end{array}$$

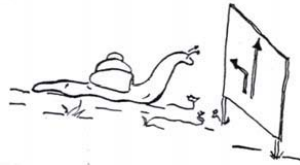
-----> 76

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \cdot \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 0 \cdot \cos nx \, dx$$

18

$$a_n = 0 + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{n} \left[\sin n \frac{\pi}{2} + \sin n \frac{\pi}{2} \right] + 0 = \frac{4}{\pi \cdot n} \sin n \frac{\pi}{2}$$

Es bleibt noch die Berechnung der $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \cdot dx = \dots\dots\dots$



Lösung gefunden -----> 21
Hilfe und Erläuterung -----> 19

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{t}{\pi} + 1 \right) \sin nt \cdot dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \sin nt \cdot dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cdot dt \right]$$

Integral 1 Integral 2

47

Wir beginnen mit der Berechnung von Integral 1: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \sin nt \, dt = \dots\dots\dots$



Lösung gefunden -----> 54
Erinnerung an die partielle Integration -----> 48
Ausführliche Lösung -----> 50

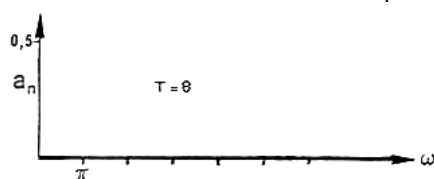
$$\begin{array}{llll} \sin \frac{\pi}{8} = 0,38 & \sin \frac{2\pi}{8} = 0,71 & \sin \frac{3\pi}{8} = 0,92 & \sin \frac{4\pi}{8} = 1 \\ \sin \frac{5\pi}{8} = 0,92 & \sin \frac{6\pi}{8} = 0,71 & \sin \frac{7\pi}{8} = 0,38 & \sin \frac{8\pi}{8} = 0 \end{array}$$

76

Damit ergibt sich:

$$\begin{array}{llll} a_1 = 0,24 & a_2 = 0,23 & a_3 = 0,20 & a_4 = 0,16 \\ a_5 = 0,12 & a_6 = 0,08 & a_7 = 0,03 & a_8 = 0 \end{array}$$

Mit diesen Werten können Sie das Frequenzspektrum der Rechteckkurve für $T = 8$ skizzieren



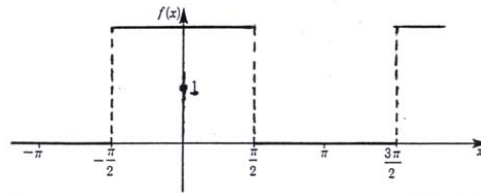
Erinnerung: $\omega_n = n \cdot \omega_0 = n \cdot \frac{2\pi}{8} = n \cdot \frac{\pi}{4}$ -----> 77

Wieder müssen wir das gesuchte Integral für die drei Abschnitte aufteilen und abschnittsweise vorgehen.

19

Die Funktion war

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\pi \end{cases}$$



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \cdot dx = \dots\dots\dots$$

-----> 20

Zu berechnen ist das Integral 1: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \sin nt \cdot dt$

48

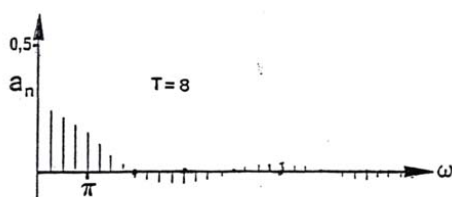
Die Situation entspricht der in Lehrschrift 42: die Integration von Produkten durch partielle Integration ist im Lehrbuch Band 1, Seite 149, hergeleitet und sollte gegebenenfalls dort nachgelesen werden. Für zwei Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ und beliebige Grenzen a und b gilt

$$\int_a^b u \cdot v' = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v$$

Wir setzen $u = \frac{t}{\pi}$ $v' = \sin nt$

Damit erhalten wir $u' = \dots\dots\dots$ $v = \dots\dots\dots$

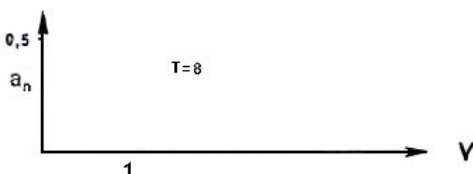
-----> 49



77

Wir können das obige Frequenzspektrum statt für die Kreisfrequenz ω , die in der Theorie meist benutzt wird, auch für die Frequenz $\nu = \frac{1}{T}$ angeben. Es gilt $\omega = 2\pi\nu$, das heißt $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

Skizzieren Sie das Frequenzspektrum für die Frequenz ν :



-----> 78

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \, dx$$

20

Dieses Integral dürfte keine Schwierigkeiten bereiten:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \, dx = \dots\dots\dots$$

-----> 21

$$u = \frac{t}{\pi} \quad v' = \sin nt$$

49

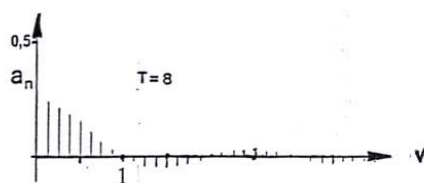
$$u' = \frac{1}{\pi} \quad v = -\frac{\cos nt}{n}$$

Im Zweifel verifizieren Sie dies, indem Sie die Ableitung von v bilden.

$$\text{Es war bekanntlich } \int_a^b u \cdot v' = [u \cdot v]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u' \cdot v$$

$$\text{Mit den obigen Funktionen wird daraus } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \sin nt \, dt = \dots\dots\dots$$

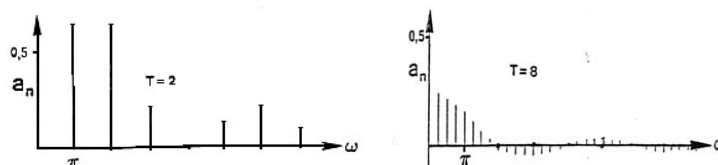
-----> 50



78

Das Frequenzspektrum bleibt gleich. Geändert hat sich nur die Skaleneinteilung.

Wir vergleichen nun die Frequenzspektren der Rechteckkurve mit $t_0 = 1$ und $T = 2$ bzw. $T = 8$:



Der wesentliche Unterschied ist, dass mit wachsender Periode T die Frequenzabstände der Fourierkomponenten kleiner werden.

Noch eine weitere Übung

-----> 79

Kapitel abschließen

-----> 86

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n} + \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n} \right] = 0$$

21

Damit ist unser Problem gelöst. Die Fourierreihe für die Rechteckfunktion ist:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin n \frac{\pi}{2} \cos nx$$

Die Reihe besteht bis auf $a_0 = 1$ aus cos-Funktionen, deren Amplituden mit wachsendem n abnehmen. Im Übrigen verschwinden die Summanden für die geraden n .

-----> 22

$$\text{Integral 1: } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \sin nt dt = \left[\frac{t}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) dt$$

50

Wir berechnen zuerst die linke Klammer. Im Prinzip ist das einfach, aber Schwierigkeiten können immer wieder mit den Vorzeichen auftreten.

Wir erinnern uns, dass $\cos n\pi = \cos(-n\pi)$ und dass $\cos n\pi = (-1)^n$

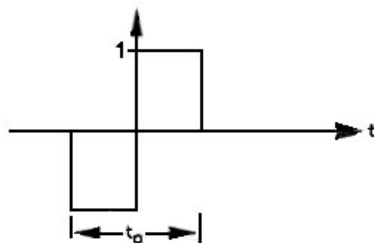
$$\left[\frac{t}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden -----> 53

Ausführliche Rechnung -----> 51

Gegeben sei eine alternierende Rechteckfunktion mit der beliebigen Periode t_0

79



$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < \frac{t_0}{2} \end{cases}$$

Die Funktion ist ☐ gerade oder ☐ ungerade

Daher verschwinden die.....

-----> 80

22.2 Beispiele für Fourierreihen

22

22.2.1 Symmetriebetrachtungen**22.2.2 Rechteckschwingung, Kippschwingung, Dreieckschwingung**

Nach der nicht ganz einfachen Ableitung der Fourierreihe folgen nun einige Beispiele, bei denen keine grundsätzlichen Probleme auftreten. Bei den Umformungen allerdings müssen Sie gut aufpassen, hier schleichen sich leicht Flüchtigkeitsfehler ein. Und, bitte, nicht vergessen, die Beispiele auf einem separaten Blatt mitzurechnen.

STUDIERN Sie nun intensiv

22.2.1 Symmetriebetrachtungen

22.2.2 Rechteckschwingung, Kippschwingung, Dreieckschwingung

Lehrbuch Seite 176 – 180



Danach

-----> 23

Zu berechnen ist: $\left[\frac{t}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi}$

51

Wir beachten: $\cos n\pi = \cos(-n\pi) = (-1)^n$

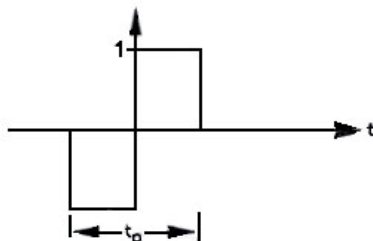
Wir setzen die Grenzen ein und erhalten ausführlich geschrieben:

$$\left[\frac{t}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = [\dots]$$

-----> 52

Die Funktion ist ungerade. Daher verschwinden die a_n .

80



Berechnen Sie nun

$$b_n = \dots$$

Notfalls Formeln im Lehrbuch Seite 181 nachsehen!

Lösung gefunden

-----> 83

Hilfe erwünscht

-----> 81

Die im vorhergehenden Leitprogrammabschnitt ab Lehrschrift 12 behandelte Rechteckfunktion ist eine

23

- ☐ gerade Funktion
- ☐ ungerade Funktion

-----> 24

$$\left[\frac{t}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = \left[\frac{\pi}{\pi} \left(-\frac{\cos n\pi}{n} \right) - \frac{-\pi}{\pi} \left(-\frac{\cos(-n\pi)}{n} \right) \right]$$

52

Wir kürzen und vereinfachen: $\left[\frac{t}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = \left[-\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos(-n\pi)}{n} \right] = -2 \frac{\cos n\pi}{n}$

Mit $\cos n\pi = (-1)^n$ schreiben wir $-\cos n\pi = (-1)^{n+1}$

So erhalten wir schließlich $\left[\frac{t}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = \dots\dots\dots$

-----> 53

$$b_n = \frac{2}{t_0} \int_{\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} f(t) \sin\left(\frac{n2\pi}{t_0} \cdot t\right) dt$$

81

Wir teilen in zwei Abschnitte auf, weil $f(t)$ für zwei Abschnitte definiert ist.

$$b_n = \frac{2}{t_0} \int_{\frac{t_0}{2}}^0 (-1) \sin\left(\frac{n2\pi}{t_0} t\right) dt + \frac{2}{t_0} \int_0^{\frac{t_0}{2}} \sin\left(\frac{n2\pi}{t_0} t\right) dt$$

Jetzt bleibt nur noch, die Integrale zu berechnen, wobei die Grenzen genau zu beachten sind.

$$b_n = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden -----> 83

Schrittweise Lösung -----> 82

Gerade Funktion

24

Für gerade Funktionen gilt für die Koeffizienten:

$$\square \quad a_n = 0$$

$$\square \quad b_n = 0$$

Für gerade Funktionen besteht die Fourierreihe dann nur aus Funktionen.

-----> 25

$$\left[\frac{t}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

53

Damit wird unsere Aufgabe zu:

$$\text{Bestimme Integral } 1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) dt$$

Das verbleibende Integral ist elementar zu lösen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) dt = \dots\dots\dots$$

-----> 54

Zu berechnen ist:

82

$$b_n = \frac{2}{t_0} \int_{\frac{t_0}{2}}^0 (-1) \sin \left(\frac{n 2\pi}{t_0} t \right) dt + \frac{2}{t_0} \int_0^{\frac{t_0}{2}} \sin \left(\frac{n 2\pi}{t_0} t \right) dt$$

$$\text{Hinweis: } \int_{\frac{t_0}{2}}^0 \sin \left(\frac{n 2\pi}{t_0} t \right) dt = \left[-\frac{t_0}{n 2\pi} \cdot \cos \left(\frac{n 2\pi}{t_0} t \right) \right]_{\frac{t_0}{2}}^0$$

Dies eingesetzt ergibt

$$b_n = \frac{2}{t_0} \left[(-1) \cdot \frac{t_0}{n 2\pi} \left(-\cos \frac{n 2\pi}{t_0} \cdot t \right) \right]_{\frac{t_0}{2}}^0 + \frac{2}{t_0} \left[\frac{t_0}{n 2\pi} \left(-\cos \frac{n 2\pi}{t_0} \cdot t \right) \right]_{\frac{t_0}{2}}^0$$

Setzen Sie jetzt die Grenzen ein und vereinfachen Sie:

$$b_n = \dots\dots\dots$$

-----> 83

Für gerade Funktionen gilt für alle Koeffizienten $b_n = 0$.
Die Fourierreihe besteht dann nur aus cos-Funktionen.

25

Im vorhergehenden Beispiel hätten wir uns also die Berechnung der b_n durch eine Symmetriebetrachtung ersparen können.

In den Beispielen im Lehrbuch ist die Ortsvariable x durch die Zeitvariable t ersetzt, weil es sich um Schwingungen handelt, deren Behandlung in der Physik bedeutsam ist. Die Rechteckschwingung ist praktisch völlig analog zur Rechteckfunktion behandelt.

Jetzt folgt noch eine Übung zur Rechteckfunktion.

-----▷ 26

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos nt}{n} \right) dt = \left[-\frac{1}{\pi} \frac{\sin n\pi}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

54

Das Integral verschwindet, weil $\sin n\pi = \sin(-n\pi) = 0$. Damit ist das Integral 1 gefunden:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \text{ Das Integral 2 (Lehrschrift 47) verschwindet wegen der Symmetrie der}$$

$$\text{cos-Funktion: } \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) : \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \, dt = \left[\frac{1}{n} (-\cos nt) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\text{Damit haben wir die } b_n \text{ bestimmt zu } b_n = \frac{2}{\pi \cdot n} (-1)^{n+1}.$$

$$\text{Die Sägezahnkurve war gegeben durch } f(t) = \left(\frac{t}{\pi} + 1 \right) \text{ für } -\pi < t < \pi$$

Ihre Fourierreihe ist damit $f(t) = \dots\dots\dots$ (Hinweis: a_0 nicht vergessen!)

-----▷ 55

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{n2\pi}{t_0} \cdot \frac{t_0}{2}\right) + 1 - \cos\left(\frac{n2\pi}{t_0} \cdot \frac{t_0}{2}\right) \right] = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi]$$

83

$$\text{Wegen } \cos n\pi = (-1)^n \text{ wird } b_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

Jetzt berechnen wir

$$b_1 = \dots\dots\dots$$

$$b_2 = \dots\dots\dots$$

$$b_3 = \dots\dots\dots$$

$$b_4 = \dots\dots\dots$$

$$b_5 = \dots\dots\dots$$

$$b_6 = \dots\dots\dots$$

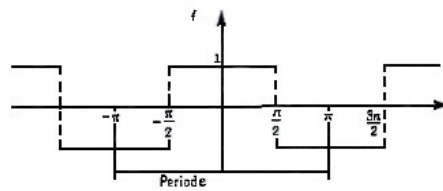
$$b_7 = \dots\dots\dots$$

$$b_8 = \dots\dots\dots$$

-----▷ 84

Gegeben sei die Rechteckschwingung

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi \leq t \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{für } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$



26

Verschieben Sie die Rechteckschwingung so, dass eine ungerade Funktion entsteht. Gibt es nur eine Lösung?

$$f(t) = \begin{cases} \dots\dots\dots \end{cases}$$

▷

27

$$f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \cdot (-1)^{n+1} \sin nt$$

55

Die hier angegebene Fourierreihe unterscheidet sich von der im Lehrbuch (Seite 179) berechneten Reihe nur durch a_0 . Beide Kurven können durch Koordinatenverschiebung in y-Richtung ineinander überführt werden.

▷ 56

$$b_1 = 1,3$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 0,42$$

$$b_4 = 0$$

$$b_5 = 0,25$$

$$b_6 = 0$$

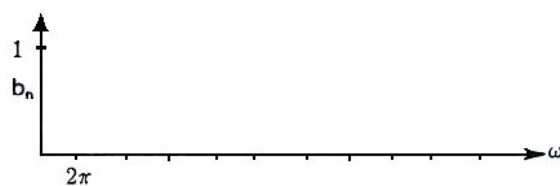
$$b_7 = 0,18$$

$$b_8 = 0$$

84

Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum für $t_0 = 1$.

Erinnerung: $\omega_n = n \cdot \omega_0 = n \cdot \frac{2\pi}{t_0}$



▷ 85

Es gibt zwei gleichwertige Lösungen:

27

$$\text{Lösung 1: } f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < \pi \end{cases}$$

$$\text{Lösung 2: } f(t) = \begin{cases} +1 & \text{für } -\pi < t < 0 \\ -1 & \text{für } 0 < t < \pi \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fourierreihe für die Rechteckschwingung der Lösung 1:

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden -----▷ 33

Hilfe erwünscht -----▷ 28

22.3 Die Fourierreihe für Funktionen mit beliebiger Periode T

56

Der folgende Abschnitt ist wichtig, aber er ist einfach zu verstehen. Führen Sie, bitte, die Substitutionen auf einem separaten Zettel durch.

STUDIERN Sie

22.3 Die Fourierreihe für Funktionen mit beliebiger Periode T
Lehrbuch Seite 180 – 181

-----▷ 57



85



-----▷ 86

Gegeben sei die Rechteckschwingung

28

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < \pi \end{cases}$$

Es handelt sich um eine Funktion.

In diesem Fall verschwinden die Koeffizienten.....

-----▷ 29

57



Keine Probleme mit der Erweiterung auf beliebige Perioden

-----▷ 60

Weitere Erläuterungen erwünscht

-----▷ 58

Sie haben nun das Kapitel "Fourierreihen" erfolgreich beendet und sicher manche Schwierigkeit mit der sorgfältigen Beachtung von Integrationsgrenzen und Vorzeichen gemeistert.

86

Über diese Erfolge dürfen Sie sich mit gutem Gewissen freuen.



... des Kapitels 22

Es handelt sich um eine ungerade Funktion. Deshalb verschwinden die Koeffizienten a_n .

29

Wir betrachten weiter die Rechteckschwingung $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < \pi \end{cases}$

Zeigen sie, dass auch a_0 verschwindet: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \dots\dots\dots$

-----> 30

Gegeben war die Fourierreihe für die Variable x mit der Periode 2π .
Sie ist in der Übersicht auf Seite 176 im Lehrbuch dargestellt.
Schlagen Sie, bitte, diese Seite auf.

58

Wir ersetzen x durch $\frac{2\pi}{T}t$ und dx durch $\frac{2\pi}{T}dt$.

Für $t = T$ wird dann $x = \dots\dots\dots$

Jetzt substituieren Sie in der Übersichtsseite auf Seite 176 für a_n : $x = \frac{2\pi}{T}t$ und $dx = \frac{2\pi}{T}dt$

Dann erhalten Sie $a_n = \dots\dots\dots$

-----> 59