
Kapitel 23

0

Fourier-Integrale

23. Fourier-Integrale

1

23.1 Übergang von der Fourierreihe zum Fourier-Integral

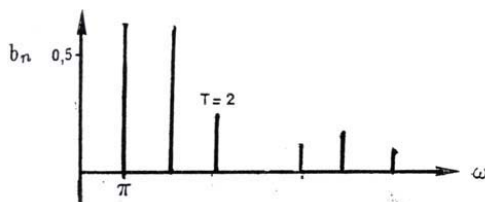
Im vorhergehenden Kapitel wurde gezeigt, dass eine beliebige periodische Funktion als Summe von diskreten Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden kann. Bedeutsam speziell in der Physik und Informationstechnik ist, dass periodische Signale dementsprechend als Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen aufgefasst und auch erzeugt werden können.

In diesem Kapitel wird bewiesen, dass auch ein einzelnes zeitlich begrenztes Signal als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden kann, wobei aus der Summe ein Integral und aus den diskreten Funktionen eine kontinuierliche Verteilung von Schwingungen wird.

LESEN Sie intensiv

23.1 Übergang von der Fourierreihe zum Fourierintegral
Lehrbuch Seite 187 – 189

-----> 2



20

Die b_n für andere Werte von t_0 und T werden in entsprechender Weise berechnet.

Für $t_0 = 1$ und $T = 4$ sowie $T = 8$ sind die Ergebnisse im Lehrbuch Seite 191 dargestellt.

-----> 21

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi(-i\omega)} \cdot \left[-1 + e^{i\omega \frac{t_0}{2}} + e^{-i\omega \frac{t_0}{2}} - 1 \right]$$

39

Wir fassen zusammen und formen um

$$F(\omega) = \dots\dots\dots$$

$$\text{Erinnerung: } \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

-----> 40



Grenzübergang von der Fourierreihe zum Fourierintegral
gut verstanden

-----> 9

Hilfserläuterungen erwünscht

-----> 3

Die Fourierreihe für die periodische alternierende Rechteckfunktion der Ausdehnung t_0

und der Periode T war: $f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \cos\left(\frac{n2\pi}{T} \cdot \frac{t_0}{2}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{n2\pi}{T} t\right)$

Jetzt wollen wir zum Fourierintegral übergehen.

In der Summe wächst n schrittweise um $\Delta n = 1$. Wenn wir von der Summe zum Integral und zur Variablen ω übergehen, müssen wir den Zusammenhang zwischen Δn und $\Delta \omega$ berücksichtigen.

Wegen $\frac{n2\pi}{T} = \omega$ und $n = \omega \frac{T}{2\pi}$ wird $\Delta n = \Delta \omega \frac{T}{2\pi}$ und $\Delta \omega = \Delta n \cdot \frac{2\pi}{T}$.

Wir setzen zunächst in die Summe ein: $f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dots\dots\dots$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\pi\omega} \left[1 - \cos \omega \frac{t_0}{2} \right] (-i) \\ &= \frac{1}{\pi\omega} \left[1 - \cos \omega \frac{t_0}{2} \right] e^{\frac{i\pi}{2}} \end{aligned}$$

Aus der Amplitudenfunktion entnehmen wir das kontinuierliche Amplitudenspektrum

$A(\omega) = \dots\dots\dots$

Das Phasenspektrum ist in unserem Fall gegeben durch

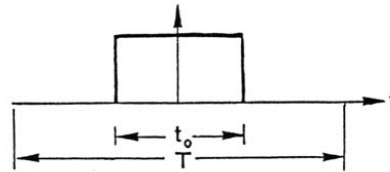
$\varphi(\omega) = \dots\dots\dots$

-----> 41

3

Gegeben war die Fourierreihe für eine Rechteckfunktion, also für ein periodisches Signal der Dauer t_0 und der Periode T .

$$f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi t_0}{T} \cdot \cos \frac{2n\pi t}{T}$$



Um ein isoliertes Signal der endlichen Dauer t_0 zu erhalten, müssen wir T und auch n über alle Grenzen wachsen lassen.

Der Periodendauer T entspricht eine Schwingung mit der Grundfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Die Frequenzen der einzelnen Summanden mit der Laufzahl n sind dann $\omega = \dots\dots\dots$

-----> 4

22

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\omega T} \left(1 - \cos \omega \frac{t_0}{2}\right) \cdot \sin \omega t \cdot \Delta \omega \frac{T}{2\pi}$$

Jetzt können wir kürzen und den Grenzübergang durchführen.

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \left(1 - \cos \omega \frac{t_0}{2}\right) \cdot \sin \omega t \, d\omega$$

Das kontinuierliche Amplitudenspektrum wird:

$$B(\omega) = \dots\dots\dots$$

-----> 23

41

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi\omega} \cdot \left[1 - \cos \omega \frac{t_0}{2}\right]$$

$$\text{Phasenspektrum: } \varphi(\omega) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

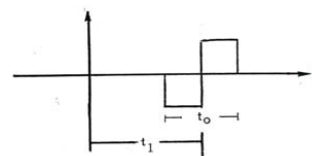
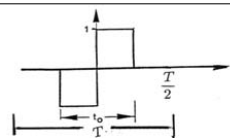
Übung zum Verschiebungssatz.

Gegeben sei das alternierende Rechtecksignal.

Wir verschieben das Signal um die Zeit t_1 .
Dann wird $f(t)$ zu

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} < t < -\frac{t_0}{2} \\ -1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < \frac{t_0}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{t_0}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} + t_1 < t < -\frac{t_0}{2} + t_1 \\ -1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} + t_1 < t < t_1 \\ +1 & \text{für } t_1 < t < \frac{t_0}{2} + t_1 \\ 0 & \text{für } \frac{t_0}{2} + t_1 < t < \frac{T}{2} + t_1 \end{cases}$$



Berechnen Sie erneut die Amplitudenfunktion $F(\omega) = \dots\dots\dots$

Hilfe und detaillierte Rechnung -----> 42

Lösung gefunden -----> 45

4

$$\omega = n\omega_0 = n \frac{2\pi}{T}$$

Die Laufzahl n wächst diskontinuierlich von $n=1$ bis $n=\infty$, wobei die Laufzahl von Glied zu Glied um 1 anwächst. Wir schreiben dies als $\Delta n = 1$.

Dies setzen wir ein in die Gleichung des periodischen Signals vom vorhergehenden Lehrschritt.

Es war:

$$f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi t_0}{T} \cdot \cos \frac{2\pi n t}{T}$$

Die um $\Delta n = 1$ ergänzte Gleichung lautet nun

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

-----> 5

23

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi \cdot \omega} \cdot \left(1 - \cos \omega \frac{t_0}{2} \right)$$

Wir können das kontinuierliche Amplitudenspektrum auch mit der in Gleichung (23.4) angegebenen Formel für die Fourier-Sinustransformation (Lehrbuch Seite 190) erhalten und diese damit erneut verifizieren.

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \quad B(\omega) = \dots\dots\dots$$



Lösung gefunden

-----> 27

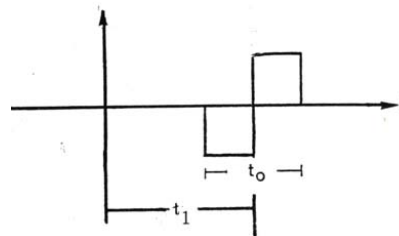
Hilfe und schrittweise Lösung

-----> 24

42

Das Signal war:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} + t_1 < t < -\frac{t_0}{2} + t_1 \\ -1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} + t_1 < t < t_1 \\ +1 & \text{für } t_1 < t < \frac{t_0}{2} + t_1 \\ 0 & \text{für } \frac{t_0}{2} + t_1 < t < \frac{T}{2} + t_1 \end{cases}$$



$$\text{Die Amplitudenfunktion war } F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \, dt$$

Wir schreiben das Integral getrennt auf für die Abschnitte, in denen $f(t)$ nicht verschwindet:

$$F(\omega) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

-----> 43

5

$$f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cdot \sin \omega \frac{t_0}{2} \cdot \cos \omega t \cdot \Delta n$$

Wir erhalten die Darstellung eines einzelnen Signals der Dauer t_0 , wenn wir die Periodendauer T , also die Abstände der Signale voneinander, über alle Grenzen wachsen lassen. Dabei wird die Grundfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ beliebig klein und auch die Abstände der Frequenzen gehen gegen Null.

Wenn wir aus der Summe oben zu einem Integral übergehen wollen, müssen wir noch etwas berücksichtigen. In der Summe fungierte die Laufzahl n als Variable. Im Integral müssen wir n durch die Frequenz ω und außerdem Δn durch $\Delta \omega$ ersetzen. Dabei helfen die folgenden Beziehungen.

$$\omega = n \cdot \frac{2\pi}{T} \quad \Delta \omega = \Delta n \cdot \frac{2\pi}{T}$$

$$n = \omega \cdot \frac{T}{2\pi} \quad \Delta n = \frac{T}{2\pi} \Delta \omega$$

Ersetzen Sie nun n und Δn : $f(t) = \dots\dots\dots$

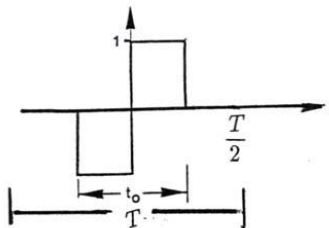
-----> 6

24

Zu lösen: $B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$

Die Funktion ist abschnittsweise definiert.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} < t < -\frac{t_0}{2} \\ -1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < +\frac{t_0}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{t_0}{2} < t < +\frac{T}{2} \end{cases}$$



Wir geben das Integral für die zwei Abschnitte an, für die $f(t)$ nicht verschwindet

$$B(\omega) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

-----> 25

43

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t_0}{2} + t_1}^{t_1} (-1) \cdot e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{\frac{t_0}{2} + t_1} e^{-i\omega t} dt$$

Wir lösen die beiden Integrale

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\dots\dots\dots \right] + \frac{1}{2\pi} \left[\dots\dots\dots \right]$$

-----> 44

6

$$f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{\omega=0}^{\omega=\infty} \frac{2 \cdot 2\pi}{\omega \cdot T\pi} \cdot \sin \omega \frac{t_0}{2} \cdot \cos \omega t \cdot \frac{T}{2\pi} \Delta\omega = \frac{t_0}{T} + \sum_{\omega=0}^{\omega=\infty} \frac{2}{\omega\pi} \sin \omega \frac{t_0}{2} \cdot \cos \omega t \cdot \Delta\omega$$

Jetzt können wir den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ durchführen und erhalten folgendes Integral

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

-----> 7

25

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{t_0}{2}}^0 (-1) \sin \omega t \, dt + \int_0^{\frac{t_0}{2}} \sin \omega t \, dt$$

Wir lösen die Integrale und erhalten

$$B(\omega) = \dots\dots\dots$$

-----> 26

44

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-1}{-i\omega} \cdot e^{-i\omega t} \right]_{-\frac{t_0}{2}+t_1}^{t_1} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-i\omega} \cdot e^{-i\omega t} \right]_{t_1}^{\frac{t_0}{2}+t_1}$$

Jetzt bleibt nur noch, geduldig und sorgfältig die Grenzen einzusetzen und zu vereinfachen.

Der Ausdruck $e^{-i\omega t_1}$ tritt bei allen Summanden auf und kann ausgeklammert werden.

$$F(\omega) = \dots\dots\dots$$

-----> 45

7

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi\omega} \cdot \sin \omega \frac{t_0}{2} \cdot \cos \omega t d\omega$$

Mit $A(\omega) = \frac{2}{\pi\omega} \cdot \sin \omega \frac{t_0}{2}$ kann das Integral auch wie folgt geschrieben werden:

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

-----> 8

26

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[(-1) \cdot (-\cos \omega t) \cdot \frac{1}{\omega} \right]_{-\frac{t_0}{2}}^0 + \frac{1}{\pi} \left[(-\cos \omega t) \cdot \frac{1}{\omega} \right]_{\frac{t_0}{2}}^0$$

Jetzt brauchen nur noch die Grenzen eingesetzt zu werden

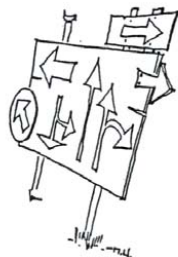
$$B(\omega) = \dots\dots\dots$$

-----> 27

45

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi\omega} \left[1 - \cos \omega \frac{t_0}{2} \right] e^{-i\omega t_1 - i\frac{\pi}{2}}$$

Hauptergebnis: Das kontinuierliche Amplitudenspektrum ist unabhängig von der Verschiebung des Signals um die Zeit t_1 . Es ändert sich nur das Phasenspektrum.



Weiter -----> 50

Bemerkung zur nicht einheitlichen Schreibweise
der komplexen Fouriertransformationen -----> 46

8

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cdot \cos \omega t d\omega$$

Und nun zum nächsten Abschnitt

-----> 9

27

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi\omega} \left[1 - \cos \omega \frac{t_0}{2} \right]$$

Hiermit haben wir erneut verifiziert, dass wir im Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ und $n \rightarrow \infty$ das gleiche kontinuierliche Amplitudenspektrum erhalten, wie bei der Anwendung der in Lehrbuch Seite 190 und 192 angegebenen Formeln.

Zur Vorbereitung des nächsten Abschnittes erinnern wir uns an die komplexen Zahlen:

$$e^{ia} = \dots\dots\dots$$

$$e^{ia+b} = \dots\dots\dots$$

-----> 28

46

In Anmerkung 1 auf Seite 193 des Lehrbuches ist darauf hingewiesen, dass die Schreibweise der Fouriertransformationen nicht einheitlich gehandhabt wird. Dies kann besonders den Anfänger verwirren, wenn er in verschiedenen Lehrbüchern, Handbüchern und Lexika auf unterschiedliche Formeln stößt wie:

$$\begin{aligned} a) \quad f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega & F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \\ b) \quad f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega & F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \\ c) \quad f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega & F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Die Unterschiede beziehen sich nur auf den konstanten Faktor $\frac{1}{2\pi}$.

-----> 47

23.2 Fouriertransformationen

9

STUDIEREN Sie

23.2.1 Fourier-Kosinustransformation

23.2.2 Fourier-Sinustransformation

Lehrbuch Seite 190 – 193

-----> 10

$$e^{ia} = i \sin a + \cos a$$

$$e^{ia+b} = e^{ia} \cdot e^b = e^b (i \sin a + \cos a)$$

28

Erinnern Sie sich weiter an die folgenden Ausdrücke:

$$e^{i\omega t} = \dots\dots\dots$$

$$e^{-i\omega t} = \dots\dots\dots$$

$$e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = \dots\dots\dots$$



-----> 29

Die Notierungen sind:

$$a) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$b) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$c) \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

47

Um zu sehen, dass die Notierungen gleichwertig sind, setzen wir das jeweils zweite Integral $F(\omega)$ in das erste ein. Für die von uns benutzte Schreibweise erhalten wir dann für a):

$$a) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

Das gleiche tun wir für b) und c) und erhalten

$$b) \quad f(t) = \dots\dots\dots \quad c) \quad f(t) = \dots\dots\dots$$

Aufgabe gelöst

-----> 49

Hilfe und Erläuterung

-----> 48

10

Die Formeln für die Bestimmung der Amplitudenspektren $A(\omega)$ und $B(\omega)$ sind im Lehrbuch angegeben, aber nicht hergeleitet, sondern verifiziert worden.

Verifizieren Sie, dass $A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos \omega t \, dt$ gleich dem $A(\omega)$ ist, das wir im vorausgehenden

Abschnitt für die Rechteckfunktion durch Grenzübergang von der Summe zum Fourierintegral erhalten haben: $A(\omega) = \frac{2}{\pi \omega} \cdot \sin \omega \frac{t_0}{2}$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos \omega t \, dt = \int \dots = [\dots]$$

-----> 11

29

$$e^{i\omega t} = i \cdot \sin \omega t + \cos \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = -i \cdot \sin \omega t + \cos \omega t$$

$$e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2 \cos \omega t$$

Gegebenenfalls schlagen Sie im Lehrbuch Band 1 das Kapitel 8 „Komplexe Zahlen“ nach, denn im folgenden Abschnitt werden komplexe Zahlen als bekannt vorausgesetzt.

Lösen Sie noch und ersetzen Sie die Exponentialausdrücke mit Hilfe der Eulerschen Formeln:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-i\omega t} dt = \dots = \dots$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{i\omega t} dt = \dots = \dots$$

-----> 30

48

Es war a) $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$

b) $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$

c) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$

Wir betrachten Zeile b), setzen $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$ in das erste Integral ein und erhalten

b) $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \cdot e^{i\omega t} d\omega$

Das gleiche tun wir mit Zeile c) und klammern die konstanten Glieder aus:

c) $f(t) = \dots$

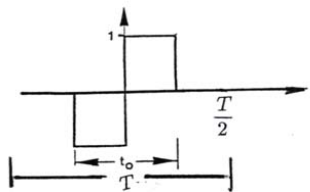
-----> 49

11

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{+\frac{t_0}{2}} \cos \omega t \, dt = \frac{1}{\pi \omega} \left[\sin \omega t \right]_{-\frac{t_0}{2}}^{+\frac{t_0}{2}} = \frac{2}{\pi \omega} \cdot \sin \omega \frac{t_0}{2}$$

Auch die Formel für das Amplitudenspektrum der Fourier-Sinustransformation werden wir verifizieren. Zur Vorbereitung berechnen wir die Fourierreihe für die periodische alternierende Rechteckfunktion der Ausdehnung t_0 und der Periode T .

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} < t < -\frac{t_0}{2} \\ -1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < +\frac{t_0}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{t_0}{2} < t < +\frac{T}{2} \end{cases}$$



Die Funktion ist ☐ gerade, ☐ ungerade. Daher sind die gleich Null.

-----> 12

30

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} \cdot [e^{-i\omega t_2} - e^{-i\omega t_1}] = \frac{1}{\omega} (\sin \omega t_2 - \sin \omega t_1) + \frac{i}{\omega} (\cos \omega t_2 - \cos \omega t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} \cdot [e^{i\omega t_2} - e^{i\omega t_1}] = \frac{1}{\omega} (\sin \omega t_2 - \sin \omega t_1) + \frac{i}{\omega} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2)$$



-----> 31

49

$$b) = c) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

Ergebnis: In allen drei Schreibweisen erhalten wir das gleiche Ergebnis, wenn wir die Fouriertransformation und die Rücktransformation durchführen.

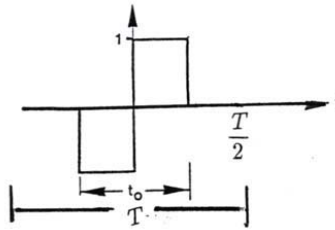
Diese Überlegung dürfte Ihnen helfen, die unterschiedlichen Schreibweisen zu akzeptieren. Wichtig ist nur, wenn man sich für eine Schreibweise entschieden hat, sie dann auch konsequent und ausschließlich zu benutzen.

-----> 50

Die Funktion ist ungerade. Daher: $a_n = 0$

12

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} < t < -\frac{t_0}{2} \\ -1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < +\frac{t_0}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{t_0}{2} < t < +\frac{T}{2} \end{cases}$$



Wir berechnen die b_n abschnittsweise.

Geben Sie die Integrale für die Abschnitte an: $b_n = \dots\dots\dots$ -----> 13

23.2.3 Komplexe Darstellung der Fourier-Transformation

31

23.3 Verschiebungssatz

Wie immer gilt, dass Ableitungen im Text separat auf einem Zettel mitgerechnet werden sollten.

STUDIERN Sie

23.2.3 Komplexe Darstellung der Fourier-Transformation
23.3 Verschiebungssatz
Lehrbuch Seite 192 – 194

-----> 32

23.4 Diskrete Fouriertransformation, Abtasttheorie

50

23.5 Fouriertransformation der Gaußschen Funktion

STUDIERN Sie

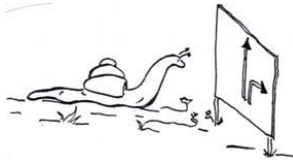
23.4 Diskrete Fouriertransformation, Abtasttheorem
23.5 Fouriertransformation der Gaußschen Funktion
Lehrbuch Seite 194 – 196

-----> 51

13

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_0}{2}}^0 (-I) \cdot \sin \frac{n2\pi}{T} t dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{t_0}{2}} I \cdot \sin \frac{n2\pi}{T} t dt$$

Die Integrale sind lösbar und ergeben unter Berücksichtigung der Grenzen und möglicher Vereinfachungen: $b_n = \dots\dots\dots$



Integrale gelöst -----> 16

Hilfe und schrittweise Lösung -----> 14

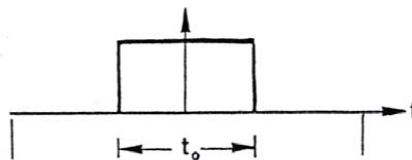
32

Im Lehrbuch ist das kontinuierliche Amplitudenspektrum für die Rechteckfunktion der Dauer t_0 berechnet. Rechnen Sie selbstständig erneut, möglichst ohne in das Lehrbuch zu schauen:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = \dots\dots\dots \text{ (Hinweis: Sorgfältig auf Vorzeichen achten.)}$$

Erinnerung: Die Rechteckfunktion war definiert als

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t < -\frac{t_0}{2} \\ 1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} < t < +\frac{t_0}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{t_0}{2} < t < \infty \end{cases}$$



}

51

Die letzten Arbeitsabschnitte sollten Ihnen eher eine allgemeine Orientierung geben. Das Abtasttheorem ist eine der Grundlagen der modernen Informationstechnik, wenn es um die technische Umwandlung von analogen in diskrete Signale und um die Rekonstruktion von analogen Signalen aus diskreten Abtastwerten geht.

Eine vollständige Rekonstruktion einer Funktion aus Abtastwerten ist nur dann möglich, wenn die Abtastfrequenz so groß ist wie die größte im Amplitudenspektrum vorkommende Frequenz.

-----> 52

14

Zu berechnen ist: $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_0}{2}}^0 (-1) \cdot \sin \frac{n2\pi}{T} t dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{t_0}{2}} 1 \cdot \sin \frac{n2\pi}{T} t dt$

Wir erinnern uns: $\int_{t_1}^{t_2} \sin \frac{n2\pi}{T} t dt = \frac{T}{n2\pi} \left[-\cos \frac{n2\pi}{T} t \right]_{t_1}^{t_2}$

Wir berechnen die Integrale und erhalten

$$b_n = \frac{2}{T} \left[(-1) \cdot \left(-\cos \frac{n2\pi}{T} t \right) \cdot \frac{T}{n2\pi} \right]_{-\frac{t_0}{2}}^0 + \frac{2}{T} \left[\left(-\cos \frac{n2\pi}{T} t \right) \cdot \frac{T}{n2\pi} \right]_0^{\frac{t_0}{2}}$$

Jetzt vereinfachen wir, klammern konstante Glieder aus, setzen die Grenzen ein und erhalten

$b_n = \dots\dots\dots$ Lösung gefunden -----> 16

Schrittweise Lösung -----> 15

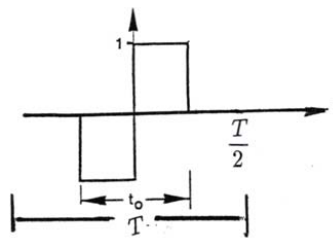
33

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega\pi} \sin\left(\omega \frac{t_0}{2}\right)$$

Nun eine neue Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f(t)$ für das alternierende Rechtecksignal der Dauer t_0 .

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} < t < -\frac{t_0}{2} \\ -1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < +\frac{t_0}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{t_0}{2} < t < +\frac{T}{2} \end{cases}$$



Dann ist das Signal in komplexer Darstellung gegeben durch das Fourierintegral

$f(t) = \dots\dots\dots$

Dabei ist die Amplitudenfunktion $F(\omega) = \dots\dots\dots$ -----> 34

52

Die Abtastfrequenz muss mindestens *doppelt* so groß sein, wie die größte im Amplitudenspektrum vorkommende Frequenz.

Gegeben sei die glockenförmige Gauß-Funktion $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{a}{2}t^2}$

Dazu gehört die ebenfalls glockenförmige Amplitudenfunktion $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$

Beide Funktionen haben ihr Maximum für $t = \dots\dots\dots$ und $\omega = \dots\dots\dots$

Mit zunehmendem t und ω fallen beide Exponentialterme ab.

Beide Terme werden jeweils zu $\frac{1}{e}$, wenn der Exponent den Wert -1 erreicht: $e^{-\frac{\omega^2}{2a}} = e^{-\frac{a}{2}t^2} = \frac{1}{e}$

Dann gilt für die Exponenten: $\dots\dots\dots = -1$

Exponenten gefunden -----> 54

Hilfserläuterung -----> 53

15

Gegeben: $b_n = \frac{2}{T} \left[(-1) \cdot \left(-\cos \frac{n2\pi}{T} t \right) \cdot \frac{T}{n2\pi} \right]_{-\frac{t_0}{2}}^0 + \frac{2}{T} \left[\left(-\cos \frac{n2\pi}{T} t \right) \cdot \frac{T}{n2\pi} \right]_0^{\frac{t_0}{2}}$

Wir klammern den Term $\frac{T}{n2\pi}$ aus, setzen die Grenzen ein und erhalten so wegen $\cos(0)=1$:

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{n2\pi} \left[\left(1 - \cos \left(\frac{n2\pi}{T} \cdot \frac{t_0}{2} \right) \right) + \left(-\cos \left(\frac{n2\pi}{T} \cdot \frac{t_0}{2} \right) + 1 \right) \right]$$

Jetzt können wir kürzen und zusammenfassen:

$$b_n = \dots\dots\dots$$

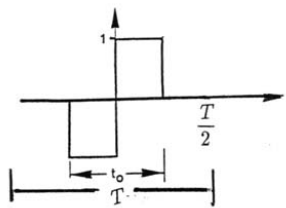
-----> 16

34

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} dt \qquad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Berechnen Sie die Amplitudenfunktion $F(\omega)$ für das alternierende Rechtecksignal der Dauer t_0

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} < t < -\frac{t_0}{2} \\ -1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < +\frac{t_0}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{t_0}{2} < t < +\frac{T}{2} \end{cases}$$



$$F(\omega) = \dots\dots\dots$$



Lösung gefunden -----> 40

Hilfe und detaillierte Lösung -----> 35

53

Gegeben Gaußfunktion $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{a}{2}t^2}$ und Amplitudenspektrum $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$

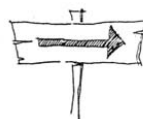
Beide Funktionen sind bestimmt durch Exponentialterme und haben ihr Maximum für $e^0 = 1$.

Also gelten für das Maximum $t = \dots\dots\dots$ und $\omega = \dots\dots\dots$

Mit zunehmendem t und ω werden die Exponenten größer, und weil sie negativ sind, werden die Funktionswerte kleiner. Die Funktionswerte fallen auf $\frac{1}{e}$, wenn die Exponentialterme zu e^{-1}

werden. Also gilt: $e^{-\frac{\omega^2}{2a}} = e^{-\frac{a}{2}t^2} = e^{-1}$

Jetzt können wir für die Exponenten angeben $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots = -1$



-----> 54

16

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{T} \cdot t_0\right) \right]$$

Damit wird die Fourierreihe zu:

$$f(t) = \dots\dots\dots$$



-----> 17

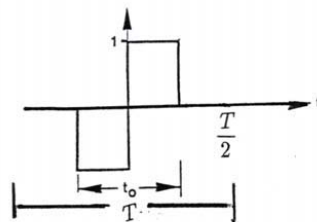
35

Gesucht: Amplitudenfunktion für das alternierende Rechtecksignal

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Das alternierende Rechtecksignal war gegeben als:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} < t < -\frac{t_0}{2} \\ -1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < +\frac{t_0}{2} \\ 0 & \text{für } +\frac{t_0}{2} < t < +\frac{T}{2} \end{cases}$$



Wir müssen das Integral für die Abschnitte berechnen, in denen $f(t)$ nicht verschwindet. Geben Sie zunächst diese Teilintegrale an: $F(\omega) = \dots\dots\dots$

-----> 36

54

Maximum für $t = 0$ und $\omega = 0$

Abfall auf $\frac{1}{e}$, wenn $-\frac{\omega^2}{2a} = -\frac{a}{2}t^2 = -1$

Damit ergeben sich für den Abfall auf $\frac{1}{e}$

$$\frac{a}{2}t^2 = 1 \text{ und } t = \sqrt{\frac{2}{a}} \text{ sowie}$$

$$\frac{\omega^2}{2a} = 1 \text{ und } \omega = \sqrt{2a}$$

Wird a größer, wird der Abfall bei kleinerem t erfolgen, das Signal wird im Zeitbereich schmaler. Demgegenüber wird der Abfall im Frequenzbereich erst bei größerem ω erreicht. Der Frequenzbereich wird breiter.

-----> 55

17

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \cos\left(\frac{n2\pi}{T} \cdot \frac{t_0}{2}\right) \right) \cdot \left(\sin \frac{n2\pi}{T} t \right)$$

Im Lehrbuch, Seite 191, sind die Fourierkoeffizienten für $t_0 = 1$ und $T = 2t_0$, $T = 4t_0$ und $T = 8t_0$ abgebildet.

Es ist eine nützliche Übung, die b_n für wenigstens einen Fall numerisch zu berechnen.

Berechnung der b_n für $t_0 = 1$ und $T = 2$ -----> 18

Direkt weiter -----> 21

36

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t_0}{2}}^0 (-1) \cdot e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{t_0}{2}} e^{-i\omega t} dt$$

Die Integrale können gelöst werden und ergeben mit eingesetzten Integrationsgrenzen:

$$F(\omega) = \dots\dots\dots$$



Lösung -----> 39

Hilfe und detaillierte Lösung -----> 37

55

Sie haben erfolgreich das Ende dieses Kapitels erreicht. Das ist ein wichtiger Schritt nach vorne.



... des Kapitels 23 Fourier-Integrale

18

Die Fourierreihe war: $f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \cos\left(\frac{n2\pi}{T} \cdot \frac{t_0}{2}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{n2\pi}{T} t\right)$

Dann ist zu berechnen: $b_n = \frac{2}{n\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{T} \cdot t_0\right) \right]$

Wir setzen $t_0 = 1$ und $T = 2$.

Füllen Sie die Tabelle aus, um die ersten acht Koeffizienten b_n zu berechnen.

Es ist eine gute Wahl, die Berechnung der Koeffizienten wirklich einmal auszuführen.

Benutzen Sie einen Taschenrechner oder schätzen Sie die Werte per Überslagsrechnung ab.

n	$\frac{2}{n\pi}$	$\cos n \frac{\pi}{2}$	b_n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

-----> 19

37

Zu lösen sind die folgenden Integrale:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t_0}{2}}^0 (-1) \cdot e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{t_0}{2}} e^{-i\omega t} dt$$

$$\text{Erinnerung: } \int_{t_1}^{t_2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} \cdot [e^{-i\omega t_2} - e^{-i\omega t_1}]$$

Wir lösen die Integrale oben und erhalten

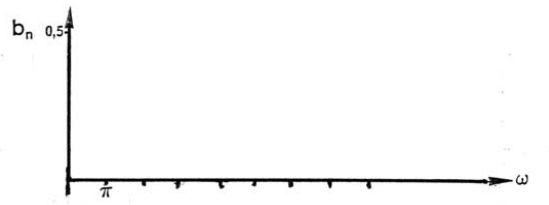
$$F(\omega) = \dots\dots\dots$$

-----> 38

n	$\frac{2}{n\pi}$	$\cos n\frac{\pi}{2}$	b_n
1	0,64	0	0,64
2	0,32	-1	0,64
3	0,22	0	0,22
4	0,16	+1	0
5	0,13	0	0,13
6	0,11	-1	0,22
7	0,09	0	0,09
8	0,08	+1	0

Skizzieren Sie für $t_0 = 1$ und $T = 2$ das Amplitudenspektrum der b_n .

19



-----> 20

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-i\omega} \right) \cdot \left(\left[(-1) \cdot e^{-i\omega t} \right]_{-\frac{t_0}{2}}^0 + \left[e^{-i\omega t} \right]_0^{\frac{t_0}{2}} \right)$$

38

Jetzt setzen wir die Grenzen ein und erhalten

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi(-i\omega)} \cdot \left[\dots \right]$$

-----> 39