

---

**Kapitel 25**

**Die Wellengleichungen**

0
---

1

**25.1 Wellenfunktionen**

Studieren Sie den ersten Abschnitt

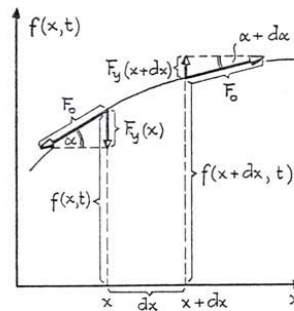
25.1 Wellenfunktionen  
Lehrbuch Seite 217 – 219

-----&gt; 2

1)  $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}$

2)  $d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot dx = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx$

3)  $dF_y = F_0 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx$



16

Jetzt können Sie das allgemeine Bewegungsgesetz  $F = m \cdot a$  für das Seilelement formulieren, wobei  $dm = \rho \cdot dx$  gilt.

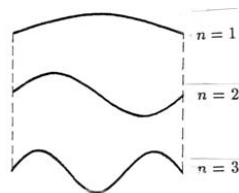
$$dF_y = \dots\dots\dots$$

-----&gt; 17

Grundschiwingung

erste Oberschiwingung

zweite Oberschiwingung



31

Die Grundschiwingung habe die Kreisfrequenz  $\omega_1$ .  
Dann sind die Frequenzen der Oberschiwingungen

$$\omega_2 = \dots\dots\dots$$

$$\omega_3 = \dots\dots\dots$$

Allgemein ist die Frequenz der  $n$ -ten Oberschiwingung

$$\omega_n = \dots\dots\dots$$



-----&gt; 32

Leiten Sie selbständig den Zusammenhang ab zwischen Wellengeschwindigkeit  $v$ , Wellenlänge  $\lambda$  und Schwingungsdauer  $T$ .

2

Begründen Sie stichwortartig den Zusammenhang, denn es ist immer gut, wenn man sich derart fundamentale Beziehungen selbst rekonstruieren kann.

Stellen Sie die Geschwindigkeit  $v$  dar als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$ :

$v = \dots\dots\dots$

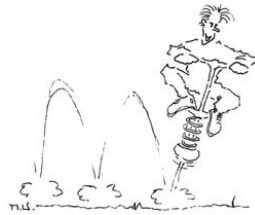
-----&gt; 3

$$dF_y = dm \cdot \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = \rho dx \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}$$

17

Mit der soeben berechneten Kraft auf das Seilelement erhalten wir dann die Bewegungsgleichung

.....



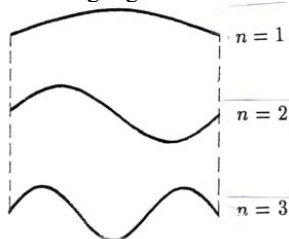
-----&gt; 18

$$\omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \quad \omega_3 = 3 \cdot \omega_1 \quad \omega_n = n \cdot \omega_1$$

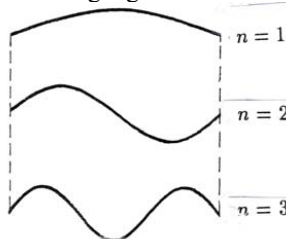
32

Markieren Sie in den Zeichnungen alle Schwingungsbäuche und alle Schwingungsknoten

Schwingungsbäuche



Schwingungsknoten



-----&gt; 33

Ihre Begründung könnte lauten: In einem beliebigen Zeitintervall  $\Delta t$  erfolgen an einem fixen Ort  $n = \frac{\Delta t}{T}$  Schwingungen. Dabei ist die Welle um die Strecke  $\Delta x = n \cdot \lambda$  weiter gelaufen.

3

Damit gilt für die Wellengeschwindigkeit  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{n \cdot \lambda}{n \cdot T} = \frac{\lambda}{T} = v \cdot \lambda$

Wegen  $\omega = v \cdot 2\pi$  oder  $v = \frac{\omega}{2\pi}$  ist die Geschwindigkeit als Funktion der Kreisfrequenz:  $v = \frac{\omega \cdot \lambda}{2\pi}$

Geben Sie die Wellenlängen an für Schallwellen. Schallgeschwindigkeit  $v = 330 \frac{m}{sec}$

$\nu_1 = 100 Hz$ , tiefer Ton

$\lambda_1 = \dots\dots\dots$

$\nu_2 = 1000 Hz$ , mittlere Tonlage

$\lambda_2 = \dots\dots\dots$

$\nu_3 = 10000 Hz$ , hoher Ton

$\lambda_3 = \dots\dots\dots$

-----> 4

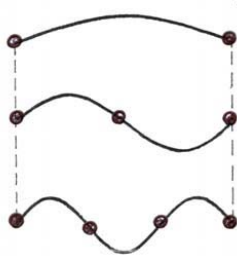
$$F_0 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{F_0} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$$

18

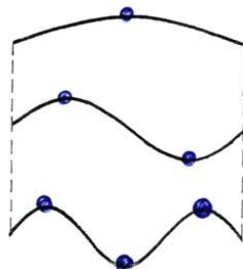
Dieser Typ von Gleichungen heißt.....

-----> 19

Knoten



Bäuche



33

Zusammenhang zwischen stehenden Wellen und laufenden Wellen. Eine stehende Welle kann, wie gezeigt, als Produkt einer zeitabhängigen und einer ortsabhängigen Funktion dargestellt werden. Die Grundschiwingung ist gegeben durch

$$f(x,t) = \dots\dots\dots$$

-----> 34

Wegen  $\lambda = \frac{v}{\nu}$  ist  $\lambda_1 = 3,30 \text{ m}$

4

$$\lambda_2 = 33 \text{ cm}$$

$$\lambda_3 = 3,30 \text{ cm}$$

Geben Sie die Wellenfunktion an für eine allgemeine nach rechts laufende Sinuswelle an als Funktion von  $x$ ,  $\omega$ ,  $t$  und  $\lambda$ .

Ob eine Welle durch eine Sinusfunktion oder eine Kosinusfunktion dargestellt wird, ist gleichwertig.

$$f_1(x, t) = \dots\dots\dots$$

Geben Sie die gleiche Wellenfunktion an als Funktion von  $x$ ,  $v$ ,  $t$  und  $\lambda$ .

$$f_2(x, t) = \dots\dots\dots$$

-----&gt; 5

Partielle Differentialgleichung

19

Als Wellengleichung wird die folgende Form einer partiellen Differentialgleichung bezeichnet.

.....

-----&gt; 20

$$f(x, t) = C \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right)$$

34

Im Lehrbuch auf Seite 225 ist (als Fußnote) die folgende Beziehung zwischen den Winkelfunktionen zur Erinnerung noch einmal hergeleitet:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \dots\dots\dots$$

-----&gt; 35

$$f_1(x, t) = A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \varphi_0\right) \quad f_2(x, t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x - \varphi_0)\right)$$

5

Es ist nützlich, immer auch die physikalische Bedeutung der Terme zu verstehen.  
Geben Sie mit Ihren Worten wieder, was die einzelnen Terme im Argument der folgenden Sinusfunktion bedeuten.

$$f_1(x, t) = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \varphi_0\right)$$

$$\omega t = \dots\dots\dots$$

$$2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} = \dots\dots\dots$$



-----&gt; 6

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

20

Zeigen Sie, dass jede Funktion der Form  $f(x, t) = f(vt - x)$  eine Lösung der obigen Wellengleichung ist. Wiederholen Sie den Beweis von Seite 221 des Lehrbuches.



Beweis nachvollzogen -----&gt; 24

Hilfe erwünscht -----&gt; 21

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

35

Wenden Sie die obige Beziehung an auf den Ausdruck für die Grundschiwingung der stehenden Welle

$$f(x, t) = C \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right)$$

$$f(x, t) = \dots\dots\dots$$

Lösung gefunden -----&gt; 37

Hilfe erwünscht -----&gt; 36

$\omega t$  = Zahl der Schwingungen in der Zeit  $t$  multipliziert mit  $2\pi$

$2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}$  = Zahl der Wellenlängen auf der Strecke  $x$ , die ein Wellenberg in der Zeit  $t$  zurückgelegt hat, multipliziert mit  $2\pi$ .

Damit das Argument der Wellenfunktion für einen Wellenberg gleich bleibt, müssen sich beide Terme kompensieren.

6

Was bedeuten die Terme im folgenden Ausdruck?  $f_2(x, t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x - \varphi_0)\right)$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \cdot t = \dots\dots\dots$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = \dots\dots\dots$$

-----> 7

Zu beweisen ist, dass jede Funktion der Form  $f(x, t) = f(vt - x)$  eine Lösung der folgenden Wellengleichung ist:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Wir substituieren  $z = (vt - x)$  mit den Ableitungen  $\frac{\partial z}{\partial t} = v$   $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$

Bilden Sie die Ableitungen von  $f(z)$  nach  $t$ .

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dots\dots\dots$$

-----> 22

Gegeben sind:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$f(x, t) = C \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right)$$

Wir substituieren  $\alpha = (\omega t + \varphi_0)$

$$\beta = \frac{\pi}{L} \cdot x$$

Dies wird in den Ausdruck für  $f(x, t)$  eingesetzt und mit der obigen trigonometrischen Beziehung umgeformt. Danach wird rücksubstituiert.

$$f(x, t) = \dots\dots\dots$$



-----> 37

36

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \cdot t = \text{Zahl der Schwingungen in der Zeit } t, \text{ multipliziert mit } 2\pi.$$

7

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = \text{Zahl der Wellenlängen auf der Strecke } x, \text{ die ein Wellenberg in der Zeit } t \\ \text{zurückgelegt hat, multipliziert mit } 2\pi.$$

Damit das Argument der Wellenfunktion für einen Wellenberg gleich bleibt, müssen sich beide Terme gegenseitig kompensieren.

Geben Sie die beiden Formen der Wellengleichung für eine nach *links* laufende Welle an:

$$f_1(x, t) = \dots\dots\dots$$

$$f_2(x, t) = \dots\dots\dots$$

-----&gt; 8

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot v$$

22

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot v^2$$

Bilden Sie die Ableitungen von  $f(z)$  nach  $x$ .

Erinnerung:  $\frac{\partial z}{\partial t} = v$                        $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dots\dots\dots$$



-----&gt; 23

$$f(x, t) = \frac{C}{2} \left[ \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{L} \cdot x\right) + \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{L} \cdot x\right) \right]$$

37

Wir erhalten die Überlagerung einer nach links laufenden und einer nach rechts laufenden Welle.

Gilt dieses Ergebnis auch für die Oberschwingungen?.....  
Könnten Sie das beweisen?

-----&gt; 38



$$f_1(x, t) = A \cdot \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} - \varphi_0\right)$$

8

$$f_2(x, t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\nu t + x - \varphi_0)\right)$$

Geben Sie mit Ihren Worten die Begründung für die Wellengleichung  $f_1$  wieder, so als ob Sie sie einem anderen erklären wollen.

.....  
 .....

-----> 9

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}(-1)$$

23

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Wir stellen unsere soeben erarbeiteten Zwischenergebnisse zusammen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot \nu^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Jetzt eliminieren wir  $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$  und erhalten: .....



-----> 24

Das Ergebnis gilt auch für die Oberschwingungen.

38

Zum Beweis braucht man nur von der allgemeinen Form der Schwingungsgleichung auszugehen.

$$f(x, t) = C_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

Daraus folgt für die  $n$ -te Oberschwingung:

$$f(x, t) = \frac{C_n}{2} \left[ \sin\left(n\omega t - \varphi_n + n \frac{\pi}{L} x\right) + \sin\left(n\omega t - \varphi_n - n \frac{\pi}{L} x\right) \right]$$

Drücken Sie  $f(x, t)$  als Funktion der Wellengeschwindigkeit  $\nu$  aus.

$$f(x, t) = \dots\dots\dots$$

Hinweis: Für die Grundschwingung der eingespannten Saite gilt  $\lambda = 2L$ , für die  $n$ -te

$$\text{Oberschwingung } \lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

-----> 39

Ihre Erklärung könnte lauten:

Für eine Welle muss das Argument für einen bestimmten Wellenberg (oder ein Wellental) konstant bleiben. An einem festgehaltenen Ort  $x_0$  schwingt die Welle mit der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi\nu$ . Damit wächst das Argument der Wellenfunktion um  $\omega \cdot t$  oder  $2\pi\nu \cdot t$ .

Gleichzeitig läuft die Welle um die Strecke  $x = vt$  weiter.

Damit das Argument für einen Wellenberg konstant bleibt, müssen wir im Argument einen mit  $x$  anwachsenden Betrag abziehen. So erhalten wir

$$f_1(t, x) = A \cdot \sin\left(2\pi\nu \cdot t + 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \text{ oder } f_1(t, x) = A \cdot \sin\left(\omega t + 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

Um einen anderen gleichwertigen Ausdruck zu erhalten, ersetzen Sie  $\lambda$  durch  $v$  und  $\nu$ .

$$f_2(t, x) = \dots\dots\dots$$



Aufgabe gelöst

-----> 11

Kleine Hilfe

-----> 10

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Das gilt für jede Funktion  $f(v \cdot t - x)$ .

24

Physikalische Bedeutung: Das Argument  $(v \cdot t - x)$  bleibt konstant für jeden Punkt, der mit der Geschwindigkeit  $v$  nach rechts läuft.

Zeigen Sie noch einmal, dass die nach rechts laufende Sinuswelle eine Funktion der Form  $f(vt - x)$  ist:

$$f(t, x) = A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \dots\dots\dots$$

-----> 25

$$f(x, t) = \frac{C_n}{2} \left( \sin\left(n \frac{\pi}{L} vt - n \frac{\pi}{L} x + \varphi_0\right) + \left( \sin n \frac{\pi}{L} vt + n \frac{\pi}{L} x + \varphi_0 \right) \right)$$

39

Eine gespannte Saite der Länge 100 cm habe die Grundfrequenz 440 Hz.

Wie groß ist die Wellengeschwindigkeit?

$v = \dots\dots\dots$

An welchen Stellen  $x$  befinden sich Schwingungsknoten und Schwingungsbäuche für die vierte Oberschwingung

Knoten:  $x_k = \dots\dots\dots, \dots\dots\dots, \dots\dots\dots, \dots\dots\dots, \dots\dots\dots$

Bäuche:  $x_b = \dots\dots\dots, \dots\dots\dots, \dots\dots\dots, \dots\dots\dots, \dots\dots\dots$

-----> 40

Es war  $f_1(t, x) = A \cdot \sin\left(2\pi\nu \cdot t + 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$

10

Die Aufgabe ist,  $\lambda$  durch  $v$  und  $\nu$  zu ersetzen. Dabei benutzen wir die bekannte Beziehung  $v = \lambda \cdot \nu$ , die wir nur oben einzusetzen brauchen, um zu erhalten:

$f_2(t, x) = \dots\dots\dots$

-----&gt; 11

$f(t, x) = A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left( \nu t - x \right) \right)$

25

Auf Seite 222 im Lehrbuch wird der Produktansatz erläutert, der in einigen Fällen, wie bei stehenden Wellen, zu Lösungen führt.  
Studieren Sie den Abschnitt "Stehende Wellen" noch einmal und rechnen Sie die Umformungen mit.

Schon vor langem wurde eine nützliche Maxime erwähnt: "Reading without a pencil is daydreaming".

Danach

-----&gt; 26

$v = 880 \frac{m}{sec}$

40

Knoten:  $x_{k1} = 0cm$      $x_{k2} = 25cm$      $x_{k3} = 50cm$      $x_{k4} = 75cm$      $x_{k5} = 100cm$

Bäuche:  $x_{b1} = 12,5cm$      $x_{b2} = 37,5cm$      $x_{b3} = 62,5cm$      $x_{b4} = 87,5cm$

-----&gt; 41

$$f_2(x, t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (v t + x)\right)$$

11

-----&gt; 12

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist das Produkt einer zeitabhängigen mit einer ortsabhängigen Funktion. Dabei ist  $K$  eine noch zu bestimmende Konstante. Die Funktionen seien:

26

$$h(t) = A \cos(v \sqrt{K} \cdot t) + B \sin(v \sqrt{K} \cdot t)$$

$$g(x) = C \cos(\sqrt{K} \cdot x) + D \sin(\sqrt{K} \cdot x)$$

Das Produkt ist:  $f(x, t) = g(x) \cdot h(t)$

$K$  muss den gegebenen Randbedingungen genügen. Geben Sie die Randbedingungen für die an den Stellen  $x = 0$  und  $x = L$  eingespannte Saite an:

.....

-----&gt; 27

Eine der wichtigsten, wirksamsten und nur scheinbar einfachen Regeln ist die Einteilung der Arbeit in Abschnitte, die Sie wirklich bewältigen können. Am Anfang waren diese Abschnitte klein, mit zunehmender Studienkompetenz sind diese Abschnitte größer geworden.

41

Manchmal werden Sie bei einem umfangreicheren Abschnitt den dringenden Wunsch verspürt haben, aufzuhören und etwas anderes, vielleicht auch nützliches, jedenfalls aber befriedigenderes und angenehmeres zu tun. Gut ist es, nicht jedem dieser Impulse zu folgen, sondern die Arbeitsaufgabe zu reduzieren und sich Zwischenziele zu setzen und die Arbeit mit einem, wenn auch geringeren, Erfolgserlebnis abzuschließen.

Ein Geheimnis für ein erfolgreiches Studium ist Ihre persönliche Arbeitsmotivation. Sie können sich diese Motivation erhalten und verstärken, wenn Sie Ihre Lernfortschritte wahrnehmen und spüren, dass sich Ihre Anstrengungen lohnen. Dabei helfen auch leichte Aufgaben, die Sie erfolgreich bewältigen, wie hier in den Leitprogrammen. Mancher demotivierte Student hat anhand der Leitprogramme wieder Selbstvertrauen und Arbeitszuversicht gewonnen und sich damit selbst motiviert.

-----&gt; 42

**25.2 Die Wellengleichung**

12

Der folgende Abschnitt ist etwas umfangreich. Teilen Sie sich die Arbeit in zwei oder drei Arbeitsphasen auf und machen Sie Arbeitspausen.

STUDIEREN Sie

25.2 Die Wellengleichung  
Lehrbuch Seite 219 – 225

-----&gt; 13

$$f(0, t) = f(L, t) = 0$$

27

Damit gilt für die ortsabhängige Funktion

$$g(0) = g(L) = 0 = C \cdot \cos(\sqrt{K} \cdot 0) + D \cdot \sin(\sqrt{K} \cdot 0) = C \cdot \cos(\sqrt{K} \cdot L) + D \cdot \sin(\sqrt{K} \cdot L)$$

Daraus folgen:

$$C = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{K} \cdot L = \dots\dots\dots$$

$$K = \dots\dots\dots$$

-----&gt; 28

Sie haben nun das Ende dieser Einführung in die Mathematik und damit eine wichtige Etappe Ihres Studiums erreicht. Zwar liegen noch weitere Etappen vor Ihnen, aber Sie haben sich erfolgreich eine solide Grundlage für weitere Spezialisierungen erarbeitet.

42

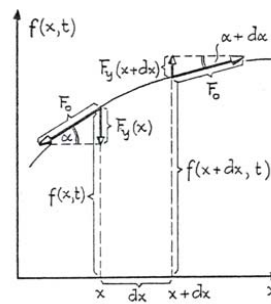
Neben den mathematischen Kenntnissen haben Sie vor allem in den ersten Kapiteln Arbeits- und Studientechniken kennen gelernt und diese bei der Arbeit mit den Leitprogrammen angewendet und geübt.

Viel Glück bei Ihrem weiteren  
Studium wünscht Ihnen

Klaus Weltner



Leiten Sie anhand der Skizze die Bewegungsgleichung für ein Seilelement ab. Das Seil wird durch die Kraft  $F_0$  gespannt. Die Auslenkung des Seilelementes aus der Ruhelage in y-Richtung sei  $f(t, x)$ , also eine Funktion von  $t$  und  $x$ .



13

Die Bewegungsgleichung für ein Seilelement ist .....

Lösung selbstständig konstruiert -----> 17

Detaillierte Hilfe bei der Herleitung -----> 14

$$C = 0$$

28

$$\sqrt{K} \cdot L = n \cdot \pi \quad n = \text{ganze Zahl}$$

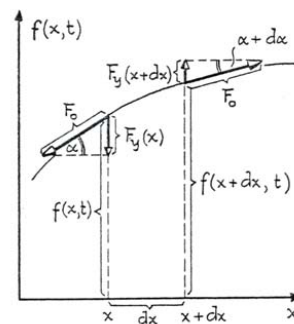
$$K = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$$

Mit diesem Ergebnis sind nur diskrete ortsabhängige Schwingungsformen möglich.

$$g(x) = \dots\dots\dots$$

-----> 29

Ausgangspunkt ist die Berechnung der rücktreibenden Kraft auf das Seilelement wegen der unterschiedlichen Richtungen der Seilspannung an den Enden des Seilelementes.



14

$$dF_y = \dots\dots\dots$$



-----&gt; 15

$$g(x) = D \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) \text{ mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

29

Welche Bedeutung hat dieses Resultat für die zeitabhängige Funktion und deren mögliche Frequenzen  $\omega_n$ ?

$$h(t) = A \cos(v\sqrt{K} \cdot t) + B \sin(v\sqrt{K} \cdot t)$$

Sagen Sie es mit Ihren Worten.

.....

$$\omega_n = \dots\dots\dots$$

-----&gt; 30

$$dF_y = F_0 d\alpha$$

15

Für die Steigung  $\alpha$  gilt

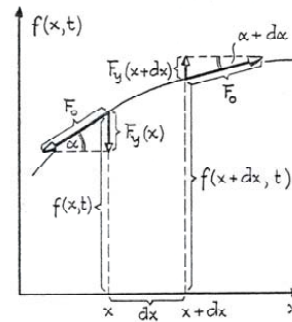
1)  $\alpha = \dots\dots\dots$

Für das Differenzial, also die Differenz der Steigung, gilt

2)  $d\alpha = \dots\dots\dots$

Damit wirkt auf das Seilelement die Kraft in vertikaler Richtung

3)  $dF_y = \dots\dots\dots$



-----> 16

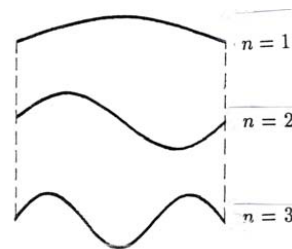
Die möglichen Frequenzen sind durch  $\sqrt{K} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)$  auf bestimmte Werte eingeschränkt:

30

$$\omega_n = v \cdot \frac{n\pi}{L}$$

Die Abbildung zeigt drei Schwingungsformen einer beidseitig eingespannten Saite:

Es handelt sich um die ..... ,  
 die .....  
 und die .....



-----> 31