0

Kapitel 4

Potenzen, Logarithmus, Umkehrfunktionen

1

Potenzen

Rechenregeln für Potenzen

Zuerst wird wieder ein Abschnitt im Lehrbuch studiert. Wenn es für Sie keine Wiederholung ist, sollten Sie sich Notizen machen und sich einen Merkzettel für die Rechenregeln anlegen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 4.1.1 Potenzen
4.1.2 Rechenregeln für Potenzen
Lehrbuch, Seite 82-84

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ---------------------------------- ▷ 2

38

Abkürzung ln; 6

a

10

....

Bei Logarithmen muß die Basis definiert werden. Für drei Fälle sind Sonderbezeichnungen üblich: Wie heißen die Logarithmen zur Basis

2 : ....

e : ....

10 : ....

---------------------------------- ▷ 39

75

$y^* = \frac{1}{1-x}$ ist die richtige Lösung

....

Die Umkehrfunktion heißt auch .... Funktion.

Bilden Sie die Umkehrfunktion zu

$y = 27 \cdot x^3$

$y^* =$ ....

---------------------------------- ▷ 76

2

Schreiben Sie folgende Ausdrücke ausführlich hin:

$a^4 =$ ....

$b^{-2} =$ ....

------------------------------- ▷ 3

39

ld = Logarithmus dualis
ln = Logarithmus naturalis oder natürlicher Logarithmus
lg = dekadischer Logarithmus

Wenn man Logarithmen bestimmen will, gibt es drei Möglichkeiten:

1. Wir benutzen den Taschenrechner. Das ist bequem und genau.
2. Wir benutzen die Logarithmuskurve. Das ist bequem aber nicht genau.
3. Wir benutzen eine Tabelle. Das ist genau ab er unbequem.

Für einige Werte können Sie den Logarithmus im Kopf ausrechnen.

Was ist ld 2 = ...

ln e^x = ...

lg 100 = ...

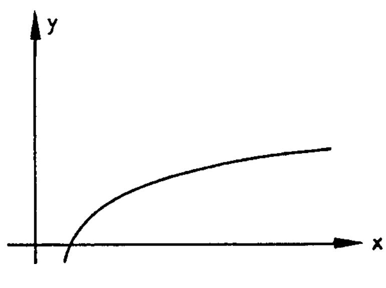
------------------------------- ▷ 40

76

Inverse Funktion; $y^* = \frac{\sqrt[3]{x}}{3}$

Die Umkehrfunktion ist eine neue Funktion. Sie wird in zwei Schritten gewonnen:

1. Schritt: ....
2. Schritt: ....



Skizzieren Sie nun den Graphen der Umkehrfunktion für die links dargestellte Funktion.

------------------------------- ▷ 77

3

$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$

$b^{-2} = \frac{1}{b \cdot b}$

Der Ausdruck b^m heißt ....

b ist die ....

m ist der .... oder die ....

---------------------------------- ▷ 4

40

1; x; 2

Eine häufig gebrauchte Operation ist das Logarithmieren von Gleichungen. Dabei wird von beiden Seiten der Gleichung der Logarithmus gebildet. Hier wird, was für Gleichungen immer gilt, auf beiden Seiten dieselbe Operation angewandt. Durch das Logarithmieren vereinfachen sich manchmal Ausdrücke.

Beispiel: $e^y = e^{ax}$

Die Basis der Potenzen ist auf beiden Seiten gleich. Dann müssen auch die beiden Exponenten auf beiden Seiten gleich sein:

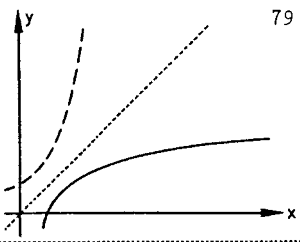
$y = ax$

Damit haben wir die Gleichung bereits logarithmiert, denn: $\ln e^y = y = \ln e^{ax} = ax$

Logarithmieren Sie: $e^a = e^{b+c}$ ...... = ...

---------------------------------- ▷ 41

77



79

Geben Sie ein geometrisches Verfahren zur Gewinnung der Umkehrfunktion an:

....

---------------------------------- ▷ 78

4

Potenz Basis Exponent oder Hochzahl

Hinweis: Diese Begriffe sollten Sie aus dem Gedächtnis reproduzieren können.

Die Übertragung des Potenzbegriffs auf negative Exponenten wird durch das Permanenzprinzip gewonnen. Das ist kein Beweis, sondern eine sinnvolle Verabredung für die Bedeutung negativer Exponenten.

$x^{-3} = \dots\dots\dots$

--------------------------------- ▷ 5

41

$a = b + c$

Es sei zu logarithmieren die Gleichung $10^y = 10^{bx}$ Die Basis ist für beide Seiten gleich. Wir benutzen dekadische Logarithmen und logarithmieren:

$$\lg 10^y = \lg 10^{bx}$$

Es ergibt sich $y = b^x$

Logarithmieren Sie die folgenden Gleichungen

$2^y = 2^{cx}$ $\qquad y = \dots\dots\dots\dots$

$e^a = e^{\omega(t+t_o)}$ $\qquad a = \dots\dots\dots\dots$

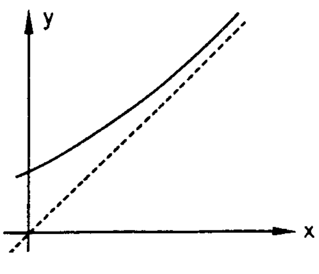
--------------------------------- ▷ 42

78

Die *Umkehrfunktion* oder *Inverse Funktion* gewinnt man durch Spiegelung an der Geraden, die den ersten Quadranten teilt – oder andere sinngemäße Formulierung.

Bilden Sie jetzt noch die Umkehrfunktion von

a) $y_1 = \frac{1}{x+1}$ $\qquad y_1^* = \dots\dots\dots\dots$ $\qquad$ b) $y_2 = 5x + 1$ $\qquad y_2^* = \dots\dots\dots\dots$



Skizzieren Sie dann den Graphen der Umkehrfunktion zu der links dargestellten Funktion:

--------------------------------- ▷ 79

5

$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Der Ausdruck 10^x ist eine ....

10 ist die ....

x ist der .... oder die ....

---------------------------------- ▷ 6

42

$y = cx$ $\qquad a = \omega\ (t + t_0)$

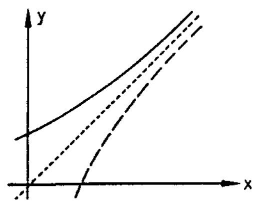
Eine Gleichung logarithmieren heißt, von der Betrachtung der Gleichung zur Betrachtung der Logarithmen überzugehen. Das bedeutet, bei gleicher Basis werden die Exponenten verglichen.

Beispiel:	2^7	$= 2^{x+1}$
Logarithmieren wir:	$\text{ld } 2^7$	$= \text{ld } 2^{x+1}$
	7	$= x+1$
Berechnen Sie y:	$10^{(2y+1)}$	$= 10^{(x-3)}$
	y	= ....

---------------------------------- ▷ 43

79

a) $y_1^* = \frac{1}{x} - 1$ $\qquad$ b) $y_2^* = \frac{x-1}{5}$



Falls Sie bei den letzten Aufgaben Fehler hatte, lösen Sie sie unter Zuhilfenahme des Lehrbuchs, Seite 94 und 95.

Geben Sie an

a) arc sin 1 = ...

b) arc sin 0 = ...

---------------------------------- ▷ 80

6

Potenz; Basis; Exponenent, Hochzahl.

Schreiben Sie den Term: Basis x, Exponent 3

....

---------------------------------- ▷ 7

43

$y = \frac{1}{2}(x - 4)$

In den eben betrachteten Beispielen standen auf der linken wie auf der rechten Seite der Gleichung Potenzen zur gleichen Basis. Das ist natürlich nicht immer der Fall.

Beispiel: $y = e^{-\alpha x}$

Können wir diese Gleichung logarithmieren?

Ja, wenn wir in einem Zwischenschritt zunächst y als Potenz zur Basis e schreiben: $y = e^{\ln y}$

Damit ergibt sich $e^{\ln y} = e^{-\alpha x}$

Das können wir logarithmieren: .... = ...

---------------------------------- ▷ 44

80

a) $\frac{\pi}{2}$ oder 90°

b) 0 oder 0°

Der Ausdruck arc sin 1 = y bedeutet:

y ist der .... dessen .... den Wert 1 hat.

y = arc cos 1

y = ...

---------------------------------- ▷ 81

7

x^3

Die Rechenregeln für Potenzen sollten Sie verstehen. Sie lassen sich dann auch leichter merken. Im Gegensatz zum Lehrbuch benutzen wir jetzt auch andere Bezeichnungen. Sie wissen doch, Bezeichnungen kann man willkürlich ändern. An der mathematischen Beziehung ändert das nichts.

Produkt: $a^x \cdot a^y =$

Quotient: $\dfrac{b^m}{b^n} =$

Potenz $(x^n)^m =$

Wurzel: $\sqrt[a]{x^b} =$

-------------------------------- ▷ 8

44

$\ln y = -\alpha x$

Solange wir Schwierigkeiten beim Logarithmieren einer Gleichung haben, müssen wir den Zwischenschritt durchführen und beide Seiten der Gleichung als Potenz mit gleicher Basis schreiben.

Gegeben	y	$=e^a$
Zwischenschritt	$e^{\ln y}$	$= e^a$
Ergebnis	$\ln y$	$= a$
Was ergibt	y	$= e^{a+x}$
	......	= ....

-------------------------------- ▷ 45

81

y ist der Winkel, dessen Sinus den Wert 1 hat.

$y = 0$ oder $y = 0°$

Bis jetzt keine Schwierigkeiten -------------------------------- ▷ 83

Weitere Erläuterungen erwünscht -------------------------------- ▷ 82

8

Produkt: a^{x+y} Potenz: $x^{n \cdot m}$

Quotient b^{m-n} Wurzel: $x^{\frac{b}{a}}$

Falls Sie hier Schwierigkeiten hatten, nehmen Sie sich das Lehrbuch vor und lösen Sie die Aufgaben in der Weise, daß Sie sich zunächst die Beziehung zwischen den Bezeichnungen im Lehrtext und den Symbolen in der Aufgabe klarmachen.

Dann rechnen Sie die folgenden Aufgaben:

27^0 = ... $(3^3)^0$ = ...

$(2^2)^3$ = ... 1^5 = ...

-------------------------------- ▷ 9

45

$\ln y = a + x$

Logarithmieren Sie jetzt folgende Gleichungen:

$y = e^{\frac{1}{x}}$ ....

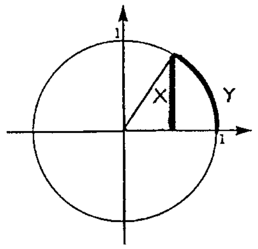
$y = 2^{a \cdot x}$ ....

$y = 10^{(-x+5)}$ ....

Wählen Sie jeweils eine geeignete Basis.

-------------------------------- ▷ 46

82



Im Einheitskreis ist gekennzeichnet ein Bogenabschnitt y und die Strecke x. Die Strecke x ist der Sinus des durch den Bogenabschnitt gegebenen Winkels.

Dann können wir sagen:

y ist der Winkel, dessen Sinus den Wert x hat. Dies ist die Bedeutung des Ausdrucks

$$y = \text{arc} \sin x$$

Schwierigkeiten könnten entstehen, wenn Sie hier sin x nicht scharf unterscheiden von sin (x), also dem Sinus des Winkels x.

-------------------------------- ▷ 83

9

1	1
64	1

Lösen Sie auf oder formen Sie um:

a) $3^4 \cdot 3^{-3} =$ ....

b) $10^{-6} \cdot 10^8 \cdot 10^{-1} =$ ....

c) $b^{-m} =$ ....

d) $e^{-1} =$ ....

e) $4^{\frac{1}{2}} =$ ....

---------------------------------- ▷ 10

46

$\ln y = \frac{1}{x}$

$\mathrm{ld}\, y = a \cdot x$

$\lg y = - x+5$

Hier noch einige Übungsaufgaben. Man muß sie nicht üben, wenn sie zu leicht erscheinen. Die Gleichungen unten sind zu logarithmieren:

$y = e^{(\alpha x+\beta)}$ $\qquad b \cdot y = e^{a \cdot x}\ e^{c \cdot x}$

$a \cdot y = 10^{0,1x}$ $\qquad y = e^{(\ln x - \ln a)}$

---------------------------------- ▷ 47

83

In dem Ausdruck y = arc sin x bedeutet „sin x“: Der Sinus hat den Wert x.
In dem Ausdruck y = arc cos x bedeutet „cos x“: Der .... hat den Wert ....

Bogen heißt lateinisch ....

---------------------------------- ▷ 84

10

a) 3

b) 10

c) $\frac{1}{b^m}$

d) $\frac{1}{e}$

e) 2

Hier kommen noch einige Übungsaufgaben. Sie sind völlig freiwillig.
Falls Sie Schwierigkeiten haben, nehmen Sie das Lehrbuch zu Hilfe. Falls Ihnen das Vorangegangene leicht fiel, überschlagen Sie die Aufgaben.

a)
$\sqrt[x]{A} =$ ....
$(y^2)^3 =$ ....
$10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 =$ ....

b)
$27^{\frac{1}{3}} =$ ....
$(0{,}1)^0 =$ ....
$x^{-3} =$ ....

▷ 11

47

$\ln y = \alpha \cdot x + \beta$

$\lg(ay) = 0{,}1x$ oder $\lg y = 0{,}1x - \lg a$

$\ln(by) = (a+c)x$ oder $\ln y = (a+c)x - \ln b$

$\ln y = \ln x - \ln a$

Hier wäre die Gelegenheit, wieder eine kleine Pause einzulegen.

Der gezeichnete Kommilitone steht unmittelbar vor der Pause. Was tut er gerade? ....

▷ 48

84

Der Kosinus hat den Wert x

arcus

Die neue Bezeichnungsweise ist neu und fast schwieriger als die Sache selbst.
Versuchen Sie in Gedanken zuerst sprachlich zu formulieren, ehe Sie die Aufgabe lösen:

$\varphi = \text{arc} \cos 0{,}5$ = ...

$y = \text{arc} \sin 1$ = ...

$\alpha = \text{arc} \sin 0{,}5$ = ...

φ	α	$\cos\alpha$ $\cos\varphi$	$\sin\alpha$ $\sin\varphi$
$0 = 0{,}00$	0°	1	0
$\frac{\pi}{6} = 0{,}52$	30°	0,87	0,5
$\frac{\pi}{4} = 0{,}78$	45°	0,71	0,71
$\frac{\pi}{3} = 1{,}05$	60°	0,50	0,87
$\frac{\pi}{2} = 1{,}56$	90°	0	1

▷ 85

11

a) $A^{\frac{1}{x}}$ b) 3

y^6 1

10^2 $\frac{1}{x^3}$

Mit Potenzen wird oft gerechnet werden. Es ist zweckmäßig, jetzt selbst zu beurteilen, ob die entsprechenden Begriffe hinreichend bekannt sind und ob die Aufgaben leicht fallen. Aber entscheiden Sie selbst.

Keine Schwierigkeiten -------------------------------- ▷ 16

Noch einige Übungen -------------------------------- ▷ 12

48

Er rekapituliert noch einmal die Stichworte des studierten Abschnittes.

Er beherzigt den Spruch Erich Kästners:

Es gibt nichts Gutes — außer man tut es.

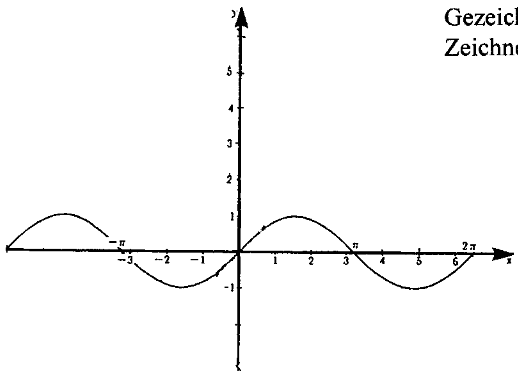
Aus dem Gedächtnis schreibt er gerade die neuen Begriffe hin. Vielleicht prüft er auch gerade, ob er sich noch an die neuen Operationen erinnert und sie noch kann.

Jetzt schwitzt er — später kann und wird er lachen.

-------------------------------- ▷ 49

85

$\varphi = \frac{2}{3}\pi$ oder $\varphi = 60°$ $y = \frac{\pi}{2}$ oder $y = 90°$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ oder $\alpha = 30°$



Gezeichnet sind zwei Perioden der Sinusfunktion. Zeichnen Sie die Umkehrfunktion.

-------------------------------- ▷ 86

12

y sei eine Potenz.

Basis ist e und Exponent ist $\alpha \cdot x$

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 13

49

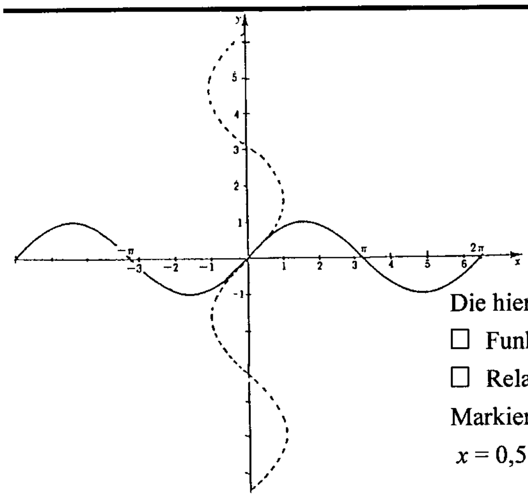
Rechenregeln für Logarithmen

Der Grundgedanke der Logarithmenrechnung ist einfach. Alle Rechnungen werden nicht mit den Ausgangswerten, sondern mit ihren Logarithmen durchgeführt. Das *Produkt* zweier Werte wird dann zur *Summe* der Logarithmen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 4.2.2 Rechenregeln für Logarithmen
Lehrbuch, Seite 89-91

------------------ ▷ 50

86



Die hier gezeichnete Umkehrfunktion ist eine

☐ Funktion

☐ Relation

Markieren Sie die Werte der Umkehrfunktion für $x = 0{,}5$

--------------------------------- ▷ 87

13

$y = e^{ax}$

Lösen Sie folgende Aufgaben:

2^{-3} = ... 27^{0} = ...
e^{0} = ... 3^{-1} = ...
27^{1} = ... b^{-m} = ...

▷ 14

50

Können Sie noch aus dem Gedächtnis hinschreiben:

a) $\ln(a \cdot b)$ = ...

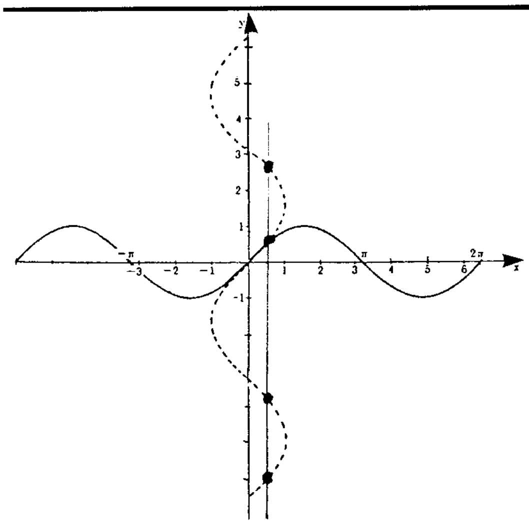
b) $\ln\frac{a}{b}$ = ...

c) $\lg(A \cdot B)$ = ...

d) $\lg\frac{x}{y}$ = ...

▷ 51

87



Relation
Hinweis: Für $x = 0{,}5$ erhalten wir vier Werte. Das ist nicht eindeutig. Daher Relation.

Zeichnen Sie die *Hauptwerte* der Umkehrfunktion dick ein.

▷ 88

14

$2^{-3} = \frac{1}{8}$ $\qquad 27^0 = 1$

$e^0 = 1$ $\qquad 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$27^1 = 27$ $\qquad b^{-m} = \frac{1}{b^m}$

Formen Sie um: Beispiel $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

$b^n \cdot b^m =$ .... $\qquad (y^n)^m =$ ....

$\frac{x^n}{x^m} =$ .... $\qquad \sqrt[n]{C^m} =$ ....

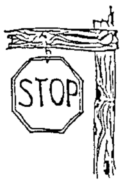
-------------------------------- ▷ 15

51

a) $\ln a + \ln b$ $\qquad$ b) $\ln a - \ln b$

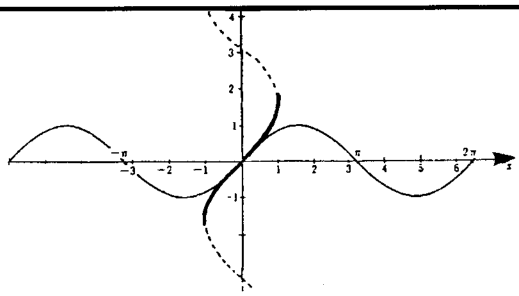
c) $\lg A + \lg B$ $\qquad$ d) $\lg x - \lg y$

Falls Sie hier Fehler hatten, rechnen Sie diese Aufgaben anhand des Lehrbuchs noch einmal nach.



-------------------------------- ▷ 52

88



a) $y = \arc\cos 0{,}71$ $\qquad y =$ ....

b) $y = \arc\sin -0{,}87$ $\qquad y =$ ....

φ	α	$\cos\alpha$ / $\cos\varphi$	$\sin\alpha$ / $\sin\varphi$
$0 = 0{,}00$	0°	1	0
$\frac{\pi}{6} = 0{,}52$	30°	0,87	0,5
$\frac{\pi}{4} = 0{,}78$	45°	0,71	0,71
$\frac{\pi}{3} = 1{,}05$	60°	0,50	0,87
$\frac{\pi}{2} = 1{,}56$	90°	0	1

--------- ▷ 89

15

b^{n+m} $y^{n \cdot m}$

x^{n-m} $C^{\frac{m}{n}}$

Letzte Aufgabenserie

a) $4^{\frac{1}{2}}$ = ...

b) $(3^0)^2$ = ...

c) $3^4 \cdot 3^{-3}$ = ...

d) $10^{-6} \cdot 10^8 \cdot 10^{-1} =$ ....

e) $e^{-1} =$ ....

Hier werden die richtigen Antworten nicht mehr angegeben. Im Zweifel Kommilitonen fragen.

-------------------------------- ▷ 16

52

Jetzt müßten Sie die Aufgaben können. Achten Sie auf die Bezeichnungen, es werden verschiedene Symbole für die Variablen benutzt. Das Ziel ist nicht, Sie zu verwirren — obwohl es so aussieht. Das Ziel ist, eine Geläufigkeit im Umgang mit verschiedenen Symbolen zu gewinnen.

$\lg(x \cdot y) =$ ....

$ld(N_1 \cdot N_2) =$ ....

$\lg \dfrac{A \cdot B}{c} =$ ....

$\ln \dfrac{a \cdot b \cdot c}{d} =$ ....

-------------------------------- ▷ 53

89

$y = \frac{\pi}{4}$ oder $y = 45°$

$y = -\frac{\pi}{3}$ oder $y = -60°$

Vertrauter dürfte es Ihnen sein, Winkel mit φ oder α zu bezeichnen.

$\varphi_1 = \text{arc sin } 0{,}5$ $\varphi_1 =$ ....

$\varphi_2 = \text{arc sin } -0{,}5$ $\varphi_2 =$ ....

$\alpha = \text{arc cos } -0{,}71$ $\alpha =$ ....

-------------------------------- ▷ 90

16

Exponentialfunktion

Die Kenntnis der Exponentialfunktion ist grundlegend für das weitere Studium. Sie kommt in Anwendungen häufig vor.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 4.1.3 Exponentialfunktion
Lehrbuch, Seite 84-86

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ▷ 17

53

$$\lg x \cdot y = \lg x + \lg y$$
$$\mathrm{ld}\, N_1 \cdot N_2 = \mathrm{ld}\, N_1 + \mathrm{ld}\, N_2$$
$$\lg \frac{A \cdot B}{c} = \lg A + \lg B - \lg c$$
$$\ln \frac{a \cdot b \cdot c}{d} = \ln a + \ln b + \ln c - \ln d$$

Berechnen Sie:

$\ln (5^x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lg x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lg a^{\frac{1}{2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 54

90

$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ oder $\varphi_1 = 30°$

$\varphi_2 = -\frac{\pi}{6}$ oder $\varphi_2 = -30°$

$\alpha = \frac{3\pi}{4}$ oder $\alpha = 135°$

Üben wir zum Schluß noch die Arcustangensfunktion.

$y = \arctan 1$ $y = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\varphi = \arctan 0$ $\varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\alpha = \arctan -1$ $\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 91

17

Die Funktion $y = 10^x$ heißt ....

Welche der beiden Funktionen unten steigt für große Werte von x schneller an?
Setzen Sie ein: $x = 1, x = 10, x = 100, x = 1000$

☐ $y = x^{100}$
☐ $y = 10^x$

-------------------------------- ▷ 18

54

$\ln 5 = x \ln 5$

$\lg x^2 = 2 \lg x$

$\lg a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \lg a$

....

Formen Sie auch noch diese Terme um:

a) $\ln 2^x$ = ...

b) $\lg \sqrt{x}$ = ...

c) $\lg \sqrt[3]{x}$ = ...

d) $\text{ld}\,(4 \cdot 16)$ = ...

-------------------------------- ▷ 55

91

$y = \frac{\pi}{4}$ oder $y = 45°$

$\varphi = 0$ oder $\varphi = 0°$

$\alpha = -\frac{\pi}{4}$ oder $\alpha = -45°$

Hinweis: Sie können verifizieren:

$$\tan \frac{\pi}{4} = \tan 45° = 1$$

Die Arcusfunktionen gebrauchen Sie immer dann, wenn Sie einen Sinus, Kosinus oder Tangens kennen und die zugehörigen Winkel suchen.

-------------------------------- ▷ 92

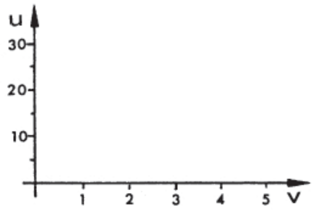
18

Exponentialfunktion

$y = 10^x$

Hinweis: $1000^{100} = (10^3)^{100} = 10^{300} < 10^{1000}$

Ersetzen wir die vertrauten Bezeichnungen x und y durch andere Symbole, so heißt dieser Vorgang *Substitution*.



Durch Substitution wird an der mathematischen Beziehung nichts geändert. Es ist nicht immer einfach, nach einer ungewohnten Substitution die vertraute mathematische Beziehung zu erkennen.

Skizzieren Sie die Funktion $u = 2^v$

-------------------------------- ▷ 19

55

a) $\ln 2^x = x \ln 2$

b) $\lg \sqrt{x} = \frac{1}{2} \lg x$

c) $\lg \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \lg x$

d) $\mathrm{ld}(4 \cdot 16) = \mathrm{ld}\, 4 + \mathrm{ld}\, 16 = 6$

Können Sie noch aus dem Gedächtnis die Regeln angeben?

1. Multiplikation ....
2. Division ....
3. Potenz ....
4. Wurzel ....

-------------------------------- ▷ 56

92

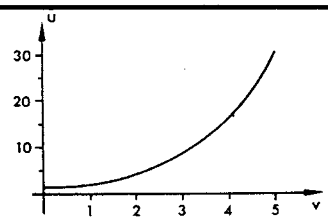
Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

Den Abschnitt 4.4.3 im Lehrbuch überspringen wir, er ist der Vollständigkeit wegen aufgenommen und muß bei Bedarf selbständig erarbeitet werden.

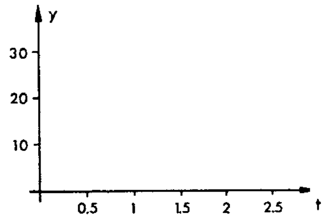
STUDIEREN SIE im Lehrbuch 4.4.4 Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion
Lehrbuch, Seite 90

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 93

19



Skizzieren Sie jetzt die Exponentialfunktion $y = 2^{at}$ mit $a = 2$



▷ 20

56

Multiplikation: $\log AB = \log A + \log B$

Division: $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$

Potenz: $\log A^m = \mathrm{m} \log A$

Wurzel: $\log \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log A$

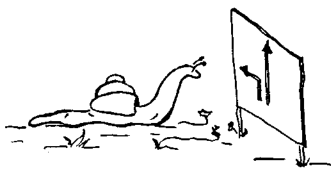
Wenn die Aufgaben leicht fallen, hat man genug geübt. Fallen sie schwer, können weitere Übungen sehr nützlich sein.

Genug geübt ▷ 59

Weitere Übungen erwünscht ▷ 57

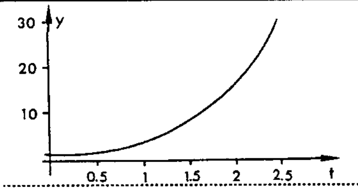
93

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Ist die Exponentialfunktion dann auch die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion?

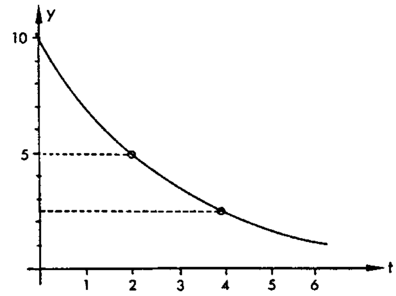


☐ ja ▷ 95

☐ nein ▷ 94



20



Lösen Sie die folgende Aufgabe, indem Sie bei Schwierigkeiten das Lehrbuch zu Hilfe nehmen.

Die dargestellte Kurve hat die allgemeine Form einer Exponentialfunktion.

$$y = A \cdot 2^{-\frac{t}{t_h}}$$

Die Kurve geht durch die eingezeichneten Punkte. Bestimmen Sie A und t^h. (t^h = Halbwertzeit)

$y =$ .... ▷ 21

57

Formen Sie folgende Terme um

a) $\ln(C \cdot D)$ = ...

b) $\lg y^2$ = ...

c) $\operatorname{ld}(2 \cdot 32)$ = ...

▷ 58

94

Leider falsch. Wir gewinnen die Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Geraden, die den 1. Quadranten teilt. Überzeugen Sie sich anhand der Abbildung im Lehrbuch, daß die Beziehung symmetrisch ist.

Wir können von der Logarithmusfunktion durch Spiegelung die Exponentialfunktion gewinnen — und umgekehrt.

Wir können von der Logarithmusfunktion auch durch Rechnung die Exponentialfunktion gewinnen:

$y = \log x$

Bildung der Umkehrfunktion:

1. Schritt $x = \log y$
2. Schritt $e^x = y$

▷ 95

21

$y = 10 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$

Alles richtig --------------------------------- ▷ 24

Erläuterungen erwünscht --------------------------------- ▷ 22

58

a) $\ln C + \ln D$

b) $2 \lg y$

c) 6

Formen Sie folgende Terme um:

a) $ld\sqrt{x} =$ ....

b) $\ln(e^{2x} \cdot e^{5x}) =$ ....

c) $\lg \frac{1}{10^x} =$ ....

--------------------------------- ▷ 59

95

Ja, die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion

Nicht zu jeder Funktion gibt es eine Umkehrfunktion. Von welcher Funktion existiert *keine* Umkehrfunktion? Denken Sie daran, die Umkehrfunktion muß eindeutig sein.

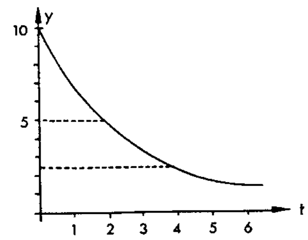
Bilden Sie die Umkehrfunktion zu den folgenden Funktionen — falls das möglich ist.

$y_1 = 3^{2x}$ $\quad y_1^* =$ ....

$y_2 = 4x^2$ $\quad y_2^* =$ ....

--------------------------------- ▷ 96

22



Es handelt sich hier um die im Lehrbuch auf Seite 86 erläuterte fallende Exponential-funktion. Interpretieren wir t als Zeit, so ergibt sich als erstes die *Halbwertzeit.* Aus der Kurve lesen Sie ab, daß die Funktion bei t_h = ... auf die Hälfte abgefallen ist.

Zur Zeit $t = 0$ ist der Exponentialausdruck $2^0 = 1$

Der im Lehrbuch A genannte Faktor hat daher den Wert ....

Die Funktion ist $y =$ ....

-------------------------------- ▷ 23

59

a) $\frac{1}{2} ld\, x$

b) $7x$

c) $-x$

....

Berechnen Sie durch Logarithmieren

$C = 10^{3x+1}$ x = ...

$A = e^{(r \cdot t)}$ t = ...

$16 = 2^{x+2}$ x = ...

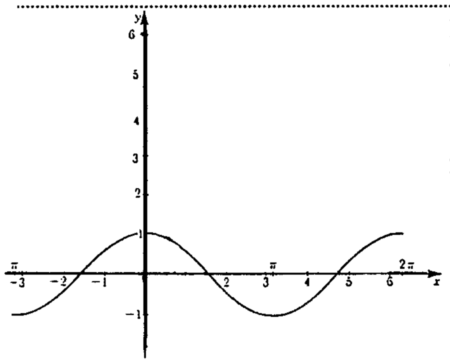
-------------------------------- ▷ 60

96

$y_1^* = \frac{1}{2}\log_3 x$

$y_2 = 4x^2$ hat keine Umkehrfunktion, da der Ausdruck $y_2^* = \pm\frac{1}{2}\sqrt{x}$ nicht eindeutig ist.

....



Hier ist die Kosinuskurve gezeichnet. Wir können sie an der Geraden spiegeln, die den 1. Quadranten teilt.

1. Zeichnen Sie die gespiegelte Kurve.
2. Wird die entstehende Kurve durch eine Funktion beschrieben?

   ☐ ja

   ☐ nein

-------------------------------- ▷ 97

23

$A = 10$

$t_h = 2$ $\qquad y = 10 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$

Hinweis: Die Werte sind aus der Zeichnung im vorhergehenden Lehrschritt abzulesen.
Die Funktion steht im Lehrbuch, Seite 85.

Rechengang: $\quad y = A \cdot 2^{-\frac{t}{t_h}}$

Wir setzen ein $A = 10$ und $t_h = 2$

$$y = 10 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$$

-------------------------------- ▷ 24

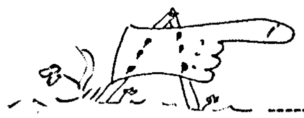
60

$x = \frac{1}{3}(\lg C - 1)$

$t = \dfrac{\ln A}{r}$

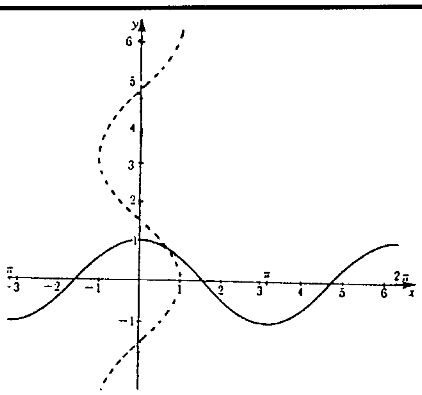
$x = 2$

....



-------------------------------- ▷ 61

97



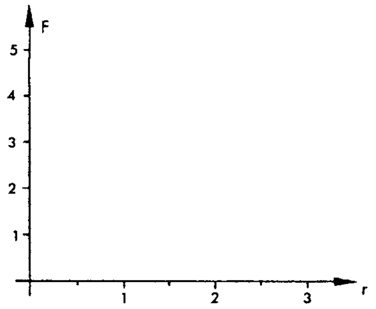
Nein. Die Beziehung ist eine Relation Das ist im vorhergehenden Abschnitt erläutert.

Zu einer Funktion kommen wir, wenn wir die Wertebereiche einschränken auf die Hauptwerte $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Die Funktion kennen Sie bereits: $y = \text{arc} \sin x$. Ihre Bedeutung kennen Sie auch.
y ist der Winkel ....

-------------------------------- ▷ 98

24



Skizzieren Sie die Exponentialfunktion
$F = e^{0,5\,r}$ mit $e = 2{,}72$

Falls Sie Schwierigkeiten haben, ist es hier zweckmäßig, zu substituieren.

Ersetzen Sie F durch y und r durch x.

Durch diese Substitution wird der Ausdruck vielleicht vertrauter.

-------------------------------- ▷ 25

61

Weitere Übungsaufgaben finden Sie im Lehrbuch, Seite 101. Weitere Übungen aber erst morgen oder übermorgen rechnen.

Falls Sie Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben haben, sehen Sie immer im entsprechenden Abschnitt des Lehrbuchs nach.

Ein vielleicht überflüssiger Rat: Schreiben Sie die Übungsaufgabe, mit der Sie Schwierigkeiten haben, auf einen Zettel und schlagen Sie den entsprechenden Lehrbuchabschnitt auf. Dann können Sie Übungsaufgabe und Lehrbuch gleichzeitig lesen. Dies erspart Ihnen viel Hin- und Herblättern.

Die Rechenregeln für Logarithmen — es sind nicht mehr als vier Regeln — werden immer wieder gebraucht werden. Sie sollten sie im Gedächtnis behalten. Das fällt leichter, wenn Sie verstanden haben, wie diese Rechenregeln mit den Potenzgesetzen zusammenhängen.

-------------------------------- ▷ 62

98

y ist der Winkel, dessen Sinus x ist.

Hier folgt noch eine Bemerkung zum Bezeichnungswechsel oder zur Substitution.
Physikalische Zuammenhänge werden durch Gleichungen ausgedrückt. In den Anwendungen sind die Variablen Größen wie

t = Zeit	v = Geschwindigkeit
ρ = Dichte	g = Fallbeschleunigung; $g = 9{,}81\ \mathrm{m/sec}^2$
h = Höhe	p = Druck

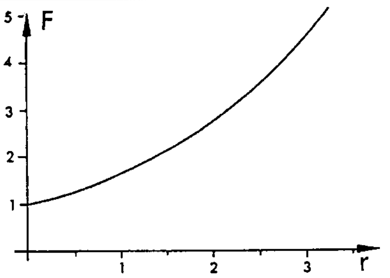
Beispiel : Gleichung für den Druck im Wasser als Funktion der Tauchtiefe:

$p = \rho \cdot g \cdot h$

Ersetzen wir Druck p durch y, die Tauchtiefe h durch x und das Produkt $\rho \cdot g$ durch a, so ergibt sich eine neue Formulierung ....

-------------------------------- ▷ 99

25



Jetzt wäre wieder eine Pause angebracht, Förderliche Arbeitszeiten, in denen man konzentriert arbeiten kann, liegen bei 20-60 Minuten. Optimale Arbeitszeiten sind individuell verschieden. Bei interessanten Arbeiten kann man sich länger konzentrieren.

Wie groß Ihre optimalen Arbeitszeiten sind, müssen Sie selbst herausfinden. Wichtig ist, daß Sie lernen, sich die Arbeit einzuteilen und auch kurze Pausen einzulegen — und zu beenden.

-------------------------------- ▷ 26

62

Können Sie die Grundidee der Logarithmenrechnung in Gedanken mit eigenen Worten formulieren? Noch besser wäre es, Sie erläuterten einem Kommilitonen diese Grundidee. Dann müssen Sie die Grundidee sprachlich formulieren.

Dies ist der Vorteil der Arbeit in Gruppen. Sie haben dann häufig Gelegenheit, Sachverhalte aktiv sprachlich zu formulieren. Es genügt nicht, etwas verstanden zu haben, man sollte es auch wiedergeben können. Spätestens in der Prüfung muß man es.

Es folgen jetzt einige Bemerkungen über das Arbeiten in Gruppen. Entscheiden Sie selbst.

☐ Bin neugierig, was hier über Gruppenarbeit gesagt wird. --------------------------- ▷ 63

☐ Möchte mit der Mathematik fortfahren. -------------------------------- ▷ 67

99

$y = a \cdot x$

Dies ist die vertraute Form einer Geradengleichung. Um einen physikalischen Zusammenhang zu verstehen, der in Form einer Gleichung geschrieben ist, müssen wir die damit gegebene mathematische Beziehung verstehen.

Dieses Verständnis können wir uns oft durch einen unscheinbaren aber wirksamen Kunstgriff erleichtern. Wir ersetzen die physikalischen Größen durch die aus der Mathematik gewohnten Bezeichnungen. An der Beziehung ändert sich durch den Bezeichnungswechsel nichts, aber die Geradengleichung ist uns vertrauter. Die Substitution unvertrauter Symbole durch vertraute Symbole erleichtert die Einsicht. Hier sind also drei Schritte notwendig.

1. Substitution unvertrauter Symbole durch vertraute Symbole
2. Diskussion der Beziehung in der gewohnten Notierung
3. Rücksubstitution.

-------------------------------- ▷ 100

26

Die Länge einer kurzen Pause sollte zwischen 5 und 15 Minuten liegen. Bei längeren Pausen wird es schwieriger, sich erneut einzuarbeiten.

Übrigens – es ist gar nicht gleichgültig, was man in der Pause tut. Kreuzen Sie die günstigere Pausentätigkeit an.

☐ Kaffee kochen oder trinken, Kopfstand machen, Blumen gießen ...

☐ Mathematische Denksportaufgaben lösen. Ein anderes Kapitel im Mathematikbuch lesen.

-------------------------------- ▷ 27

63

Gruppenarbeit und Einzelarbeit
Gruppenarbeit und Einzelarbeit schließen sich nicht aus. Sie ergänzen sich.
Einzelarbeit ist angebracht, wenn Schverhalte sicher eingelernt werden sollen, wenn Rechnungen nachgeprüft werden, Beweise studiert werden, kohärenter Lehrstoff erarbeitet werden muß.
Gruppenarbeit eignet sich
a) zur Identifizierung und Analyse von Problemen
b) zur Diskussion von Ergebnissen und zur Lösung neuer Probleme
c) zur wechselseitigen Kontrolle.
Gruppenarbeit kann das Einzelstudium vorbereiten und auch fortführen. Die Arbeit in Gruppen ist dann besonders fruchtbar, wenn sie durch Einzelarbeit vorbereitet ist, so daß alle Mitglieder der Gruppe möglichst gleichberechtigt und gleich kompetent an der Diskussion teilnehmen. Gruppenarbeit kann das Einzelstudium nicht ersetzen. Umgekehrt: das Einzelstudium kann bestimmte Funktionen der Gruppenarbeit nicht ersetzen. ------ ▷ 64

100

Die Gasgleichung, die die Beziehung zwischen Druck und Temperatur bei konstantem Volumen angibt, hat die Form:

$p = \frac{\rho}{M} RT$	Substituieren Sie
p = Druck	$p \rightarrow y$
ρ = Dichte	$T \rightarrow x$
M = Molekulargewicht	$\frac{\rho}{M} R \rightarrow a$ ....
R = Gaskontante	
T = absolute Temperatur	$y =$ ....

-------------------------------- ▷ 101

27

Kaffee kochen oder trinken, Kopfstand machen, Blumen gießen ....

....

Im Leitprogramm Kapitel 2 wurde das Phänomen der *Interferenz* erläutert. Das Lernen und Behalten eines Lehrstoffs wird behindert, wenn ein ähnlicher Lehrstoff gleichzeitig gelernt wird. Als Beispiel wurde die Fremdsprachensekretärin genannt, die gleichzeitig Italienisch und Spanisch lernt.

Die Beschäftigung mit mathematischen Denksportaufgaben ähnelt der Beschäftigung mit Mathematik. Tun Sie lieber etwas anderes oder überhaupt nichts.

Vorgesehenes Ende der Pause auf einen Zettel schreiben.

Und dann: Pause genießen!

-------------------------------- ▷ 28

64

Die Rechenregeln für Logarithmen prägt man sich am besten in

- ☐ Einzelarbeit ein
- ☐ Gruppenarbeit ein

Die aktive sprachliche Formulierung des Zusammenhangs zwischen Logarithmenrechnung und Potenzregeln ist leichter möglich bei

- ☐ Einzelarbeit
- ☐ Gruppenarbeit

-------------------------------- ▷ 65

101

$y = a \cdot x$

....

In den Anwendungen treten häufig kompliziert zusammengesetzte Konstante auf. Auch hier ist es üblich, einen aus mehreren Einzelkonstanten zusammengesetzten Ausdruck zusammenzufassen und durch eine neue Konstante zu ersetzen.

-------------------------------- ▷ 102

28

KLEINE

--------------------------------- ▷ 29

65

Einprägung: Einzelarbeit

Sprachliche Formulierung: Gruppenarbeit

Viele Studenten sind der Auffassung, durch die Notwendigkeit, Sachverhalte aktiv sprachlich auszudrücken, bereite man sich indirekt auch auf Prüfungen vor. Sie haben recht. Vorausgesetzt ist allerdings, daß innerhalb der Gruppe auch Unsinn als Unsinn bezeichnet wird.

Wenn jemand etwas Falsches sagt, muß er korrigiert werden, damit sich fehlerhafte Auffassungen von bestimmten Sachverhalten nicht verfestigen und weitererzählt werden.

--------------------------------- ▷ 66

102

Mittelbare Funktion, Funktion einer Funktion

Häufig vereinfachen sich Ausdrücke, wenn man nicht nur die Bezeichnung ändert, sondern Hilfsfunktionen einführt. Dann substituiert man bestimmte Terme in einem Rechenausdruck durch eine Hilfsfunktion. Auch dies kann zweckmäßig sein und Notationen vereinfachen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 4.5 Mittelbare Funktion, Funktion einer Funktion
Lehrbuch, Seite 99-100

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 103

29

Ehe es jetzt weiter geht, vergleichen Sie, bitte, das festgelegte Ende der Pause mit der Uhrzeit.

Wir wissen doch, Differenzen können hier auftreten. Das ist nicht schlimm, dafür gibt es immer Gründe.

Wichtig ist nur, daß im Laufe des Studiums solche Gründe für Differenzen zwischen *festgelegten* Terminen und *gehaltenen* Terminen nicht zu häufig werden.

--------------------------------- ▷ 30

66

Logarithmusfunktion

Dies ist hier ein sehr kleiner Abschnitt im Lehrbuch.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 4.2.3 Logarithmusfunktion
Lehrbuch, Seite 91 - 92

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 67

103

Bei der mittelbaren Funktion liegt eine Ineinanderschachtelung vor. Ein Funktionsterm ist durch eine neue Funktion substituiert.

Es seien zwei Gleichungen gegeben:

Funktionsgleichung mit einer Hilfsfunktion u

$$y = f(u)$$

Substitutionsgleichung

$$u = g(x)$$

Dann kann die allgemeine Notation lauten:

$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 104

30

Logarithmus

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 4.2.1 Logarithmus
Lehrbuch, Seite 86-89

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ---------------------------------- ▷ 31

67

In welchem Punkt schneiden sich alle Logarithmusfunktionen?

x = ...

y = ...

Hat die Logarithmusfunktion eine Unendlichkeitsstelle?

☐ Ja

☐ Nein

Hat die Logarithmusfunktion eine Asymptote?

☐ Ja

☐ Nein

---------------------------------- ▷ 68

104

$y = f(g(x))$

....

Wir lösen eine mittelbare Funktion auf:

Die Rechnung beginnt man immer bei der in der Schachtelung am weitestgehend eingeschachtelten Funktion.

Gegeben $y = u^2 - 1$

$u = x^2 + 1$

$y =$ ....

---------------------------------- ▷ 105

31

Das Logarithmieren macht erfahrungsgemäß beim erstmaligen Lernen große Schwierigkeiten. Wer es bereits konnte, wird hier im Leitprogramm sehr schnell weiterkommen.

Logarithmieren ist eine neue Operation.

Logarithmieren heißt: die Gleichung $y = a^x$ nach x auflösen.

Das bedeutet: Gegeben ist .... und ....
Gesucht ist ....

-------------------------------- ▷ 32

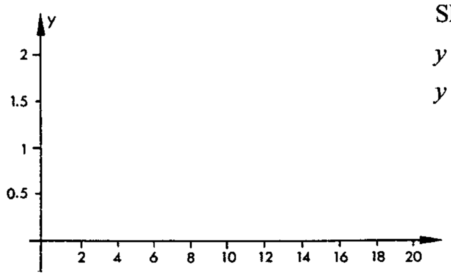
68

$x = 1$

$y = 0$

Hat Unendlichkeitsstelle bei $x = 0$

Keine Asymptote



Skizzieren Sie die Funktionen

$y = \lg x$

$y = \ln x$

-------------------------------- ▷ 69

105

$y = x^4 + 2x^2$

Man kann sich den Spaß machen und mehrere Funktionen ineinanderschachteln. Lösen Sie auf:

$y \ = g^2 + 1$

$g \ = u - 1$

$u \ = \dfrac{1}{v+1}$

$v \ = x - 1$

$y \ = g\,(u(v(x)))$

$y\,(x) =$ ....

-------------------------------- ▷ 106

32

Gegeben a, y Gesucht x

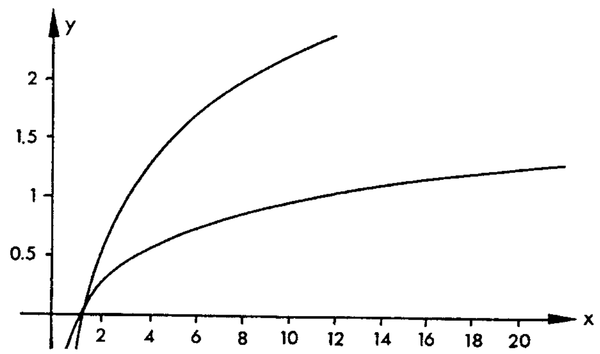
In anderer Notierung könnten wir die allgemeine Aufgabe auch so formulieren:

Die Gleichung $a^y = x$ soll nach y aufgelöst werden.

Da wir unter den bisher behandelten Rechenoperationen keine einzige finden, die wir dafür benutzen können, benötigen wir hier eine neue Operation. Der Mathematiker nennt sie Logarithmieren.

▷ 33

69



▷ 70

106

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 2$$

Die Schreibweise der mittelbaren Funktion, bei der Hilfsvariable eingeführt werden, ist in der Physik häufig. Dort ist es nicht immer ein Versteckspiel, wie es bei dem vorhergehenden Beispiel scheinen könnte. Nun folgen Aufgaben aus dem ganzen Kapitel.

Wie lautet die Umkehrfunktion y*

$y = x^3 + 8$

$y^* = \ldots\ldots\ldots$

▷ 107

33

Betrachten wir die Gleichung $a^y = x$

Im Lehrbuch wurde definiert: Der Logarithmus von x zur Basis a ist diejenige Hochzahl, die gerade wieder x ergibt, wenn man a damit potenziert. Dafür benutzen wir das Symbol

$$\log_a x$$

Mit anderen Worten: Der Term „$\log_a x$" ist eine Hochzahl oder ein Exponent. Als Hochzahl zu a ergibt er x.

$$a^{(\log_a x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 34

70

Umkehrfunktion oder Inverse Funktion

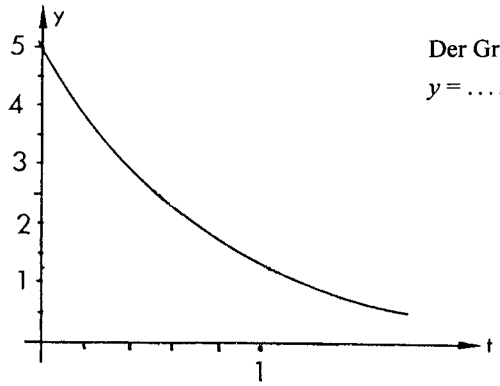
Im Lehrbuch folgt nach der Logarithmusfunktion ein Abschnitt über hyperbolische Funktionen. Diesen Abschnitt überspringen wir im Leitprogramm. Sie können diesen Abschnitt später selbständig studieren, wenn Sie ihn brauchen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 4.4.1 Umkehrfunktion oder Inverse Funktion
4.4.2 Arcusfunktionen
Lehrbuch, Seite 94-97

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 71

107

$y^* = \sqrt[3]{x-8}$



Der Graph zeigt die Funktion

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 108

34

$a^{(\log_a x)} = x$

Dies ist es, was man sich merken muß: Für eine festgesetzte Basis gilt:

Der Logarithmus einer Zahl als Exponent gesetzt ergibt eben diese Zahl

Man kann sich diese Definition des Logarithmus gar nicht häufig genug klarmachen. Logarithmen zur Basis 10 heißen .... Logarithmen und werden abgekürzt ....

-------------------------------- ▷ 35

71

Die Bildung der Umkehrfunktion erfolgt in zwei Schritten:

1. ....

2. ....

-------------------------------- ▷ 72

108

$y = 5 \cdot 2^{-2x}$

$$\frac{27^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^5}{4^3 \cdot 2^0} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 109

35

Dekadische Logarithmen

Abkürzung lg

Betrachten wir dekadische Logarithmen:

Was ergibt

$10^{\lg 5} = \dots\dots\dots\dots$

$10^{\lg 20} = \dots\dots\dots\dots$

$10^{\lg a} = \dots\dots\dots\dots$

▷ 36

72

1. Vertauschen von x und y
2. Auflösen nach y

Bilden Sie die Umkehrfunktion y^* zu

$$y = 1 - \frac{1}{x}$$

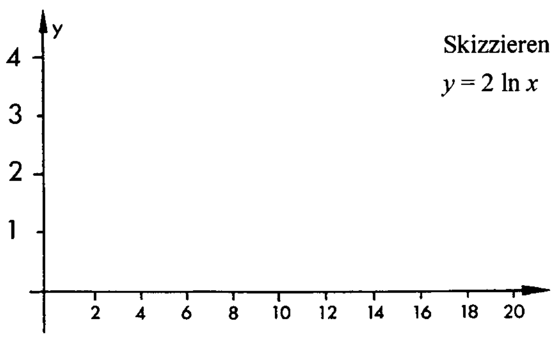
Wählen Sie das richtige Ergebnis

☐ $x^* = \frac{1}{1-y}$ ▷ 73

☐ $y^* = \frac{1}{1-x}$ ▷ 75

109

$\frac{16}{3}$ Hinweis: $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}$



Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$y = 2 \ln x$

▷ 110

36

5
20
a

Logarithmen zur Basis 2 heißen *Logarithmus dualis* und werden abgekürzt: ....

Was ergibt

$2^{\mathrm{ld}\,4} =$ ....

$2^{\mathrm{ld}\,100} =$ ....

$2^{\mathrm{ld}\,b} =$ ....

-------------------------------- ▷ 37

73

Sie haben die Aufgabe falsch gelöst. Es scheint, daß Sie den Unterschied zwischen den folgenden Operation nicht genau kennen.

a) Auflösung einer Gleichung nach x,

b) Bildung der Umkehrfunktion

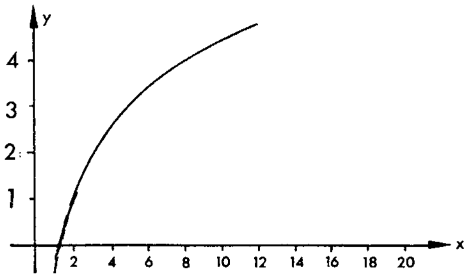
Sie sollten noch einmal den Abschnitt 4.3.1 im Lehrbuch studieren. Bilden Sie dabei die Umkehrfunktion für:

$y = \frac{1}{x+1}$ $y^* =$ ....

$y = e^{2x}$ $y^* =$ ....

-------------------------------- ▷ 74

110



Weitere Übungsaufgaben für später finden Sie auf Seite 101 im Lehrbuch.
Jetzt aber ist es Zeit für eine größere Pause.

-------------------------------- ▷ 111

37

Abkürzung ld; 4
100
b

Logarithmen zur Basis e heißen *natürliche Logarithmen.*

Sie werden abgekürzt: ....

Was ergibt

$e^{\ln 6}$ = ...

$e^{\ln a}$ = ...

$e^{\ln 10}$ = ...

--------------------------------- ▷ 38

74

$y_* = \frac{1}{x} - 1$

$y^* = \frac{1}{2} \ln x$

Weitere Übungsaufgaben finden Sie im Lehrbuch, Seite 77

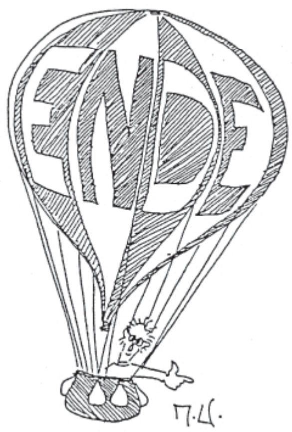
Versuchen Sie jetzt noch einmal die Umkehrfunktion zu $y = 1 - \frac{1}{x}$ zu bilden.

y^* = ...

--------------------------------- ▷ 75

111

Sie haben das



des Kapitels erreicht.