
Kapitel 24

Laplace-Transformationen

0

24.1 Laplace-Transformationen

1

Im ersten Arbeitsabschnitt wird der Grundgedanke der Laplace-Transformation entwickelt. Die Definitionen werden gegeben, und es ist zweckmäßig, hier und in den folgenden Abschnitten die Definitionen und Ergebnisse auf einem separaten Zettel zu notieren, damit sie leicht verfügbar bleiben und Sie nicht dauernd nachschlagen müssen.

STUDIERN Sie

24.1 Integraltransformationen, Laplace-Transformationen
Lehrbuch Seite 199 - 201

Danach

-----▷ 2

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}[1 - \cos 2t]$$

50

Die zu transformierende Originalfunktion war $f(t) = 3 \sin^2(2t)$.

Daraus wird, wenn die obige Beziehung benutzt wird:

$$f(t) = 3 \cdot \frac{1}{2}[1 - \cos 4t]$$

Diese Originalfunktion können wir gliedweise transformieren und erhalten

$$\mathcal{L}\left[\frac{3}{2}(1 - \cos 4t)\right] = \dots\dots\dots$$

-----▷ 51

24.4 Lösung von simultanen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

99

LESEN Sie

24.4 Lösung von simultanen Differentialgleichungen mit
konstanten Koeffizienten
Lehrbuch Seite 210 - 212

-----▷ 100

Geben Sie die Definition des Laplace-Integrals an:

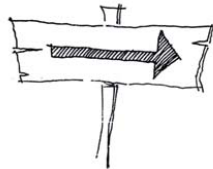
2

$$\mathcal{L}[f(t)] = \dots\dots\dots$$

Benennen Sie

$f(t)$ heißt

$\mathcal{L}[f(t)]$ heißt



-----> 3

$$\mathcal{L}\left[\frac{3}{2}(1 - \cos 4t)\right] = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4^2}$$

51

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4^2} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{s^2 + 16 - s^2}{s(s^2 + 16)} \right]$$

$$= \frac{3 \cdot 8}{s(s^2 + 16)} = \frac{24}{s(s^2 + 16)}$$

-----> 52

100

Das Lösungsverfahren verstanden und
alle Beispiele im Lehrbuch mitgerechnet

-----> 138

Erläuterungen zum 1. Beispiel im Lehrbuch

-----> 101

Erläuterungen zum 2. Beispiel im Lehrbuch

-----> 121

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

3

$f(t)$ heißt Originalfunktion

$\mathcal{L}[f(t)]$ heißt Bildfunktion

Wenn die Bezeichnungen sicher und geläufig sind, hat man weniger Schwierigkeiten beim Studium der Texte.

Das Symbol

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ heißt

Ergänzen Sie die Gleichung

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \dots$

-----> 4

Noch zwei kleine Übungen zur Anwendung der Tabelle der Rücktransformationen.

52

Gegeben sei die Bildfunktion

$$F(s) = \frac{4}{s(s^2 + 4)}$$

Suchen Sie die Originalfunktion

$y = \dots$

Lösung gefunden

-----> 54

Hilfe erwünscht

-----> 53

Beim 1. Beispiel war folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$3\dot{x} + 2x + \dot{y} = 1 \quad \text{für } t = 0: x_0 = y_0 = 0$$

$$\dot{x} + 4\dot{y} + 3y = 0$$

101

1. Schritt: Führen Sie die Laplace-Transformation für beide Gleichungen durch, setzen Sie die Anfangsbedingungen ein und fassen Sie zusammen. Gegebenenfalls in das Lehrbuch schauen.

.....

.....

-----> 102

Das Symbol $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ heißt
inverse Laplace-Transformation oder Umkehrintegral oder Rücktransformation

4

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Bevor Beispiele für den Nutzen der Laplace-Transformationen gegeben werden können, ist eine gewisse Durststrecke zu überwinden, in denen Regeln für die Transformationen gelernt und notiert werden müssen.



-----> 5

Rückzutransformieren ist: $F(s) = \frac{4}{s(s^2 + 4)}$

53

In der Tabelle finden Sie

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)} \quad \text{mit der Rücktransformierten} \quad f(t) = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

Konstante Faktoren bleiben erhalten.

Setzen Sie für unseren Fall $\omega^2 = 4$ und $\omega = 2$, so erhalten Sie:

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

-----> 54

$$\begin{aligned} (3s+2) \mathcal{L}[x] + s \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s} \\ + s \cdot \mathcal{L}[x] + (4s+3) \mathcal{L}[y] &= 0 \end{aligned}$$

102

2. Schritt: Nun ist das Gleichungssystem nacheinander nach $\mathcal{L}[x]$ und $\mathcal{L}[y]$ aufzulösen. Wir beginnen mit $\mathcal{L}[x]$ und eliminieren $\mathcal{L}[y]$. Dafür multiplizieren wir die obere Gleichung mit $(4s+3)$ und die untere mit $(-s)$. Das ergibt:

$$\begin{aligned} (3s+2) \mathcal{L}[x] \cdot (4s+3) + s(4s+3) \mathcal{L}[y] &= \frac{4s+3}{s} \\ -s^2 \mathcal{L}[x] - s(4s+3) \mathcal{L}[y] &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen werden addiert und ergeben

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

-----> 103

24.2 Laplace-Transformationen von Standardfunktionen und allgemeine Regeln

5

Ableitungen, bitte, mitrechnen und Ergebnisse auf separatem Blatt notieren.

STUDIERN Sie

24.1 Laplace-Transformationen von Standardfunktionen
und allgemeine Regeln
Lehrbuch Seite 201 – 204

Danach

-----▷ 6

$$f(t) = \frac{4}{4}(1 - \cos 2t) = 1 - \cos 2t$$

54

Nun noch eine Aufgabe:
Gegeben sei

$$F(s) = \frac{2}{(s^2 - 4s + 3)}$$

Dann ist die Originalfunktion

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden

-----▷ 57

Hilfe

-----▷ 55

$$\mathcal{L}[x] \cdot [(3s+2) \cdot (4s+3) - s^2] = \frac{4s+3}{s}$$

103

Jetzt muss umgeformt werden, damit Ausdrücke entstehen, die wir mit Hilfe der Tabelle auf Seite 214 rücktransformieren können. Wir beginnen mit dem Term auf der linken Seite und multiplizieren aus:

$$\mathcal{L}[x] \cdot (12s^2 + 9s + 8s + 6 - s^2) = \mathcal{L}[x] \cdot (11s^2 + 17s + 6)$$

Um einen Ausdruck der Form $A(s+a) \cdot (s+b)$ zu erhalten, klammern wir 11 aus, lösen die quadratische Gleichung und erhalten

$$\mathcal{L}[x] \cdot 11 \cdot (\dots\dots\dots) \cdot (\dots\dots\dots) = \frac{4s+3}{s}$$

-----▷ 105

Weitere Hilfe

-----▷ 104

Gegeben sei $f(t) = C$

Versuchen Sie, die Berechnung für $F(s)$ selbständig anzugeben

6

$F(s) = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden -----> 8

Hilfe erwünscht -----> 7

Zu lösen sei $F(s) = \frac{2}{(s^2 - 4s + 3)}$

55

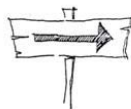
In der Tabelle finden Sie

$F(s) = \frac{1}{(s-a) \cdot (s-b)}$ mit der Originalfunktion $f(t) = \frac{1}{a-b} [e^{at} - e^{bt}]$

Wir können den Nenner so umformen, dass die Tabellenlösung anwendbar ist. Für die quadratische Gleichung im Nenner sind die Nullstellen:

$s_1 = \dots\dots\dots$ $s_2 = \dots\dots\dots$

Damit wird der Nenner zu $s^2 - 4s + 3 = (\dots\dots\dots) \cdot (\dots\dots\dots)$



-----> 56

Zu lösen und umzuformen ist: $\mathcal{L}[x] \cdot (11s^2 + 17s + 6) = \frac{4s+3}{s}$

104

Wir klammern 11 aus und erhalten: $\mathcal{L}[x] \cdot 11 \cdot \left(s^2 + \frac{17}{11}s + \frac{6}{11}\right) = \frac{4s+3}{s}$

Wir lösen nun die quadratische Gleichung $\left(s^2 + \frac{17}{11}s + \frac{6}{11}\right) = 0$

$$s_1 = -\frac{17}{2 \cdot 11} + \sqrt{\frac{17^2}{(2 \cdot 11)^2} - \frac{6}{11}} = -\frac{17}{2 \cdot 11} + \sqrt{\frac{289 - 264}{(2 \cdot 11)^2}} = -\frac{17}{2 \cdot 11} + \sqrt{\frac{25}{(2 \cdot 11)^2}} = -\frac{17}{2 \cdot 11} + \frac{5}{2 \cdot 11} = -\frac{6}{11}$$

$$s_2 = -\frac{17}{2 \cdot 11} - \frac{5}{2 \cdot 11} = -\frac{22}{2 \cdot 11} = -1$$

Damit können wir schreiben $\mathcal{L}[x] \cdot 11 \cdot \left(s^2 + \frac{17}{11}s + \frac{6}{11}\right) = \mathcal{L}[x] \cdot 11 \cdot (\dots\dots\dots) \cdot (\dots\dots\dots) = \frac{4s+3}{s}$

-----> 105

Gegeben: Originalfunktion $f(t) = C$

Gesucht: Bildfunktion $F(s)$. Diese wird ermittelt durch die Ausführung der Laplace-Transformation.

7

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$

Mit $f(t) = C$ ergibt sich

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot C \cdot dt$$

Die Konstante C ausklammern, das Integral lösen, und Integrationsgrenzen einsetzen:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot C \cdot dt = \dots\dots\dots$$

-----> 8

$$s_1 = 3 \quad s_2 = 1$$

56

Damit können wir die quadratische Gleichung als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$s^2 - 4s + 3 = (s - 3) \cdot (s - 1)$$

Es war

$$F(s) = \frac{1}{(s-a) \cdot (s-b)} \quad f(t) = \frac{1}{a-b} [e^{at} - e^{bt}]$$

Also gilt für unsere Bildfunktion $F(s) = \frac{2}{(s-3) \cdot (s-1)}$

die folgende Originalfunktion $f(t) = \dots\dots\dots$

-----> 57

$$\mathcal{L}[x] = 11 \cdot \left(s + \frac{6}{11}\right) = \mathcal{L}[x] \cdot (s+1) \cdot (11s+6) = \frac{4s+3}{s}$$

105

Aufgelöst nach $\mathcal{L}[x]$ ergibt dies: $\mathcal{L}[x] = \frac{4s+3}{s(s+1) \cdot (11s+6)} = \frac{1}{11} \cdot \frac{(4s+3)}{s(s+1) \cdot \left(s + \frac{6}{11}\right)}$

Den Bruch zerlegen wir in drei Partialbrüche, deren Nenner die drei Linearfaktoren des obigen Bruches sind. Nach einer etwas mühseligen Rechnung, in die sich leicht Flüchtigkeitsfehler einschleichen, erhalten wir: $\mathcal{L}[x] = \dots\dots\dots$

Rechnung glücklich gelöst -----> 112

Hilfe und Erläuterung -----> 106

Hinweis: Die Rechnung kann auch durchgeführt werden für den gleichwertigen Ausdruck

$$\mathcal{L}[x] = \frac{(4s+3)}{11 \cdot \left(s(s+1) \cdot \left(s + \frac{6}{11}\right)\right)} \quad \text{Das Ergebnis ist das Gleiche.}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$

8

$$F(s) = C \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{C}{s}$$

In der gleichen Weise ermitteln wir die Laplace-Transformation einer Exponentialfunktion.

Gegeben: $f(t) = e^{at}$

Gesucht: Berechnung von $F(s) = \dots\dots\dots$

Berechnung gelungen -----> 10

Hilfe erwünscht -----> 9

$$f(t) = \frac{2}{2} [e^{3t} - e^t]$$

57

Weitere Übungen und Lösungen finden Sie im Lehrbuch.

Erinnerung: Übungen machen umso mehr Freude, wenn sie leicht sind. Übungen sind aber umso wichtiger, wenn sie schwer erscheinen.

-----> 58

Zu zerlegen ist der Bruch $\frac{4s+3}{s(s+1) \cdot (11s+6)}$

106

Wir setzen Partialbrüche mit den drei Linearfaktoren im Nenner an:

$$\frac{4s+3}{s(s+1) \cdot (11s+6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(11s+6)}$$

Jetzt bringen wir die Partialbrüche auf den Hauptnenner zurück, um Bestimmungsgleichungen für A , B und C zu erhalten.

$$\frac{4s+3}{s(s+1) \cdot (11s+6)} = \frac{\dots\dots\dots}{s(s+1) \cdot (11s+6)}$$



-----> 107

Gegeben: $f(t) = e^{at}$

Gesucht: Laplace-Transformierte $F(s)$.

Wieder müssen Sie die Laplace-Transformation ausführen.

9

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$

Wir setzen das gegebene $f(t)$ ein:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} \cdot dt$$

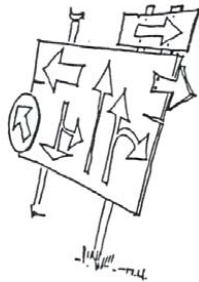
Im Exponenten klammern wir t aus. Dann entsteht ein Integral, das wir schon oft gelöst haben. Schließlich setzen wir die Grenzen ein.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \dots\dots\dots$$

-----> 10

Im nächsten Abschnitt kommen wir zu den Anwendungen. Dabei werden algebraische Umformungen von Brüchen durchgeführt. Es handelt sich um die Partialbruchzerlegung. Sie ist im Lehrbuch im Anhang dargestellt. Falls Ihnen die Partialbruchzerlegung unbekannt ist, studieren Sie zunächst den Anhang im Lehrbuch, Seite 228 - 231.

58



Danach -----> 61

Partialbruchzerlegung bekannt -----> 59

$$\frac{4s+3}{s(s+1) \cdot (11s+6)} = \frac{A \cdot (s+1) \cdot (11s+6) + B \cdot s \cdot (11s+6) + C \cdot s(s+1)}{s(s+1) \cdot (11s+6)}$$

107

Wir multiplizieren die Ausdrücke im Zähler aus und ordnen nach Potenzen von s :

$$\frac{4s+3}{s(s+1) \cdot (11s+6)} = \frac{s^2(\dots\dots\dots) + s \cdot (\dots\dots\dots) + \dots\dots\dots}{s(s+1) \cdot (11s+6)}$$

-----> 108

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{(s-a)}$$

10

Die Laplace-Transformation trigonometrischer Funktionen wird wie folgt ermittelt.
Wir beginnen mit der Sinusfunktion:

$$f(t) = \sin \omega t$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \dots\dots\dots$$

Hinweis: Mit Hilfe der Eulerschen Formeln lässt sich $\sin \omega t$ durch Exponentialfunktionen ausdrücken.



Lösung gefunden -----> 13

Hilfe erwünscht -----> 11

Zerlegen Sie den folgenden Bruch in Partialbrüche (Nullstellen sind reell und einfach):

59

$$f_1(x) = \frac{5x+11}{x^2+6x+8} = \dots\dots\dots$$

Zerlegen Sie noch den folgenden Bruch (Nullstellen sind reell und mehrfach):

$$f_2(x) = \frac{1}{x^3-3x^2+4} = \frac{1}{(x+1) \cdot (x-2)^2} = \dots\dots\dots$$

Zerlegen Sie nun als Letztes (eine reelle und zwei komplexe Nullstellen):

$$f_3(x) = \frac{2x^2-13x+20}{x(x^2-4x+5)} = \dots\dots\dots$$

-----> 60

$$\frac{4s+3}{s(s+1)(11s+6)} = \frac{s^2(11A+11B+C) + s(17A+6B+C) + 6A}{s(s+1)(11s+6)}$$

108

Die Koeffizienten von s müssen jeweils gleich sein. Damit erhalten wir drei Bestimmungsgleichungen für A , B und C .

Konstante Glieder	$3 = 6A$
für s :	$4 = 17A + 6B + C$
für s^2 :	$0 = 11A + 11B + C$

Daraus erhalten wir $A = \dots\dots\dots B = \dots\dots\dots C = \dots\dots\dots$

Lösung -----> 111

Ausführliche Rechnung -----> 109

Gesucht ist die Laplace-Transformation der Sinusfunktion $f(t) = \sin \omega t$.

Bekannt ist die Transformation der Exponentialfunktion

11

$$\mathcal{L}[e^{at}] = F(s) = \frac{1}{s-a}$$

Hinweis: Sie sollten diese Ergebnisse auf einem separaten Blatt notiert haben, um schnell nachschlagen zu können.

Wir erinnern uns an die Eulerschen Formeln

$$e^{i\omega t} = i \sin \omega t + \cos \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = -i \sin \omega t + \cos \omega t$$

Damit lässt sich $\sin \omega t$ als Differenz der Exponentialfunktionen darstellen. $e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} = \dots\dots\dots$

-----> 12

$$f_1(x) = \frac{5x+11}{x^2+6x+8} = \frac{5x+11}{(x+2) \cdot (x+4)} = \frac{1}{2(x+2)} + \frac{9}{2(x+4)}$$

60

$$f_2(x) = \frac{1}{9(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{1}{9(x-2)^2}$$

$$f_3(x) = \frac{4}{x} + \frac{-2x+3}{x^2+4x+5}$$

Sie kennen glücklicherweise die Partialbruchzerlegung und können sofort mit dem nächsten Abschnitt beginnen.

-----> 61

Falls Sie allerdings Schwierigkeiten hatten, ist es sinnvoller, jetzt doch noch den Anhang im Lehrbuch, Seite 228 - 231, zu studieren oder zu rekapitulieren und dort die Beispiele zu rechnen. Sie ersparen sich damit künftige Schwierigkeiten.

Zu lösen sind drei Gleichungen mit drei Unbekannten

- 1) $3 = 6A$
- 2) $4 = 17A + 6B + C$
- 3) $0 = 11A + 11B + C$

109

Gleichung 1):

$$A = \frac{1}{2}$$

Gleichung 2) minus Gleichung 3):

$$4 = -\frac{11}{2} - 11B - C + \frac{17}{2} + 6B + C$$

Gleichung 3)

$$4 = 3 - 5B$$

Das ergibt

$$B = \dots\dots\dots$$

A und B in Gleichung 3) eingesetzt:

$$0 = \frac{11}{2} - \frac{11}{5} + C$$

$$C = \dots\dots\dots$$



$$e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} = 2i \sin \omega t \quad \text{Daraus folgt} \quad \sin \omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

12

Da wir die Exponentialfunktionen bereits transformieren können, ist das Problem gelöst.

Es bleibt nur ein wenig Rechenarbeit.

Bekannt ist:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = F(s) = \frac{1}{s-a}$$

Eingesetzt erhalten wir:

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = F(s) = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right]$$

Jetzt bringen wir die Brüche in der Klammer auf den Hauptnenner und erhalten

$$F(s) = \dots\dots\dots$$

-----> 13

Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

61

Nachdem Sie die nicht ganz einfachen Vorbereitungen erfolgreich gemeistert haben, kommen nun Anwendungen, die für manche Mühe entschädigen können. Rechnen Sie die Beispiele mit und schlagen Sie gegebenenfalls in der Tabelle Seite 214 nach.

STUDIERN Sie 24.3 Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
Lehrbuch Seite 208 - 210

Danach

-----> 62

$$A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{5} \quad C = -\frac{33}{10}$$

110

Damit ist die Partialbruchzerlegung abgeschlossen:

$$\mathcal{L}[x] = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(11s+6)}$$

$$\mathcal{L}[x] = \dots\dots\dots$$

-----> 111

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = F(s) = \frac{1}{2i} \left[\frac{s + i\omega - s + i\omega}{s^2 + \omega^2} \right]$$

13

Oder vereinfacht

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = F(s) = \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right]$$

Die Laplace-Transformation der Kosinusfunktion wird in der gleichen Weise gewonnen.
Versuchen Sie das Problem selbständig zu lösen.

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = F(s) = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden -----> 18

Hilfe erwünscht -----> 14

62

Alle Beispiele mitgerechnet und verstanden -----> 86

Hilfserläuterungen und detaillierte Berechnung der Beispiele -----> 63

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{2s} - \frac{1}{5(s+1)} - \frac{33}{10} \cdot \frac{1}{(11s+6)}$$

111

Umgeformt

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{2s} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(s+1)} - \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{6}{11}\right)}$$

3. Schritt:

Jetzt können wir die Rücktransformation unter Benutzung der Tabelle auf Seite 214 durchführen
und erhalten

$$x = \dots\dots\dots$$

-----> 112

Zu bestimmen ist $\mathcal{L}[\cos \omega t]$.

14

Zuerst müssen wir wieder $\cos \omega t$ mit Hilfe der Eulerschen Formeln als Summe oder Differenz von Exponentialfunktionen ausdrücken.

Die Eulerschen Formeln waren:

$$e^{i\omega t} = \dots\dots\dots$$

$$e^{-i\omega t} = \dots\dots\dots$$

Damit lässt sich die Kosinusfunktion ausdrücken als $\cos \omega t = \dots\dots\dots$

-----> 15

Eine erste Schwierigkeit könnte darin bestehen, dass in diesem Abschnitt die Originalfunktion als $y(t)$ und dementsprechend die Ableitungen als $y'(t)$ und $y''(t)$ notiert werden. Das ist gleichwertig zur Notierung $f(t)$, $f'(t)$ und $f''(t)$ wie in den vorhergehenden allgemein gehaltenen Abschnitten, aber das wurde bereits erwähnt.

63

Schwierigkeiten beim ersten Beispiel -----> 64

Schwierigkeiten bei anderen Beispielen -----> 74

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot e^{-t} - \frac{3}{10} \cdot e^{-\frac{6}{11}t}$$

112

Jetzt ist noch y zu berechnen. Dazu müssen wir das gegebene Gleichungssystem nach der Transformation nach $\mathcal{L}[y]$ auflösen und $\mathcal{L}[x]$ eliminieren.

Es war:

$$\begin{array}{rcl} (3s+2) \mathcal{L}[x] & +s \mathcal{L}[y] & = \frac{1}{s} \\ +s \mathcal{L}[x] & + (4s+3) \mathcal{L}[y] & = 0 \end{array}$$

Um $\mathcal{L}[x]$ zu eliminieren multiplizieren wir die obere Gleichung mit $-s$ und die untere mit $(3s+2)$, um sie später zu addieren.

Das ergibt:.....=.....

-----> 113

$$e^{i\omega t} = i \sin \omega t + \cos \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = -i \sin \omega t + \cos \omega t$$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]$$

15

Jetzt können wir bilden:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = F(s) = \dots\dots\dots$$



Lösung gefunden

-----> 18

Noch eine Hilfe erwünscht?

-----> 16

Das erste Beispiel war die Differentialgleichung $4y + y' = e^{-2t}$
 Die Anfangsbedingungen waren $t = 0, y_0 = 5$

64

Als ersten Schritt führen wir die Laplace-Transformation der Differentialgleichung gliedweise durch und erinnern uns an die Transformationen

$$\mathcal{L}[y] = F(s)$$

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot F(s) - y_0$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

Die Transformierte der gegebenen Differenzialgleichung ist:.....

Kontrollieren Sie, bitte, gegebenenfalls in der Tabelle Seite 213 das Ergebnis der gliedweisen Transformation der obigen Gleichung.



-----> 65

$$-s(3s+2) \cdot \mathcal{L}[x] \quad -s^2 \cdot \mathcal{L}[y] = -1$$

$$s(3s+2) \cdot \mathcal{L}[x] + (4s+3) \cdot (3s+2) \cdot \mathcal{L}[y] = 0$$

113

Jetzt addieren wir beide Gleichungen und erhalten

$$\mathcal{L}[y] \cdot [(4s+3) \cdot (3s+2) - s^2] = -1$$

$$\text{Ausmultipliziert ergibt das: } \mathcal{L}[y] \cdot (11s^2 + 17s + 6) = -1$$

Die quadratische Gleichung haben wir schon im Lehrschrift 104 gelöst mit dem Ergebnis

$$s_1 = -\frac{6}{11}, \quad s_2 = -1$$

$$\text{Also wird } \mathcal{L}[y] = \frac{-1}{\dots\dots\dots}$$

-----> 114

Die Aufgabe ist, die Laplace-Transformation durchzuführen für $f(t) = \cos \omega t$.

16

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t dt$$

Wir wissen bereits $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$

Wir wissen auch $\cos \omega t = \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]$

Das setzen wir oben ein und erhalten

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\right] = \dots\dots\dots$$

-----> 17

$$4F(s) + s \cdot F(s) - y_0 = \frac{1}{s+2}$$

Anfangsbedingung $y_0 = 5$

65

Als zweiten Schritt lösen wir die obige Gleichung nach $F(s)$ auf und setzen $y_0 = 5$ ein.

$$F(s) = \dots\dots\dots$$

-----> 66

$$\mathcal{L}[y] = \frac{-1}{(s+1) \cdot (11s+6)}$$

114

Wir zerlegen den Bruch wieder in zwei Partialbrüche und erhalten

$$\mathcal{L}[y] = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden

-----> 118

Hilfe und detaillierte Rechnung

-----> 115

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L} \left[\frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right]$$

17

Umgeformt und auf den Hauptnenner gebracht erhalten wir schließlich:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = F(s) = \dots\dots\dots$$

-----> 18

$$F(s) = \frac{5}{(s+4)} + \frac{1}{(s+2) \cdot (s+4)}$$

66

Wir können schon den dritten Schritt, die Rücktransformation durchführen. Die Rücktransformation wird für beide Terme nacheinander ausgeführt. Die Originalfunktion y ist dann die Summe der beiden Teiloriginalfunktionen $y_1 + y_2$.

Schlagen Sie die Tabelle auf Seite 214 auf und suchen Sie die Teiloriginalfunktionen für

$$F(s) = \frac{5}{s+4} \quad y_1 = \dots\dots\dots$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+2) \cdot (s+4)} \quad y_2 = \dots\dots\dots$$

Ergebnis gefunden -----> 69

Hilfe erwünscht -----> 67

In Partialbrüche zu zerlegen ist: $\frac{-1}{(s+1) \cdot (11s+6)}$

115

Ansatz: $\frac{-1}{(s+1) \cdot (11s+6)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(11s+6)}$

Wir bringen auf den Hauptnenner:

$$\frac{-1}{(s+1) \cdot (11s+6)} = \frac{A(11s+6) + B(s+1)}{(s+1) \cdot (11s+6)}$$

Ausmultipliziert und nach Potenzen von s geordnet erhalten wir

$$\frac{-1}{(s+1) \cdot (11s+6)} = \frac{\dots\dots\dots}{(s+1) \cdot (11s+6)}$$

-----> 116

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

18

Bestimmen Sie die Bildfunktionen $F(s)$ von $f(t) = 5 \cdot \sin 4t$

$$F(s) = \dots\dots\dots$$

-----> 19

In der Tabelle auf Seite 214 werden die Terme in allgemeiner Form angegeben.

Sie finden nicht $F(s) = \frac{5}{s+4}$ sondern $F(s) = \frac{1}{s-a}$ mit der Originalfunktion e^{at}

67

Das entspricht dem Ausdruck der Tabelle, denn der konstante Faktor 5 bleibt bei der Transformation unverändert erhalten.

Wir setzen $a = -4$

Also wird die Originalfunktion für $F(s) = \frac{5}{s+4}$ zu $y_1 = \dots\dots\dots$

-----> 68

$$\frac{-1}{(s+1) \cdot (11s+6)} = \frac{s[11A+B] + 6A+B}{(s+1) \cdot (11s+6)}$$

116

Das ergibt die Bestimmungsgleichungen für A und B

$$\begin{aligned} -1 &= 6A + B \\ 0 &= 11A + B \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$A = \dots\dots\dots$$

$$B = \dots\dots\dots$$

-----> 117

$$F(s) = \frac{5 \cdot 4}{s^2 + 16}$$

19

Bestimmen Sie die Bildfunktionen $F(s)$ von $f(t) = 5 \cdot \cos 4t$

$$F(s) = \dots\dots\dots$$

-----> 20

$$y_1 = 5 \cdot e^{-4t}$$

68

Bleibt noch, die Teiloriginalfunktion y_2 zu finden für $F(s) = \frac{1}{(s+2) \cdot (s+4)}$

In der Tabelle finden Sie $F(s) = \frac{1}{(s-a) \cdot (s-b)}$ mit der Originalfunktion

$$y = \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$$

Mit $a = -2$ und $b = -4$ wird die Teiloriginalfunktion zu:

$$y_2 = \dots\dots\dots$$

-----> 69

$$A = \frac{1}{5}$$

$$B = -\frac{11}{5}$$

117

Damit erhalten wir

$$\mathcal{L}[y] = \dots\dots\dots$$

-----> 118

$$F(s) = \frac{5 \cdot s}{s^2 + 16}$$

20

Berechnung der Laplace-Transformation einer linearen Funktion $f(t) = C \cdot t$

Gesucht: $\mathcal{L}[C \cdot t] = F(s)$

$F(s) = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden -----> 22

Hilfe gewünscht -----> 21

$$y_2 = \frac{1}{2} [e^{-2t} - e^{-4t}]$$

69

Bereits gefunden ist: $y_1 = 5 \cdot e^{-4t}$

Jetzt fassen wir die beiden Teile der Originalfunktion zusammen und erhalten

$y = y_1 + y_2 = \dots\dots\dots$

-----> 70

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{5(s+1)} - \frac{11}{5} \frac{1}{(11s+6)}$$

118

oder

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{5(s+1)} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{s + \frac{6}{11}} \right)$$

3. Schritt: Rücktransformation

$y(t) = \dots\dots\dots$

-----> 119

Die Herleitung der Laplace-Transformation einer linearen Funktion ist im Lehrbuch auf Seite 202 dargestellt. Studieren Sie, bitte, Abschnitt 24.2.4 erneut und rechnen Sie alle Umformungen mit. Gegebenenfalls schlagen Sie die partielle Integration nach.

21

Lösen Sie parallel zum Lehrbuchtext

$$\mathcal{L}[C \cdot t] = \dots\dots\dots$$



-----> 22

$$y = 5 \cdot e^{-4t} + \frac{1}{2} [e^{-2t} - e^{-4t}] = \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{9}{2} e^{-4t}$$

70

Im Lehrbuch ist die Bildfunktion in etwas anderer Weise umgeformt.

Möchte auch die Umformung im Lehrbuch erklärt haben

-----> 71

Möchte weiter gehen



-----> 74

$$y(t) = \frac{1}{5} \cdot e^{-t} - \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{6}{11}t} = \frac{1}{5} \left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t} \right)$$

119

Die meisten Schwierigkeiten entstehen bei den algebraischen Umformungen, weil sich leicht Schreibfehler einschleichen, die dann nur schwer zu entdecken sind.

-----> 120

$$\mathcal{L}[C \cdot t] = F(s) = \frac{C}{s^2}$$

22

Gegeben sei

$$f(t) = 5 \cdot t$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \dots\dots\dots$$

-----> 23

Die Bildfunktion (Lehrschrte 66) war $F(s) = \frac{5}{s+4} + \frac{1}{(s+2) \cdot (s+4)}$

71

Im Lehrbuch ist die Bildfunktion auf den Hauptnenner gebracht: $F(s) = \frac{5s+11}{(s+2) \cdot (s+4)}$

Wir zerlegen den Bruch in Partialbrüche, um einfachere Terme zu erhalten.

Ansatz: $\frac{5s+11}{(s+2) \cdot (s+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+4}$

Bestimmung von A und B. Wir bringen auf den Hauptnenner: $\frac{5s+11}{(s+2) \cdot (s+4)} = \frac{As+4A+Bs+2B}{(s+2) \cdot (s+4)}$

Koeffizientenvergleich: Die Zähler müssen für alle Werte von s gleich sein. Also gilt

$$5s+11 = (A+B) \cdot s + 4A+2B$$

Daraus folgen die Bestimmungsgleichungen für A und B: $5 = A+B$ und $11 = 4A+2B$

$A = \dots\dots\dots B = \dots\dots\dots$ -----> 72

Falls Sie Schwierigkeiten mit der Partialbruchzerlegung hatten, studieren Sie im Lehrbuch noch einmal den Anhang Seite 228 - 231 und lösen Sie parallel die obige Aufgabe

120

Keine Schwierigkeiten mit Beispiel 2 im Lehrbuch -----> 138

Ausführliche Darstellung von Beispiel 2 im Lehrbuch -----> 121

$$F(s) = \frac{5}{s^2}$$

23

Verschiebungssatz. Für eine im Originalbereich um a nach rechts verschobene Funktion gilt

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = \dots\dots\dots$$

-----> 24

$$A = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{9}{2}$$

72

Damit wird die Bildfunktion zu:

$$F(s) = \frac{5s+11}{(s+2) \cdot (s+4)} = \frac{1}{2(s+2)} + \frac{9}{2(s+4)}$$

Die Rücktransformation führen wir wieder durch mit Hilfe der Tabelle im Lehrbuch Seite 214.

$$y = \dots\dots\dots$$

-----> 73

Beispiel 2: Zu lösen ist das Gleichungssystem

121

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - \dot{y} = 1$$

$$\text{Für } t = 0: \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = y_0 = \dot{y}_0 = 0$$

$$\dot{x} + \dot{y} + 2y = 0$$

1. Schritt: Laplacetransformation und Einsetzen der Anfangsbedingungen.
Ergebnis:

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$



-----> 122

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} \cdot F(s)$$

24

Wir betrachten wieder die Gerade durch den Koordinatenursprung: $f(t) = 5t$

Ihre Transformierte kennen wir bereits: $F(s) = \frac{5}{s^2}$

Jetzt betrachten wir die Gerade $f(t) = 5t - 25$

Es ist die um 5 nach rechts verschobene Gerade, denn $f(t) = 5(t-5) = 5t - 25$

Geben Sie die Transformierte für diese Gerade mit Hilfe des Verschiebungssatzes an.

$$\mathcal{L}[5(t-5)] = \dots\dots\dots$$



-----> 25

$$y = \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{9}{2} e^{-4t}$$

73

Das Ergebnis ist das gleiche. Bei der Umformung der Gleichung $F(s)$ im Bildbereich sind unterschiedliche Wege möglich. Mit Geschick und etwas Übung muss man einen Weg suchen, um Terme zu finden, für die man die Rücktransformation durchführen kann. Dabei hilft oft die Partialbruchzerlegung, die im Lehrbuch im Anhang auf Seite 228 erläutert ist.

-----> 74

$$(s^2 + 2) \mathcal{L}[x] - 5 \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s} + s$$

122

$$s \mathcal{L}[x] + (s^2 + 2) \mathcal{L}[y] = x_0 = 1$$

2. Schritt: Auflösung nach $\mathcal{L}[x]$ und Eliminierung von $\mathcal{L}[y]$.

Dafür multiplizieren wir die obere Gleichung mit $(s^2 + 2)$ und die untere mit s . Dann addieren wir, $\mathcal{L}[y]$ fällt heraus.

Wir erhalten

$$\mathcal{L}[x] = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

-----> 123

$$\mathcal{L}[5(t-5)] = e^{-5s} \cdot \frac{5}{s^2}$$

25

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes können wir beliebige lineare Funktionen, die nach rechts verschoben sind, transformieren.

Gegeben sei

$$f(t) = a \cdot t - b$$

1. Schritt: Formen Sie so um, dass Sie die Transformation durchführen können

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

-----> 26

Bestimmen Sie den Fortgang Ihrer Arbeit selbst

74



Schwierigkeiten bei Beispiel 2 -----> 75

Schwierigkeiten bei Beispiel 3 -----> 78

Schwierigkeiten bei Beispiel 4 -----> 84

Weiter, keine Schwierigkeiten gehabt -----> 86

$$\mathcal{L}[x] \cdot \left[(s^2 + 2)^2 + s^2 \right] = \frac{s^2 + 2}{s} + s(s^2 + 2) + s$$

123

Wir formen die rechte Seite um und bringen sie auf den Nenner s . Auf der linken Seite multiplizieren wir aus:

$$\mathcal{L}[x] \cdot [\dots\dots\dots] = \frac{\dots\dots\dots}{s}$$

-----> 124

1. Schritt: $f(t) = a \cdot \left(t - \frac{b}{a}\right)$ Damit ist die Gerade um $\frac{b}{a}$ nach rechts verschoben.

26

2. Schritt: Das Ergebnis der Laplace-Transformation ist $F(s) = \frac{a}{s^2} \cdot e^{-\frac{b}{a}s}$

Gegeben sei die Gerade $f(t) = 5t - 50$

Formen Sie so um, dass Sie die Laplace-Transformation durchführen können

$f(t) = \dots\dots\dots$

Führen Sie nun die Laplace-Transformation durch

$F(s) = \dots\dots\dots$

-----> 27

Beispiel 2 war: $y'' + 5y' + 4y = 0$ Anfangsbedingungen: $t = 0$ $y_0 = 0$ $y'_0 = 3$

75

Die Lösung erfolgt immer in den drei Schritten:

1. Schritt: Transformation in den Bildbereich. Einsetzen der Anfangsbedingungen.

2. Schritt: Umformung der Gleichung im Bildbereich.

Auflösung nach $F(s)$ und Vereinfachung.

3. Schritt: Rücktransformation

Gegebenenfalls lesen Sie noch einmal im Lehrbuch den ersten Abschnitt von 24.3 nach.

Im Beispiel 2 sind alle Schritte im Lehrbuch ausführlich gerechnet.

Schwierigkeiten könnten entstehen bei der Umformung von $F(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 4}$

Wir lösen die quadratische Gleichung im Nenner und bestimmen die Nullstellen. Dann stellen wir $F(s)$ als Produkt von Linearfaktoren dar.

$s_1 = \dots\dots\dots$ $s_2 = \dots\dots\dots$ $F(s) = \frac{3}{\dots\dots\dots}$

-----> 76

$$\mathcal{L}[x] \cdot [s^4 + 5s^2 + 4] = \frac{s^4 + 4s^2 + 2}{s}$$

124

Das ergibt aufgelöst $\mathcal{L}[x] = \frac{s^4 + 4s^2 + 2}{s(s^4 + 5s^2 + 4)}$

Um eine Partialbruchzerlegung durchzuführen, mit der wir rücktransformierbare Terme erhalten, müssen wir die Klammer in ein Polynom der Form $(s^2 + a) \cdot (s^2 + b)$ bringen. Dazu lösen wir die Gleichung $s^4 + 5s^2 + 4$ nach s^2 auf. Im Hinblick auf s^2 ist dies eine quadratische Gleichung.

Das ergibt

$$s_1^2 = \dots\dots\dots$$

$$s_2^2 = \dots\dots\dots$$

$$s^4 + 5s^2 + 4 = (s^2 - \dots\dots\dots) \cdot (s^2 - \dots\dots\dots)$$

Lösung gefunden -----> 126

Lösung der Quadratischen Gleichung -----> 125

$$f(t) = 5t - 50 = 5(t - 10)$$

27

$$F(s) = \frac{5}{s^2} \cdot e^{-10s}$$

Dämpfungssatz: Gegeben seien eine Funktion $f(t)$ und ihre Transformierte $F(s)$

Dann gilt $F(s+a) = \dots\dots\dots$

-----> 28

$$s_1 = -4 \quad s_2 = -1 \quad F(s) = \frac{3}{(s+4) \cdot (s+1)}$$

76

Dieser Ausdruck für $F(s)$ kann mit Hilfe der Tabelle rücktransformiert werden

$y = \dots\dots\dots$

Die weitere Vereinfachung ist bereits in Lehrschritt 71 für die folgende Funktion erklärt.
Gegebenfalls dort nachsehen

$$F(s) = \frac{5s+11}{s(s+2) \cdot (s+4)}$$

-----> 77

Nach s^2 auflösen ist: $s^4 + 5s^2 + 4 = 0$

125

Wir lösen die quadratische Gleichung. Also: $s^2 = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$

$$s_1^2 = \dots\dots\dots$$

$$s_2^2 = \dots\dots\dots$$

$$s^4 + 5s^2 + 4 = (s^2 + \dots\dots\dots) \cdot (s^2 + \dots\dots\dots)$$

-----> 126

$$F(s+a) = \mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)]$$

28



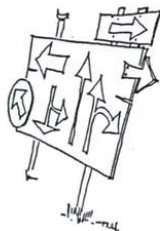
Beweis im Lehrbuch verstanden -----> 30

Zusätzliche Erläuterung zum Beweis -----> 29

$$y = e^{-t} - e^{-4t}$$

77

Wieder können Sie wählen



Schwierigkeiten bei Beispiel 3 -----> 78

Schwierigkeiten bei Beispiel 4 -----> 84

Weiter -----> 86

$$s_1^2 = -1 \quad s_2^2 = -4$$

126

$$s^4 + 5s^2 + 4 = (s^2 + 1) \cdot (s^2 + 4)$$

$$\text{Damit wird } \mathcal{L}[x] = \frac{s^4 + 4s^2 + 2}{s(s^2 + 1) \cdot (s^2 + 4)}$$

Jetzt zerlegen wir in Partialbrüche, die später rücktransformiert werden können.

Die Nullstellen sind konjugiert komplex, so sind sie für $(s^2 + 1) = 0$: $s_1 = +i$ und $s_2 = -i$.

$$\text{Daher gilt der folgende Ansatz: } \frac{s^4 + 4s^2 + 2}{s(s^2 + 1) \cdot (s^2 + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B_1 + B_2 s}{s^2 + 1} + \frac{C_1 + C_2 s}{s^2 + 4}$$

Wir bringen die rechte Seite wieder auf den ursprünglichen Hauptnenner

$$\frac{s^4 + 4s^2 + 2}{s(s^2 + 1) \cdot (s^2 + 4)} = \frac{\dots}{s(s^2 + 1) \cdot (s^2 + 4)}$$



Zu beweisen ist, dass gilt: $F(s+a) = \mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)]$

29

Wir suchen die Laplace-Transformierte der Funktion $e^{-at} \cdot f(t)$.
Dabei sei die Transformierte von $f(t)$ bekannt als $F(s)$.

Wir schreiben die Formel für die Laplace-Transformation auf: $\mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} \cdot f(t) dt$

Unter dem Integral vereinfachen wir zu $\mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} \cdot f(t) dt$

Das Integral ergibt die bereits als bekannt vorausgesetzte Transformierte $F(s+a)$

Damit ist bewiesen, dass $\mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)] = F(s+a)$

-----> 30

Drittes Beispiel:

78

Zu lösen ist die folgende Differentialgleichung: $y'' + 8y' + 17y = 0$

Anfangsbedingungen: $t = 0 \quad y_0 = 0 \quad y'_0 = 3$

1. Schritt: Die Transformation der Differentialgleichung in den Bildbereich folgt den

gegebenen Regeln und führt zu:= 0

-----> 79

$$\frac{s^4 + 4s^2 + 2}{s(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{A(s^4 + 5s^2 + 4) + B_1s(s^2 + 4) + B_2s^2(s^2 + 4) + C_1s(s^2 + 1) + C_2s^2(s^2 + 1)}{s(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \quad 127$$

Wir multiplizieren im Zähler aus, ordnen nach Potenzen von s und vergleichen die Zähler.

$$s^4 + 4s^2 + 2 = \dots\dots\dots$$

-----> 128

Gegeben sei $f(t) = 3 \cdot \sin 2t \cdot e^{-4t}$

Gesucht die Transformierte $F(s)$

30

$F(s) = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden -----> 33

Hilfe erwünscht -----> 31

$$F(s) \cdot s^2 - f_0 - f'_0 - s f_0 + 8F(s) \cdot s - 8f_0 + 17F(s) = 0$$

79

2. Schritt: Einsetzen der Anfangsbedingungen ($t = 0, y_0 = 0, y'_0 = 2$) und Auflösung nach $F(s)$.

$F(s) = \dots\dots\dots$

-----> 80

$$s^4 + 4s^2 + 2 = s^4(A + B_2 + C_2) + s^3(B_1 + C_1) + s^2(5A + 4B_2 + C_2) + s(4B_1 + C_1) + 4A$$

128

Die Faktoren der Potenzen von s müssen gleich sein.

Damit gewinnen wir fünf Bestimmungsgleichungen für A, B_1, B_2, C_1 und C_2 .

Aufgelöst ergibt das:

$A = \dots\dots\dots$

$B_1 = \dots\dots\dots$

$B_2 = \dots\dots\dots$

$C_1 = \dots\dots\dots$

$C_2 = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden -----> 130

Hilfe und ausführliche Rechnung -----> 129

Gegeben war $f(t) = 3 \sin 2t \cdot e^{-4t}$

Wegen des Dämpfungsgliedes e^{-4t} können wir den Dämpfungssatz anwenden.

31

Zuerst berechnen wir die Transformierte von

$$\mathcal{L}[3 \sin 2t] = \dots\dots\dots$$

Hinweis: Die Formel wurde bereits abgeleitet. Gegebenenfalls in Ihren Notizen oder im Lehrbuch nachschlagen.

$$\mathcal{L}[3 \sin 2t] = F(s) = \dots\dots\dots$$

-----> 32

$$F(s) = \frac{3}{s^2 + 8s + 17}$$

80

In der Tabelle ist die Originalfunktion für die folgende Bildfunktion angegeben

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad y = \frac{1}{\omega} \cdot e^{at} \cdot \sin \omega t$$

Damit entsteht die Aufgabe, den gegebenen Nenner unserer Bildfunktion so umzuformen, dass die obige Beziehung angewandt werden kann.

$$\text{Das gelingt mit } F(s) = \frac{3}{((s+4)^2 + 1)}$$

Dem entspricht mit $a = -4$ und $\omega^2 = 1$ die Originalfunktion

$$y(t) = \dots\dots\dots$$

-----> 81

Koeffizientenvergleich für Potenzen von s

129

$$s^4 + 4s^2 + 2 = s^4(A + B_2 + C_2) + s^3(B_1 + C_1) + s^2(5A + 4B_2 + C_1) + s(4B_1 + C_1) + 4A$$

$$\text{Koeffizienten von } s^4: \quad 1 = A + B_2 + C_2$$

$$\text{Koeffizienten von } s^3: \quad 0 = B_1 + C_1$$

$$\text{Koeffizienten von } s^2: \quad 4 = 5A + 4B_2 + C_1$$

$$\text{Koeffizienten von } s^1: \quad 0 = 4B_1 + C_1$$

$$\text{Koeffizienten von } s^0: \quad 2 = 4A$$

Wir lösen auf, beginnend mit A, und erhalten

$$A = \dots\dots\dots$$

$$B_1 = \dots\dots\dots$$

$$B_2 = \dots\dots\dots$$

$$C_1 = \dots\dots\dots$$

$$C_2 = \dots\dots\dots$$

-----> 130

$$\mathcal{L}[3 \sin 2t] = F(s) = \frac{3 \cdot 2}{s^2 + 4}$$

32

Zu berechnen ist jedoch $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[3 \sin 2t \cdot e^{-4t}]$

Jetzt wenden wir den Dämpfungssatz an

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cdot 3 \sin 2t] = F(s + a)$$

$$\mathcal{L}[e^{-4t} \cdot 3 \sin 2t] = \dots\dots\dots$$

-----> 33

$$y = 3 \cdot e^{-4t} \cdot \sin t$$

81

Wir hätten die Bildfunktion $F(s)$ auch anders umformen können.

Das ist im Lehrbuch im Beispiel 2 gezeigt. Dann wird die Wurzel der Gleichung im Nenner bestimmt, und die folgende Form entsteht:

$$F(s) = \frac{3}{(s-a) \cdot (s-b)}$$

Will auch diese Umformung kennen lernen -----> 82

Schwierigkeiten bei Beispiel 4 -----> 84

Weiter -----> 86

$$A = \frac{1}{2}$$

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = \frac{1}{3}$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{6}$$

130

$$\text{Damit wird } \mathcal{L}[x] = \frac{s^4 + 4s^2 + 2}{s(s^4 + 5s^2 + 4)} \text{ zu}$$

$$\mathcal{L}[x] = \dots\dots\dots$$

-----> 131

$$\mathcal{L}[e^{-4t} \cdot 3 \sin 2t] = \frac{3 \cdot 2}{(s+4)^2 + 4}$$

33

Gegeben: $f(t) = e^{-2t} \cdot \cos \pi t$

Gesucht: $\mathcal{L}[e^{-2t} \cdot \cos \pi t] = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden

-----> 35

Hilfe erwünscht

-----> 34

Gegeben ist die Bildfunktion: $F(s) = \frac{3}{s^2 + 8s + 17}$

82

Lösung der quadratischen Gleichung im Nenner ergibt:

$s_1 = \dots\dots\dots$

$s_2 = \dots\dots\dots$

-----> 83

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{2s} + \frac{1}{3} \frac{s}{(s^2 + 1)} + \frac{1}{6} \frac{s}{(s^2 + 4)}$$

131

3. Schritt: Rücktransformation

Unter Benutzung der Tabelle im Lehrbuch, Seite 214, erhalten wir

$x(t) = \dots\dots\dots$

-----> 132

Wir gehen vor wie bei der letzten Aufgabe, bestimmen $\mathcal{L}[\cos \pi t]$ und wenden dann den Dämpfungssatz an.

34

$$\mathcal{L}[\cos \pi t] = \frac{s}{s^2 + \pi^2}$$

Der Dämpfungssatz war $\mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)] = F(s + a)$

Damit wird $\mathcal{L}[e^{-2t} \cdot \cos \pi t] = \dots\dots\dots$



-----> 35

$$s_1 = -4 + i$$

$$s_2 = -4 - i$$

83

Damit wird $F(s)$ zu $F(s) = \frac{3}{(s + 4 + i) \cdot (s + 4 - i)}$

Jetzt haben wir eine andere Form, die wir ebenfalls lösen können.

$$F(s) = \frac{3}{(s - a) \cdot (s - b)}$$

$$y = \frac{1}{2i} \cdot (e^{-(4-i)t} - e^{-(4+i)t}) \cdot 3$$

Mit Benutzung der Eulerschen Formel erhalten wir das bereits bekannte Resultat

$$y = 3 \cdot e^{-4t} \cdot \sin t$$

Schwierigkeiten bei Beispiel 4 -----> 84

Weiter -----> 86

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos t + \frac{1}{6} \cos 2t$$

132

Damit ist der erste Teil von Beispiel 2 geschafft. Bleibt noch die Bestimmung von $\mathcal{L}[y]$ und $y(t)$. Das bereits transformierte Gleichungssystem war:

$$(s^2 + 2) \mathcal{L}[x] - s \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s} + s$$

$$s \mathcal{L}[x] + (s^2 + 2) \mathcal{L}[y] = 1$$

Um $\mathcal{L}[x]$ zu eliminieren, multiplizieren wir die obere Gleichung mit $(-s)$ und die untere mit $(s^2 + 2)$ und addieren sie. Das ergibt

$$\mathcal{L}[y] = \dots\dots\dots$$

-----> 133

$$\mathcal{L}[e^{-2t} \cdot \cos \pi t] = \frac{s+2}{(s+2)^2 + \pi^2}$$

35

Der Linearitätssatz dürfte weder beim Verständnis noch bei der Anwendung Schwierigkeiten bereiten.

Suchen Sie die Bildfunktion für

$$f(t) = 2 \cos 2\pi t + \sin 2\pi t :$$

$$\mathcal{L}[2 \cos 2\pi t + \sin 2\pi t] = \dots\dots\dots$$

Hinweis: Alle Transformationen sind bereits behandelt. Gegebenenfalls in Ihren Notizen oder im Lehrbuch nachschlagen.

-----> 36

Beispiel 4 war: $y'' + 6y = t$ mit den Anfangsbedingungen: $t = 0 \quad y_0 = 0 \quad y'_0 = 1$

84

Transformation und Umformung ergeben $F(s) = \frac{1}{s^2 + 6} + \frac{1}{s^2(s^2 + 6)}$

Schwierigkeiten können nur bei der Rücktransformation entstehen. Aber in der Tabelle finden wir für beide Terme die Teiloriginalfunktion.

$$\text{Mit } \omega^2 = 6 \text{ erhalten wir } y = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \sqrt{6} \cdot t + \frac{1}{6\sqrt{6}} (\sqrt{6} \cdot t - \sin \sqrt{6} \cdot t)$$

Das ergibt $y(t) = \dots\dots\dots$



-----> 85

$$\mathcal{L}[y] \cdot ((s^2 + 2)^2 + s^2) = 1$$

133

Wir multiplizieren aus und lösen auf nach $\mathcal{L}[y]$:

$$\mathcal{L}[y] = \dots\dots\dots$$

-----> 134

$$\mathcal{L}[2 \cos 2\pi t + \sin 2\pi t] = \frac{2 \cdot s}{s^2 + (2\pi)^2} + \frac{2\pi}{s^2 + (2\pi)^2} = \frac{2s + 2\pi}{s^2 + (2\pi)^2}$$

36



-----> 37

$$y(t) = \frac{1}{6} \left(t + \frac{5}{\sqrt{6}} \sin \sqrt{6}t \right)$$

85

Weiter

-----> 86

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s^4 + 5s^2 + 4)}$$

134

Den Klammerausdruck haben wir schon in den Lehrschritten 125-127 aufgelöst zu $(s^2 + 1) \cdot (s^2 + 4)$.
Bleibt nur noch die Partialbruchzerlegung, um rücktransformierbare Terme zu erhalten.

$$\frac{1}{(s^2 + 1) \cdot (s^2 + 4)} = \frac{A}{s^2 + 1} + \frac{B}{s^2 + 4}$$

$$\frac{1}{(s^2 + 1) \cdot (s^2 + 4)} = \frac{A(s^2 + 4) + B(s^2 + 1)}{(s^2 + 1) \cdot (s^2 + 4)} = \frac{s^2(A + B) + 4A + B}{(s^2 + 1) \cdot (s^2 + 4)}$$

Daraus folgt in bekannter Weise

$$A + B = 0$$

$$A = \dots\dots\dots$$

$$4A + B = 1$$

$$B = \dots\dots\dots$$

-----> 135

Laplace-Transformation von Ableitungen

37

Dies ist nun der letzte Abschnitt mit Vorbereitungen für die Anwendung der Laplace-Transformationen. Wie schon oft gesagt, es ist nützlich, alle Ergebnisse und Regeln auf einem separaten Blatt zu notieren. Das spart Zeit beim Nachschlagen.

STUDIERN Sie

24.2.8 Laplace-Transformation von Ableitungen

24.2.9 Laplace-Transformation von Potenzen

Lehrbuch Seite 205 - 207

Danach

-----▷ 38

Jetzt müssten Sie die folgende Aufgabe lösen können.

86

$$y'' - 6y' + 8y = 4$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } t = 0 \quad y_0 = 0 \quad y'_0 = 0$$

1. Schritt: Laplace-Transformation der Differentialgleichung

.....=.....

-----▷ 87

$$A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{1}{3}$$

135

Eingesetzt erhalten wir

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{3(s^2 + 1)} - \frac{1}{3(s^2 + 4)}$$

3. Schritt: Rücktransformation unter Benutzung der Tabelle auf Seite 214 des Lehrbuchs:

$$y(t) = \dots\dots\dots$$

-----▷ 136

In diesem Kapitel gilt für die Notierung des Wertes der Originalfunktion $f(t)$ und aller ihrer Ableitungen an der Stelle $t = 0$ folgende Schreibweise:

38

$$f(0) = \dots\dots\dots$$

$$f'(0) = \dots\dots\dots$$

$$f''(0) = \dots\dots\dots$$

Gleichwertig ist die folgende Notierung

$$y(0) = \dots\dots\dots$$

$$y'(0) = \dots\dots\dots$$

$$y''(0) = \dots\dots\dots$$

-----> 39

$$s^2 F(s) - sy_0 - y'_0 - 6sF(s) + 6y_0 + 8F(s) = \frac{4}{s}$$

87

Hinweis: Die Konstante 4 auf der rechten Seite der Gleichung ist kein konstanter Faktor und muss ebenfalls transformiert werden.

2. Schritt: Einsetzen der Anfangsbedingungen ($t = 0, y_0 = 0, y'_0 = 0$) und Auflösung nach $F(s)$:

$$F(s) = \dots\dots\dots$$



-----> 88

$$y(t) = \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t$$

136

Jetzt folgt noch eine Übung. Die Lösung dürfte Ihnen nicht schwer fallen, nachdem Sie die vorausgehenden Beispiele durchgearbeitet haben.

Die Lösung erfolgt nach dem nun schon gewohnten Schema der drei Schritte:

- Laplace-Transformation
- Auflösung nach $\mathcal{L}[x]$ und $\mathcal{L}[y]$ und Umformung in eine für die Rücktransformation geeignete Form
- Rücktransformation

-----> 137

$$f(0) = f_0$$

$$y(0) = y_0$$

39

$$f'(0) = f'_0$$

$$y'(0) = y'_0$$

$$f''(0) = f''_0$$

$$y''(0) = y''_0$$

Der Nutzen dieser abgekürzten Schreibweise wird sich allerdings erst zeigen, wenn demnächst Differentialgleichungen zu lösen sind.

Gegeben sei die Originalfunktion $f(t) = t \cdot e^{-at}$

Gesucht: $\mathcal{L}[f(t)] = \dots\dots\dots$

Lösung gefunden -----> 43

Hilfe erwünscht -----> 40

$$F(s) = \frac{4}{s(s^2 - 6s + 8)}$$

88

Umformung in eine für die Rücktransformation geeignete Form durch Partialbruchzerlegung

$$F(s) = \dots\dots\dots$$

Lösung erfolgreich gefunden -----> 96

Hilfe und Erläuterung -----> 89

Gegeben seien die zwei simultanen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

137

$$4\dot{x} - \dot{y} + x = 1$$

$$\text{Für } t = 0 \text{ gilt: } x_0 = y_0 = 0$$

$$4\dot{x} - 4\dot{y} - y = 1$$

$$x(t) = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden -----> 142

Schrittweise Auflösung mit Angabe der Zwischenergebnisse -----> 138

Im Lehrbuch ist die Transformierte der Ableitung einer Bildfunktion zu $f(t)$ angegeben:

$$\frac{d}{ds}[F(s)] = -\mathcal{L}[t \cdot f(t)]$$

40

In unserem Fall kennen wir die Bildfunktion $F(s)$ für $f(t) = e^{-at} = \dots\dots\dots$

In Ihren Notizen, im Lehrbuch oder in der Tabelle im Lehrbuch Seite 213 nachsehen.

-----> 41

Es ist umzuformen

$$F(s) = \frac{4}{s(s^2 - 6s + 8)}$$

89

Die Klammer im Nenner kann in folgende Form gebracht werden:

$$(s^2 - 6s + 8) = (s - a) \cdot (s - b)$$

Hinweis: Entweder probieren oder die quadratische Gleichung $s^2 - 6s + 8 = 0$ lösen.

$$F(s) = \frac{4}{s(s \dots\dots\dots) \cdot (s \dots\dots\dots)}$$

-----> 90

Gegeben

$$4\dot{x} - \dot{y} + x = 1$$

$$4\dot{x} - 4\dot{y} - y = 1$$

Für $t = 0$: gilt $x_0 = y_0 = 0$

138

1. Schritt: Laplace-Transformation und Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt

.....

.....

-----> 139

Für $f(t) = e^{-at}$ ist $F(s) = \frac{1}{s+a}$

41

Es war die Ableitung einer Bildfunktion zu $f(t)$:

$$\frac{d}{ds}[F(s)] = -\mathcal{L}[t \cdot f(t)]$$

Wir betrachten $F(s) = \frac{1}{s+a}$

Dann lösen wir $\frac{d}{ds}[F(s)] = \dots\dots\dots$

-----▷ 42

Hoffentlich überflüssiger Hinweis: $\frac{1}{s+a} = (s+a)^{-1}$

$$F(s) = \frac{4}{s(s-2) \cdot (s-4)}$$

90

Jetzt kann der Bruch durch Partialbruchzerlegung aufgelöst und in die folgende Form gebracht werden, die dann rücktransformiert werden kann.

$$\frac{4}{s(s-2) \cdot (s-4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-2)} + \frac{C}{(s-4)}$$

$$\frac{4}{s(s-2) \cdot (s-4)} = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden

-----▷ 95

Hilfe

-----▷ 91

$$4s \mathcal{L}[x] - s \mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[x] = \frac{1}{s}$$

139

$$4s \mathcal{L}[x] - 4s \mathcal{L}[y] - \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s}$$

2. Schritt: Auflösung nach $\mathcal{L}[x]$:

$$\mathcal{L}[x] = \dots\dots\dots$$



-----▷ 140

$$\frac{d}{ds}[F(s)] = \frac{-1}{(s+a)^2}$$

42

Damit wird

$$\frac{d}{ds}[F(s)] = -\frac{1}{(s+a)^2} = -\mathcal{L}[t \cdot e^{-at}]$$

Somit ist die Transformierte der Originalfunktion $t \cdot e^{-at}$ gefunden:

$$\mathcal{L}[t \cdot e^{-at}] = \dots\dots\dots$$

-----> 43

Unser Ansatz zur Partialbruchzerlegung ist:

91

$$\frac{4}{s(s-2) \cdot (s-4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-2)} + \frac{C}{(s-4)}$$

Zu bestimmen sind A , B und C .

Wir bringen die Partialbrüche auf der rechten Seite der Gleichung auf den Hauptnenner und erhalten

$$\frac{4}{s(s-2) \cdot (s-4)} = \frac{(\dots\dots\dots)}{s(s-2) \cdot (s-4)}$$

-----> 92

$$\mathcal{L}[x] = \frac{3s+1}{s \cdot 12 \left(s + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(s + \frac{1}{2}\right)}$$

140

Partialbruchzerlegung, um rücktransformierbare Terme zu erhalten:

$$\mathcal{L}[x] = \dots\dots\dots$$

-----> 141

$$\mathcal{L}[t \cdot e^{-at}] = \frac{1}{(s-a)^2}$$

43

Gegeben sei: $f(t) = t^3$

Gesucht: $F(s) = \dots\dots\dots$



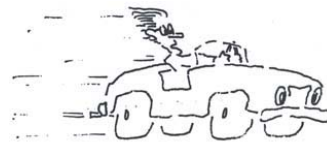
-----▷ 44

$$\frac{4}{s(s-2)(s-4)} = \frac{A \cdot (s-2) \cdot (s-4) + B \cdot s(s-4) + C \cdot s(s-2)}{s(s-2)(s-4)}$$

92

Beide Zähler müssen gleich sein. Die rechte Seite wird ausmultipliziert und nach Potenzen von s geordnet.

$4 = \dots\dots\dots$



-----▷ 93

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{s} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{6}\right)} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)}$$

141

3. Schritt: Rücktransformation

$x(t) = \dots\dots\dots$

-----▷ 142

$$f(t) = t^3 \quad F(s) = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

44

Weiter

-----▷ 45

$$4 = s^2[A + B + C] + s[-6A - 4B - 2C] + 8A$$

93

Die Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn die rechte Seite unabhängig von s und s^2 ist. Das ist der Fall, wenn beide Klammern gleich 0 sind. Daraus gewinnen wir die Bestimmungsgleichungen.

$$4 = 8A$$

$$0 = A + B + C$$

$$0 = -6A - 4B - 2C$$

Bestimmen Sie A , B und C

$$A = \dots\dots\dots$$

$$B = \dots\dots\dots$$

$$C = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden

-----▷ 95

Letzte Hilfe

-----▷ 94

$$x(t) = 1 - \frac{3}{4}e^{\frac{t}{6}} - \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

142

Es bleibt noch die Berechnung von $\mathcal{L}[y]$ und y .

Die Laplace-Transformation haben Sie bereits im Lehrschrift 139 durchgeführt mit folgendem Ergebnis:

$$4s \mathcal{L}[x] - s \mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[x] = \frac{1}{s}$$

$$4s \mathcal{L}[x] - 4s \mathcal{L}[y] - \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s}$$

Berechnen Sie nun: $y(t) = \dots\dots\dots$

Lösung glücklich gefunden

-----▷ 147

Schrittweise Lösung mit Angabe der Zwischenergebnisse

-----▷ 143

Gegeben sei: $f(t) = 3 \sin^2(2t)$

45

Gesucht: $F(s) = \dots\dots\dots$

Lösung der etwas kniffligen Aufgabe gelungen -----▷ 51

Hilfe gewünscht -----▷ 46

Aus der ersten Bestimmungsgleichung folgt $A = \frac{1}{2}$

94

Wir setzen $A = \frac{1}{2}$ ein in: $A + B + C = 0$ und $-6A - 4B - 2C = 0$

Daraus folgt: $\frac{1}{2} + B + C = 0$ und $-3 - 4B - 2C = 0$

Wir formen um und addieren

$$\begin{aligned} 2B + 2C &= -1 \\ -4B - 2C &= +3 \end{aligned}$$

Daraus folgt: $B = \dots\dots\dots$ und $C = \dots\dots\dots$



-----▷ 95

Nach $\mathcal{L}[y]$ aufzulösen ist:

143

$$4s \mathcal{L}[x] - s \mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[x] = \frac{1}{s}$$

$$4s \mathcal{L}[x] - 4s \mathcal{L}[y] - \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s}$$

Wir eliminieren in bekannter Weise $\mathcal{L}[x]$ und erhalten

$$\mathcal{L}[y] = \dots\dots\dots$$

-----▷ 144

Wir finden die Transformierte weder in der Tabelle noch in unseren Aufzeichnungen.
Daher müssen wir versuchen, die Funktion $f(t) = 3 \sin^2(2t)$ so umzuformen, dass wir die Laplace-Transformation durchführen können.

46

Wir formen mit Hilfe der Additionstheoreme und des Satzes von Pythagoras so um, dass keine Quadrate von trigonometrischen Funktionen mehr vorkommen.

$$\sin^2(2t) = \dots\dots\dots$$

Lösung dieses Zwischenschritts gefunden -----> 50

Weitere Hilfe erwünscht -----> 47

$$A = \frac{1}{2} \quad B = -1 \quad C = \frac{1}{2}$$

95

Damit erhalten wir die Bildfunktion

$$F(s) = \dots\dots\dots$$

-----> 96

$$\mathcal{L}[y] = \frac{-1}{s \cdot 12 \left(s + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(s + \frac{1}{2}\right)}$$

144

Damit kommen wir zur Partialbruchzerlegung um rücktransformierbare Terme zu erhalten:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{-1}{s \cdot 12 \left(s + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(s + \frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{12s} + \frac{B}{\left(s + \frac{1}{6}\right)} + \frac{C}{\left(s + \frac{1}{2}\right)}$$

Das ergibt:

$$A = \dots\dots\dots \quad B = \dots\dots\dots \quad C = \dots\dots\dots$$

-----> 145

Wir erinnern uns an das Additionstheorem $\cos(n+m) = \cos n \cdot \cos m - \sin n \cdot \sin m$

47

Damit wird $\cos(t+t) = \cos 2t = \dots\dots\dots$

-----> 48

$$F(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{(s-2)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s-4)}$$

96

Jetzt können wir den dritten Schritt, die Rücktransformation, durchführen.
Mit Benutzung der Tabelle Seite 214 erhalten wir:

$$y(t) = \dots\dots\dots$$

-----> 97

$$A = -12 \qquad B = \frac{3}{2} \qquad C = -\frac{1}{2}$$

145

Damit wird

$$\mathcal{L}[y] = \frac{-1}{s \cdot 12 \left(s + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(s + \frac{1}{2}\right)} = \dots\dots\dots$$

-----> 146

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

48

Jetzt verwenden wir den Satz des Pythagoras.

Wegen $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ können wir $\cos^2 t$ eliminieren

$$\cos 2t = \dots\dots\dots$$

-----▷ 49

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{4t} - e^{2t}$$

97

Eine letzte kleine Aufgabe, die Ihnen aus der Physik gut bekannt sein dürfte, betrifft die Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld auf der Erdoberfläche.

Wie allgemein in der Physik üblich, bezeichnen wir die Zeit durch t und die Ableitung nach der Zeit durch \dot{y} . Die y -Koordinatenachse weise nach oben. Dann ist die Beschleunigung nach unten gerichtet und damit negativ.

$$\ddot{y} = -g$$

Laplace-Transformation

Auflösung nach $\mathcal{L}(s) = \dots\dots\dots$

Rücktransformation $y(t) = \dots\dots\dots$

-----▷ 98

$$\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{s} + \frac{3}{2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{6}\right)} - \frac{1}{2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)}$$

146

Jetzt folgt die Rücktransformation mit Hilfe der Tabelle, denn niemand kann alle Formeln im Kopf haben. Das Ergebnis ist:

$$y(t) = \dots\dots\dots$$

-----▷ 147

$$\cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t$$

49

Damit sind wir am Ziel und können $\sin^2 t$ angeben

$$\sin^2 t = \dots\dots\dots$$



-----> 50

$$s^2 \cdot \mathcal{L}(s) - sy_0 - \dot{y}_0 = \frac{-g}{s}$$

98

$$\mathcal{L}(s) = \frac{-g}{s^3} + \frac{\dot{y}_0}{s^2} + \frac{y_0}{s}$$

$$y(t) = \frac{-g}{2} \cdot t^2 + \dot{y}_0 \cdot t + y_0$$

Das ist die bekannte Gleichung für den freien Fall.



-----> 99

$$y(t) = -1 + \frac{3}{2} \cdot e^{-\frac{t}{6}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$$

147

Damit haben wir die vollständige Lösung des Gleichungssystems ermittelt zu

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t}{6}} + e^{-\frac{t}{2}} \right) \quad y(t) = -1 + e^{-\frac{t}{6}} - e^{-\frac{t}{2}}$$

Sie haben erfolgreich das Ende dieses nicht ganz leichten Kapitels erreicht und dürfen sich gratulieren, dass Sie durchgehalten haben!



des Kapitels 24