0

Kapitel 1

Vektoralgebra

2

Vorbemerkungen zum Leitprogramm

Das Leitprogramm enthält:

1. Zusätzliche Erläuterung und individuelle Hilfen.

   Nicht jede Darstellung im Lehrbuch ist für jeden Leser in gleicher Weise angemessen. Unterschiede in den Vorkenntnissen spielen eine große Rolle. Das Leitprogramm enthält daher Zusatzerläuterungen und Hilfserklärungen. Da nicht jeder die gleichen Hilfen braucht, ist das Leitprogramm so aufgebaut, daß für individuelle Schwierigkeiten - soweit sie vorhergesehen werden können - spezielle Hilfen angeboten werden. Sie werden das Leitprogramm daher nur zu einem Teil bearbeiten müssen.

--------------------------------- ▷ 3

48

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Wieder entscheiden Sie selbst über den Fortgang Ihrer Arbeit:

Keine Fehler, keine Schwierigkeiten --------------------------------- ▷ 54

Fehler gemacht oder weitere Erläuterungen gewünscht --------------------------------- ▷ 49

94

Exzerpte anzufertigen ist mühsam, man muß sich dazu überwinden. Aber bereits durch die Anfertigung des Exzerptes prägt man sich die Bezeichnungen und Definitionen besser ein. Das, was man verstanden hat, muß man nämlich zusätzlich im Kopf verarbeiten und umsetzen. Dabei beginnt man aktiv zu lernen.

--------------------------------- ▷ 95

1

Liebe Leserinnen und Leser,

Das Leitprogramm, das hier vor Ihnen liegt, soll Sie unterstützen beim Studium und Gebrauch des Lehrbuches

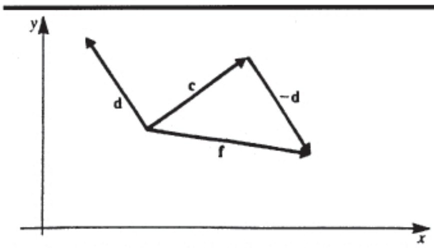
Mathematik für Physiker

Daher werden Sie abwechselnd mit dem Lehrbuch und mit diesem Leitprogramm arbeiten. Das Leitprogramm besteht aus kurzen Lehrschritten. Das Leitprogramm ist eine Studienunterstützung, die Ihnen eine selbständige Erarbeitung des Lehrbuchs oder Teilen davon ermöglicht und erleichtert. Im einzelnen ist dies bereits in der Einleitung des Lehrbuchs beschrieben.

Die Lehrschritte sind kapitelweise durchnummeriert. Dies Reihenfolge der Bearbeitung hängt von Ihnen ab. Klicken Sie, bitte, jeweils den nächsten oder den für Sie passenden Lehrabschnitt auf der rechten Spalte an.

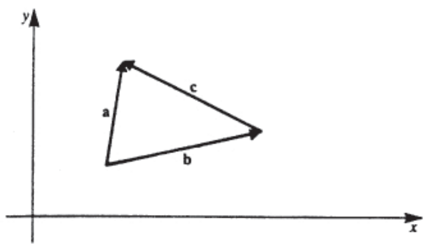
---------------------------------- ▷ 2

47



$\vec{f} = \vec{c} - \vec{d}$

$\vec{f} = \vec{c} + (-\vec{d})$



$\vec{c}$ ist ein Differenzvektor

Schreiben Sie die Vektorgleichung

$\vec{c}$ = ...

---------------------------------- ▷ 48

93

Dies könnten Sie aus dem letzten Abschnitt herausgeschrieben haben:

Einheitsvektor:	Betrag 1; Richtung beliebig
Einheitsvektoren in Achsenrichtung:	Bezeichnung: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ oder: $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$
Komponente in Achsenrichtung:	Produkt aus Einheitsvektor und Betrag
Komponentendarstellung:	Abkürzende Schreibweise, Angabe der Beträge der Komponenten in Achsenrichtung

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

---------------------------------- ▷ 94

3

Das Leitprogramm enthält:

2. Arbeitseinteilung und Hilfen zur Selbstkontrolle
   Das Leitprogramm teilt Ihr Studium anhand des Lehrbuchs in Arbeitsabschnitte ein, die Sie gut bewältigen können. Dann hilft es Ihnen mit Fragen und Aufgaben, selbst zu kontrollieren, ob Sie das Lehrziel das Abschnitts erreicht haben. Es hilft Ihnen weiter, das Gelernte zu festigen und zu üben.
3. Erläuterung von Arbeits- und Studiertechniken
   Das Leitprogramm macht Sie mit den Techniken geistigen Arbeitens bekannt. Im Laufe Ihres Studiums werden Sie Ihren persönlichen Weg finden, effektiv und kritisch mit Lehrbüchern zu arbeiten. Das Leitprogramm bietet Ihnen einige Vorschläge dafür an. Sie reichen von der Lernplanung bis zu Ratschlägen für Problemlösungsstrategien. Einige Arbeitstechniken werden durch lernpsychologische Befunde begründet, andere werden nur mitgeteilt.

-------------------------------- ▷ 4

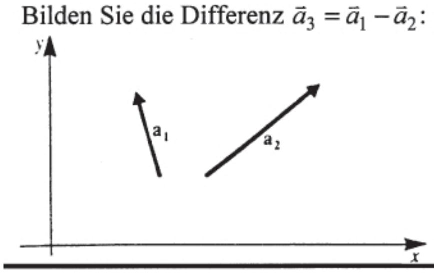
49

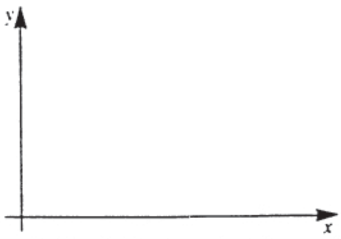
Die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ läßt sich mit Hilfe des Gegenvektor als Addition schreiben und verstehen: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Handlungsanweisung für die Bildung der Differenz $\vec{a} - \vec{b}$:

1. Bilde den Gegenvektor $-\vec{b}$
2. Addiere diesen Gegenvektor zu $\vec{a}$. Die Summe ist der Differenzvektor.

Bilden Sie die Differenz $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$:





-------- ▷ 50

95

Summe zweier Vektoren in Komponentenschreibweise

Differenz von Vektoren in Komponentenschreibweise

Jetzt folgt wieder eine Phase selbständigen Studiums anhand des Lehrbuches.

Thema der Abschnitte: Rechnerische Addition und Subtraktion von Vektoren

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 1.6.4 Summe von Vektoren in Komponentenschreibweise
1.6.5 Differenz von Vektoren in Komponentenschreibweise
Lehrbuch, Seite 25-27

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt -------------------------------- ▷ 96

4

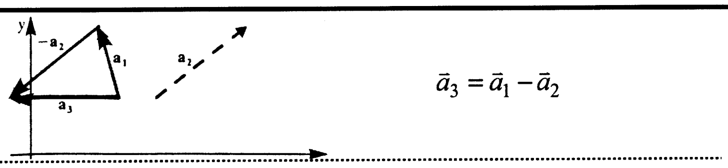
Mit dem Leitprogramm verfolgen die Verfasser zwei Ziele:

1. Ihnen die Erarbeitung des Lehrbuches zu erleichtern
2. Ihre Fähigkeiten zu fördern, selbständig zu arbeiten und sich wirksame Arbeitstechniken anzueignen.
   Damit werden Sie unabhängiger und selbständiger in Ihrem Studium.

Ihre Arbeit wechselt zwischen Lehrbuch und Leitprogramm. Am besten wir beginnen mit der Arbeit, dann sehen Sie es sofort selbst.

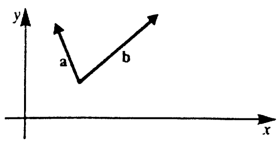
BEARBEITEN Sie nun Lehrschritt -------------------------------- ▷ 5

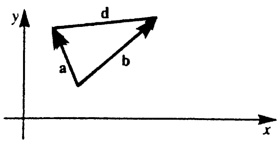
50



$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$

Es gibt ein zweites gleichwertiges Verfahren zur Bildung des Differenzvektors $\vec{a} - \vec{b}$:





1\. Schritt: Man zeichnet $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

2\. Schritt: Man verbindet die Pfeilspitzen und hat damit die Differenz

3\. Schritt: Man muß die Differenz orientieren. Dazu formen wir die Gleichung um.
Aus $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ wird. $\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$

Wir orientieren jetzt $\vec{d}$ so, daß diese Gleichung erfüllt ist.

Zeichnen Sie die Pfeilspitze richtig ein. --------------- ▷ 51

96

Gegeben seien zwei Vektoren in Komponentendarstellung

$\vec{a} = (3, 4)$

$\vec{b} = (2, -2)$

Ermitteln Sie rechnerisch $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{c} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

-------------------------------- ▷ 97

5

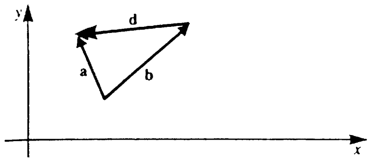
Skalare und Vektoren

Ihre erste Aufgabe ist es, im Lehrbuch den ersten Abschnitt des ersten Kapitels zu lesen, zu studieren und die neuen Begriffe zu lernen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 1.1 Skalare und Vektoren,
Lehrbuch, Seite 13-16

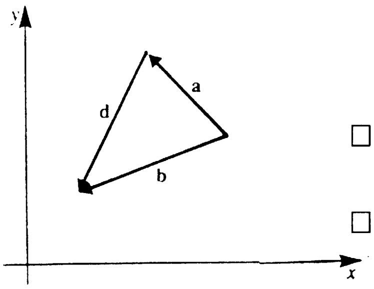
BEARBEITEN SIE nach dem Studium des Abschnitts 1.1 im Lehrbuch
den Lehrschritt --------------------------------- ▷ 6

51



$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$

Üben wir noch einmal: Welche Gleichung gilt für den Vektor $\vec{d}$ in der Zeichnung?



☐ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ --------------------------------- ▷ 52

☐ $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ --------------------------------- ▷ 54

97

$\vec{c} = (5, 2)$

Hier sind weitere Aufgaben das gleichen Typs:

A $\vec{a} = (-2, 1)$
$\vec{b} = (1, 3)$
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

B $\vec{v}_1 = (15\frac{m}{\text{sec}}, 10\frac{m}{\text{sec}})$
$\vec{v}_2 = (2\frac{m}{\text{sec}}, -5\frac{m}{\text{sec}})$
$\vec{v} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

--------------------------------- ▷ 98

6

Nachdem Sie den Abschnitt „Skalare und Vektoren“ gelesen haben, kontrollieren Sie, bitte, ob Sie die Begriffe behalten haben und füllen Sie die Lücken aus oder schreiben Sie auf einen Zettel, was in den Lücken fehlt.:

Bestimmungsgrößen für einen Skalar: ....

Bestimmungsgrößen für einen Vektor: ....

Die richtige Antwort finden Sie immer oben im nächsten Lehrschritt auf der übernächsten Seite.

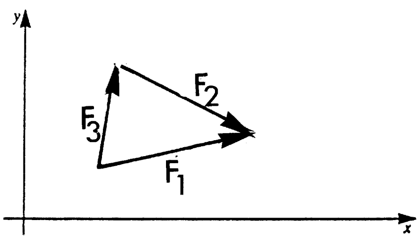
BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt -------------------------------- ▷ 7

52

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ist leider falsch!

Aus der Zeichnung im vorhergehenden Lehrschritt liest man die folgende Gleichung ab: $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b}$. Löst man diese Gleichung nach $\vec{d}$ auf, erhält man $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$.

Hinweis: Man darf mit Vektoren bezüglich Addition und Subtraktion wie mit reellen Zahlen rechnen.



Gesucht ist: F_2 = ...

Hinweis: Suchen Sie zuerst einen Vektor, der als Summe der anderen dargestellt werden kann, notieren Sie die Gleichung und formen Sie um.

-------------------------------- ▷ 53

98

$\vec{c} = (-1, 4)$

$\vec{v} = (17 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}})$

Hinweis: Bei Vektoren, die physikalische Größen darstellen, müssen die Maßeinheiten mitberücksichtigt werden. Das war im letzten Beispiel der Fall. Es handelte sich um Geschwindigkeiten.

Gegeben sei $\vec{a} = (4, 2)$

$\vec{b} = (2, 2)$

Wir suchen den Differenzvektor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{d} = (\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots)$

-------------------------------- ▷ 99

7

Skalar: Betrag (Maßzahl und Maßeinheit)

Vektor: Betrag (Maßzahl und Maßeinheit) und Richtungsangabe

Es geht weiter mit der Selbstkontrolle.

Geometrisch läßt sich ein Vektor als .... darstellen.

Der Vektor vom Nullpunkt eines Koordinatensystems zu einem Punkt P heißt ....

Ein Vektor vom Betrag 1 heißt ....

Die richtigen Antworten finden Sie immer oben im nächsten Lehrschritt. Der Pfeil zeigt jeweils auf den folgenden Lehrschritt.

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt ---------------------------------- ▷ 8

53

$F_2 = F_1 - F_3$

Falls Sie jetzt noch Schwierigkeiten haben sollten, noch einmal die Abschnitte 1.2 und 1.3 im Lehrbuch wiederholen und dabei die Übungsaufgaben 1.2. und 1.3 auf Seite 31 und 32 des Lehrbuches lösen.

---------------------------------- ▷ 54

99

$\vec{d} = (4\text{-}2, 2\text{-}2) = (2, 0)$

Auch die Subtraktion von Vektoren wird auf die Subtraktion der Komponenten zurückgeführt.

$\vec{v}_1 = (5\frac{\text{m}}{\text{sec}}, 5\frac{\text{m}}{\text{sec}})$ $\quad\vec{v}_2 = (10\frac{\text{m}}{\text{sec}}, 2\frac{\text{m}}{\text{sec}})$

$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (\ldots\ldots, \ldots\ldots)$

$\vec{F}_1 = (2{,}5\ \text{N}, 0\ \text{N})$ $\quad\vec{F}_2 = (1\ \text{N}, 2\ \text{N})$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (\ldots\ldots, \ldots\ldots)$

$\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (\ldots\ldots, \ldots\ldots)$

---------------------------------- ▷ 100

8

Gerichtete Strecke

Ortsvektor

Einheitsvektor

Es folgt eine kleine Übung. Ordnen Sie zu: Skalar oder Vektor

Masse	....	Kraft	....
Temperatur	....	Dichte	....
elektr. Feldstärke	....	Druck	....

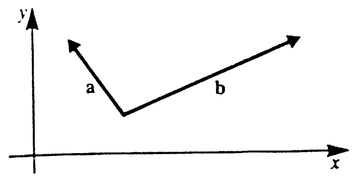
Hinweis: Statt in das Buch zu schreiben, können Sie auch die Antworten auf einem Zettel notieren. Dann kann das Leitprogramm mehrfach benutzt werden.

Der Pfeil zeigt immer auf die Nummer des nächsten Lehrschritts.--------------------- ▷ 9

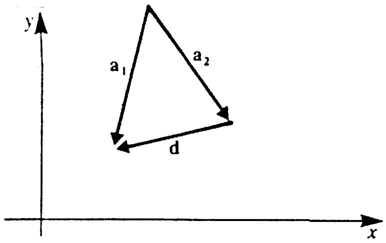
54

Hier sind noch zwei Aufgaben:

1. Zeichnen Sie den Differenzvektor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ein.



2. Bilden Sie die Gleichung und formen Sie um: $\vec{d}$ = ...



------------------------------- ▷ 55

100

$\vec{v} = (-5\frac{\text{m}}{\text{sec}}, 3\frac{\text{m}}{\text{sec}})$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (3{,}5\ \text{N}, 2\ \text{N})$

$\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (1{,}5\ \text{N}, -2\ \text{N})$

Hinweis: Bei Geschwindigkeiten und Kräften müssen die Maßeinheiten angegeben werden.

Betrachten wir nun Vektoren im Raum, d.h. Vektoren mit drei Komponenten:

$\vec{a} = (1, 2, 1)$

$\vec{b} = (2, 1, 0)$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} =$ (..............)

$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} =$ (..............)

------------------------------- ▷ 101

9

Masse:	Skalar	Kraft:	Vektor
Temperatur:	Skalar	Dichte:	Skalar
elektr. Feldstärke:	Vektor	Druck:	Skalar

Jetzt hängt der Fortgang von Ihrer Entscheidung ab.

Wählen Sie den für Sie passenden Lehrschritt:

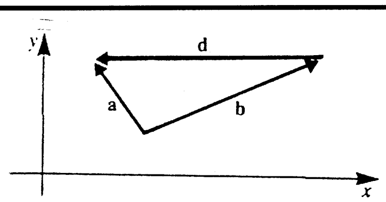
Bisher alles richtig --------------------------------- ▷ 12

Druck falsch eingeordnet --------------------------------- ▷ 10

Fehler gemacht oder weitere Erläuterung gewünscht --------------------------------- ▷ 11

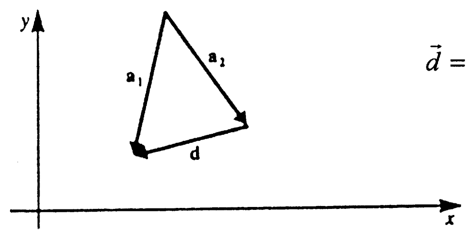
55

1.



$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

2.



$\vec{d} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$

Es geht hier ohne Aufgabe weiter. --------------------------------- ▷ 56

101

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (3, 3, 1)$

$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (1, -1, -1)$

Für den Fall, daß Sie den Grundgedanken noch nicht ganz verstanden haben, stehen Ihnen weitere Erläuterungen zur Verfügung. Entscheiden Sie selbst:

Bisher keine Schwierigkeiten --------------------------------- ▷ 108

Weitere Erläuterungen und Übungen gewünscht --------------------------------- ▷ 102

10

Der Druck ist ein Skalar und kein Vektor. Der Druck hat *keine* Vorzugsrichtung.

Die skalare Größe Druck und die vektorielle Größe Kraft stehen allerdings in physikalischem Zusammenhang:

Betrachten wir ein in einem Zylinder eingeschlossenes Gas. An jedem Punkt im Innern herrscht der gleiche Druck. Er hat keine Richtung.

Infolge des Drucks übt das Gas eine Kraft auf die Zylinderwand aus. Die Kraft ist ein Vektor. Die Richtung dieser Kraft wird nur durch die Richtung der *Wand* bestimmt: Die Kraft steht senkrecht in Bezug auf die Wand. Der Druck ist ein Skalar. Die Kraft ist ein Vektor.

Hatte bei der Beantwortung der übrigen Fragen Fehler -------------------------------- ▷ 11

Sonst alles richtig -------------------------------- ▷ 12

56

Weitere Übungsaufgaben stehen im Lehrbuch am Ende des Kapitels Vektorrechnung I auf den Seiten 31-34.

Lösen Sie diese Übungsaufgaben nicht jetzt, sondern nach einem oder zwei Tagen. Dann ist diese Wiederholung wirksamer.

Merkhilfe: Legen Sie sich einen Zettel in das Lehrbuch und schreiben Sie darauf

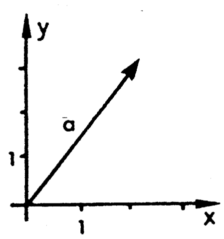
Übungsaufgaben zu Abschnitten 1.2 und 1.3 lösen

Damit ist dieser Abschnitt beendet. -------------------------------- ▷ 57

102

Jeder Vektor läßt sich eindeutig in Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen zerlegen. Man erhält diese Komponenten durch die Projektion des Vektors auf die Koordinatenachsen.

Gegeben sei ein Vektor $\vec{a}$. Zeichnen Sie seine Projektionen auf die x– und y–Achse ein.



-------------------------------- ▷ 103

11

Es ist wichtig, die Begriffe richtig einzulernen.

Mathematik ist eine Symbolsprache. Sprache setzt Kenntnis der Worte, der Symbole voraus. Was wir hier im Augenblick treiben, ist eine Form des Vokabellernens. Wir dürfen seine Bedeutung weder über- noch unterschätzen.

- Wer die Begriffe – die Vokabeln – nicht kennt, beherrscht den Lehrstoff noch nicht.
- Wer die Begriffe – die Vokabeln – nicht lernt, wird den Lehrstoff voraussichtlich nie sicher beherrschen, und er wird sich anderen gegenüber nur schwer verständlich machen können.

--------------------------------- ▷ 12

57

Das rechtwinklige Koordinatensystem

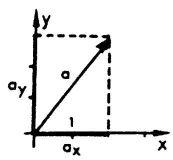
Komponente und Projektion eines Vektors

Jetzt folgt zunächst wieder eine Phase selbständigen Studiums anhand des Lehrbuchs.

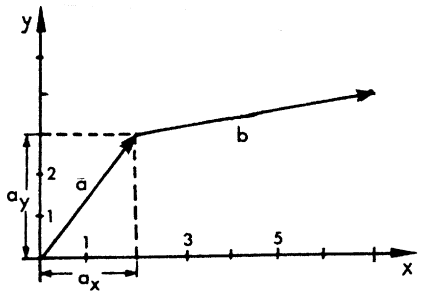
STUDIEREN SIE im Lehrbuch 1.4 Das rechtwinklige Koordinatensystem
1.5 Komponente und Projektion eines Vektors
Lehrbuch, Seite 19-22

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt --------------------------------- ▷ 58

103



Zeichnen Sie nun für den Vektor $\vec{b}$ die Projektionen auf die x– und y–Achse ein.



--------------------------------- ▷ 104

12

Die Darstellung vektorieller Größen durch Pfeile hat einen großen Vorteil:
Man kann mit dem Pfeil .... und .... des Vektors symbolisieren.

--------------------------------- ▷ 13

58

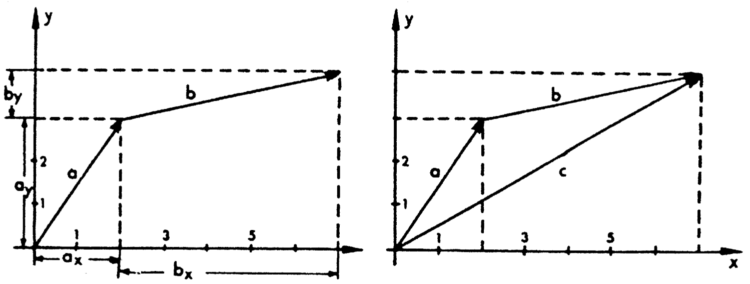
Wieder folgen einfache Aufgaben. Bei der Lösung stellen Sie selbst fest, ob Sie alles verstanden haben, oder ob Sie den Lehrbuchabschnitt erneut studieren sollten.

Wiederholen wir zunächst die neuen Bezeichnungen.

Im Koordinatensystem heißt die
x–Koordinate eines Punktes $P(x, y)$ ....
y–Koordinate eines Punktes $P(x, y)$ ....
Die Koordinatenachsen teilen die Ebene ein in vier ....

--------------------------------- ▷ 59

104



Lesen Sie nun aus der Zeichnung die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ab und schreiben Sie diese Vektoren in Komponentendarstellung.

$\vec{a}$ = (......., ...)
$\vec{b}$ = (......., ...)
$\vec{c}$ = (......., ...)

--------------------------------- ▷ 105

13

Betrag und Richtung

Hier eine Übung in Bezeichnungen: Welche Symbole bezeichnen Vektoren?

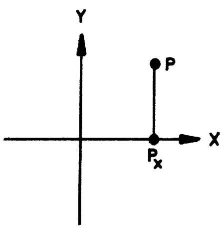
- ☐ $\vec{b}$ ☐ $\boldsymbol{b}$
- ☐ $|PQ|$ ☐ PQ
- ☐ $\overrightarrow{PQ}$

▷ 14

59

x–Koordinate: Abszisse
y–Koordinate: Ordinate
Quadranten

Gedächtnishilfe:
Es ist wie beim Alphabet. **x** kommt vor **y**
Abszisse kommt vor **O**rdinate



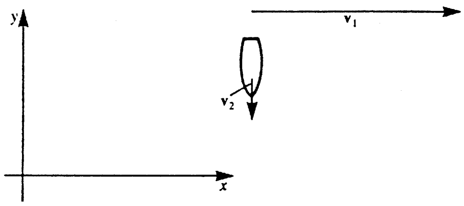
Das Lot von P auf die x-Achse trifft diese im Punkt P_x.
Diesem Punkt entspricht eine Zahl auf der x–Achse.
Diese Zahl heißt x– .... des Punktes P.
P_x ist die P .... des Punktes P auf die x–Achse.

▷ 60

105

$\vec{a} = (2, 3)$ $\vec{b} = (5, 1)$ $\vec{c} = (2+5, 3+1) = (7, 4)$

Ein Boot fahre auf einem Fluß. Der Fluß habe die Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = (10\frac{\text{m}}{\text{sec}}, 0\frac{\text{m}}{\text{sec}})$
Das Boot habe in Bezug auf das Wasser die Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = \left(0\frac{m}{\text{sec}}, 2\frac{m}{\text{sec}}\right)$
Die Bewegung des Bootes gegenüber dem Land setzt sich zusammen aus der Bewegung des Wassers und der Bewegung des Bootes gegenüber dem Wasser. Es gilt $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

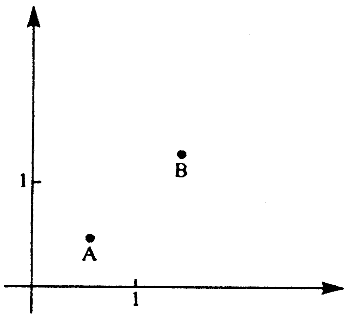


Komponenten von $\vec{v} = (\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots)$

▷ 106

14

Vektoren: $\vec{b}$, $\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{PQ}$,



Ein Auto fährt von A nach B. Kann die Ortsveränderung als Vektor dargestellt werden?

☐ ja

☐ nein

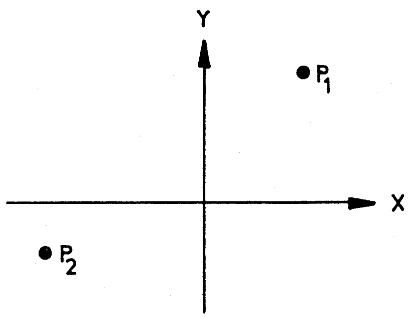
▷ 15

60

x–Koordinate

Projektion

Zeichnen Sie die Projektionen der beiden Punkte auf die x–Achse und die y–Achse ein.



▷ 61

106

$\vec{v} = (10\frac{m}{sec}, 2\frac{m}{sec})$

Gegeben sei

$\vec{b} = (2, 4)$

$\vec{a} = (3, 4)$

Gesucht ist der Differenzvektor

$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$

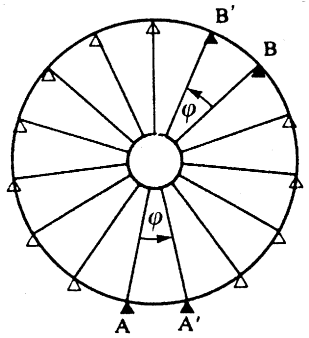
$\vec{d} = (\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots)$

▷ 107

15

Ja

Hinweis: Jede Ortsveränderung von A nach B hat eine Richtung. Wenn Andreas aus A-Dorf seine Bettina in B-Dorf besucht, so ist dies eine andere Ortsveränderung, als wenn Bettina von B-Dorf aus Ihren Andreas in A-Dorf besucht.



Hier ist ein Riesenrad. Andreas sitzt in der Gondel A, Bettina sitzt in der Gondel B. Das Riesenrad dreht sich um den Winkel φ.

Zeichnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AA'}$ und $\overrightarrow{BB'}$

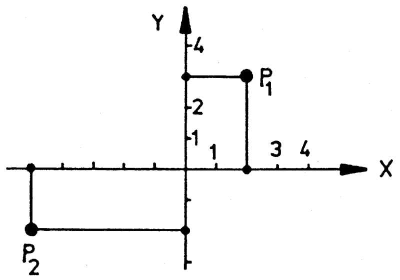
Haben beide Vektoren die gleiche Richtung?

☐ ja

☐ nein

---------------------------------- ▷ 16

61



Welche der Bezeichnungen für den Punkt P_1 oben ist richtig?

☐ $P_1 = (2, 3)$ .... ---------------------------------- ▷ 62

☐ $P_1 = (3, 2)$ .... ---------------------------------- ▷ 63

107

$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (2\text{-}3, 4\text{-}4) = (-1, 0)$

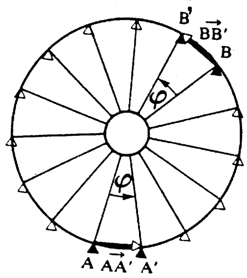
Falls Sie jetzt noch Schwierigkeiten haben, so bitte Dozenten oder Kommilitonen fragen – oder noch einmal die Abschnitte 1.6.4 und 1.6.5 im Lehrbuch studieren. Versuchen Sie danach noch einmal die Aufgaben zu bearbeiten, die Ihnen Schwierigkeiten gemacht haben.

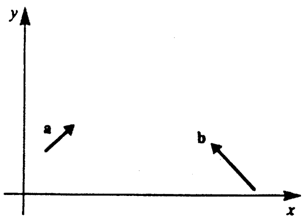
Erst danach ---------------------------------- ▷ 108

Keine Schwierigkeiten ---------------------------------- ▷ 108

16

Nein.
Hinweis: Schauen Sie sich im Zweifel die Richtungen auf dem Bild an.





Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Verschieben Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihrer Richtung.

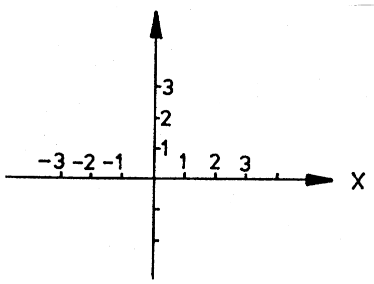
Hinweis: In den Abbildungen sind Vektoren mit fetten lateinischen Buchstaben bezeichnet.

--------------------------------- ▷ 7

62

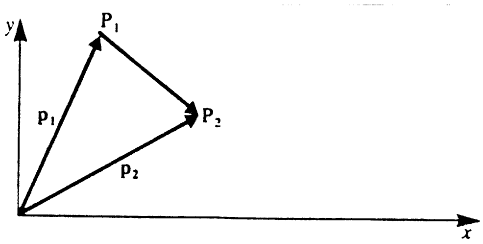
Richtig!

Zeichnen Sie die Punkte ein: $P_1 = (-1, 2)$
$P_2 = (-2, -1)$



WEITERBLÄTTERN bis zum übernächsten Lehrschritt --------------------------------- ▷ 64

108

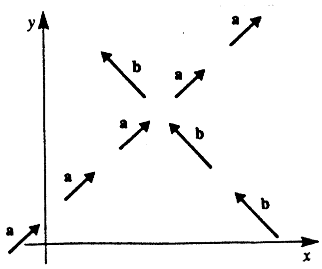


Gegeben seien zwei Punkte P_1 und P_2 mit den Ortsvektoren $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$;
Komponentendarstellung: $\vec{p}_1 = (p_{1x}, p_{1y})$; $\vec{p}_2 = (p_{2x}, p_{2y})$.
Gesucht ist der Vektor, der von P_1 nach P_2 geht, also $\overrightarrow{P_1P_2}$:

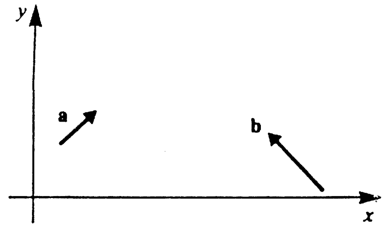
$\overrightarrow{P_1P_2}$ = ...

Komponentendarstellung: $\overrightarrow{P_1P_2}$ = (......., ...) --------------------------------- ▷ 109

17



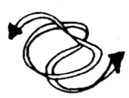
Die Linie, die entsteht, wenn Vektoren in Ihrer Richtung verschoben werden, heißt Wirkungslinie.



Zeichnen Sie zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel verschobene gleichwertige Vektoren.

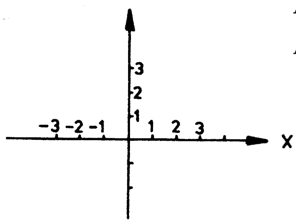
▷ 18

63



Leider falsch, Sie haben die Reihenfolge der Koordinaten vertauscht. Merken Sie sich: erst *x*–, dann *y*–Koordinate.

Gedächtnishilfe: Erst kommt die *x*–Koordinate. Wie beim Alphabet. Es ist zwar trivial, aber es muß im Gedächtnis fest sitzen.



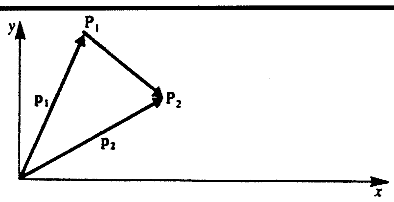
Zeichnen Sie die Punkte ein:

$P_1 = (-1, 2)$

$P_2 = (-2, -1)$

▷ 64

109



$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (p_{2x} - p_{1x}; p_{2y} - p_{1y})$$

Die Gleichung läßt sich rasch verifizieren und in der Zeichnung wiedererkennen durch die leichte Umformung: $\overrightarrow{P_1P_2} + \vec{p}_1 = \vec{p}_2$

Gegeben seien $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ mit den Komponenten:

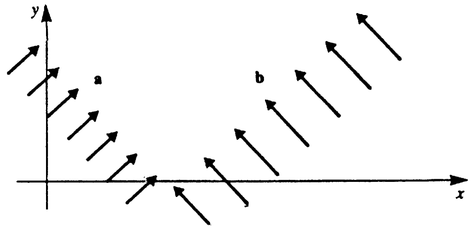
$\vec{p}_1 = (1, 4)$

$\vec{p}_2 = (3, 3)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots)$

▷ 110

18



Freie Vektoren werden als gleich betrachtet, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.

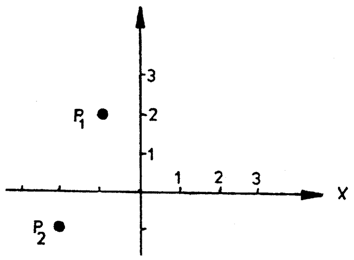
Man kann Vektoren verschieben, und zwar

a) in ihrer ....

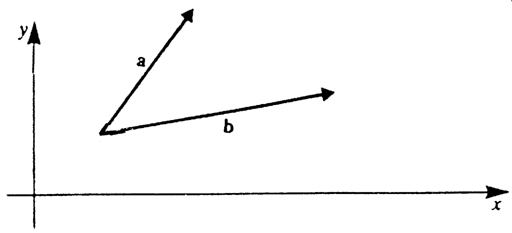
b) .... zu sich.

--------------------------------- ▷ 19

64



Zeichnen Sie die Projektion $\vec{a}_b$ von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$.



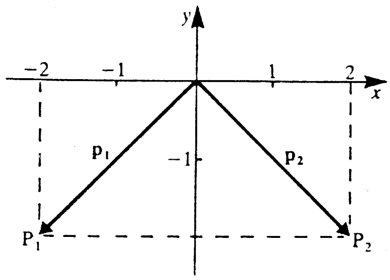
------------------------ ▷ 65

110

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (2, -1)$

$\vec{p}_1 = (-2, -2)$

$\vec{p}_2 = (2, -2)$



a) Zeichnen Sie den Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ ein, der P_1 mit P_2 verbindet.

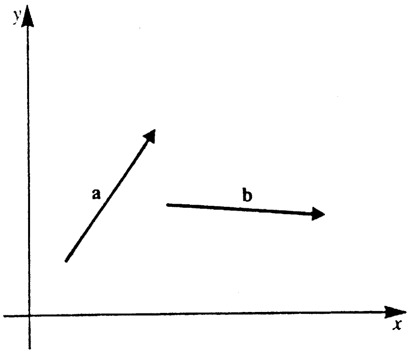
b) Komponentendarstellung:

$\overrightarrow{P_1P_2} = (....... , ...)$

--------------------------------- ▷ 111

19

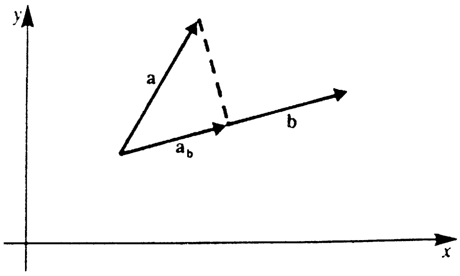
Richtung oder Wirkungslinie
parallel zu sich



Es hat einen Grund, daß wir die Verschiebung von Vektoren üben. Bei der Addition und Subtraktion müssen wir Vektoren verschieben. Verschieben Sie $\vec{b}$ so, daß der Anfangspunkt von $\vec{b}$ mit dem Anfangspunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt.

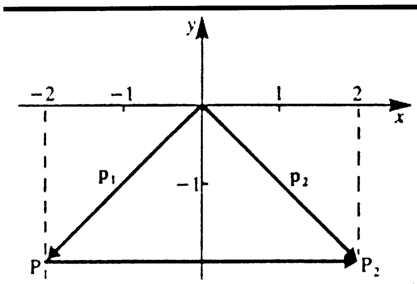
▷ 20

65



Antwort richtig, keine Schwierigkeiten ▷ 68
Erläuterung gewünscht ▷ 66

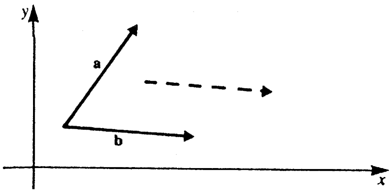
111



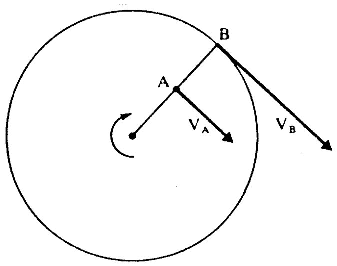
$\overrightarrow{P_1P_2} = (4, 0)$

Alles richtig ▷ 115
Erläuterung erwünscht, Fehler gemacht ▷ 112

20



Die Vektoren geben die momentane Geschwindigkeit von Punkten auf einer drehenden Scheibe an. Für die Zeichnung gilt:



1 cm ≅ 2 m/sec

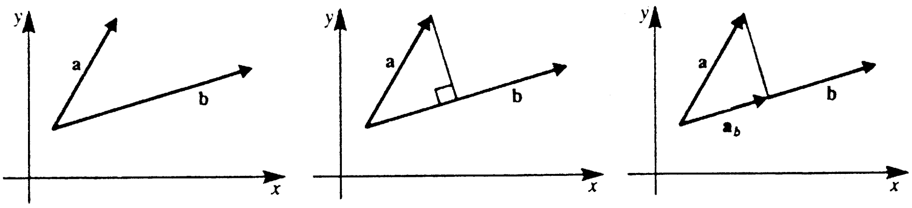
Schätzen Sie den Betrag der Geschwindigkeit

von Punkt A ....

von Punkt B ....

-------------------------------- ▷ 21

66



In der Bildfolge oben wird die Projektion in zwei Schritten gewonnen:

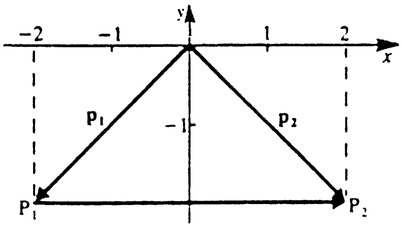
Bild 1: Vom Endpunkt von $\vec{a}$ wird das Lot auf $\vec{b}$ gefällt.

Bild 2: Die Strecke vom gemeinsamen Anfangspunkt beider Vektoren bis zum Schnittpunkt mit dem Lot ist die eingezeichnete Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$.

Zeichnen Sie jetzt oben links die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ ein.

-------------------------------- ▷ 67

112



$\overrightarrow{P_1P_2}$ ist der Vektor, der von P_1 nach P_2 geht. (Pfeilspitze bei P_2)

Schwierigkeiten könnten die Vorzeichen machen. Aus der Zeichnung ist ablesbar:

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \overrightarrow{P_1P_2}$$

Umgeformt ergibt dies:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

In Worten: Koordinaten der Pfeilspitze minus Koordinaten des Pfeilendes.

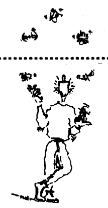
-------------------------------- ▷ 113

21

$\vec{v}_A \approx 1{,}8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

$\vec{v}_B \approx 3{,}6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

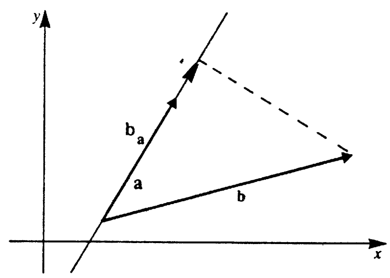
Entscheiden Sie selbst:



Keine Schwierigkeiten --------------------------------- ▷ 26

Weitere Übungen erwünscht --------------------------------- ▷ 22

67



Hinweis: Bei der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ müssen wir hier zunächst die Wirkungslinie für $\vec{a}$ zeichnen, denn die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ ist größer als $\vec{a}$.

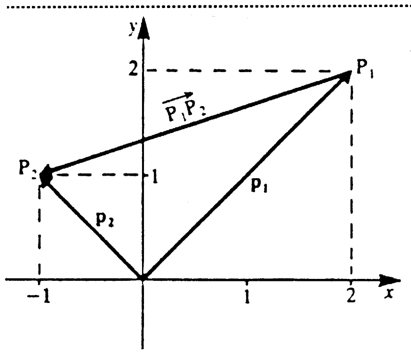
--------------------------------- ▷ 68

113

Aus der Zeichnung im letzten Lehrschritt konnten Sie ablesen:

$\vec{p}_1 = (-2, -2)$ und $\vec{p}_2 = (2, -2)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (2 - (-2), -2(-2)) = (4{,}0)$



Bilden Sie $\overrightarrow{P_1P_2}$

$\vec{p}_1 = (2, 2)$

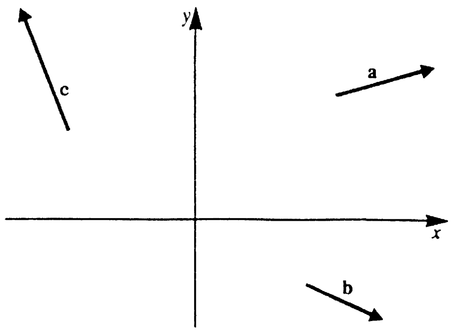
$\vec{p}_2 = (-1, +1)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (\ldots\ldots ,\ \ldots\ldots)$

--------------------------------- ▷ 114

22

Verschieben Sie $\vec{c}$ und $\vec{b}$ so, daß alle drei Vektoren im Anfangspunkt von $\vec{a}$ beginnen.



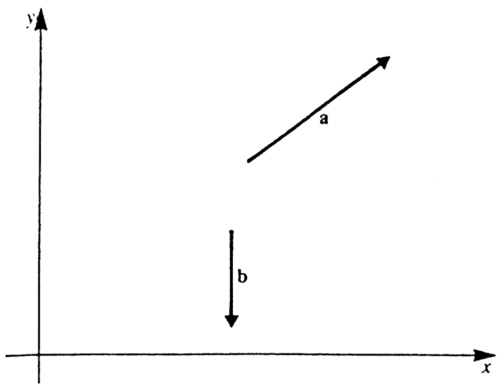
Erinnerung: In den Abbildungen sind Vektoren durch fette lateinische Buchstaben bezeichnet.

Grund: Verwechslungen sind hier nicht möglich.

--------------------------------- ▷ 23

68

Zeichnen Sie die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.



--------------- ▷ 69

114

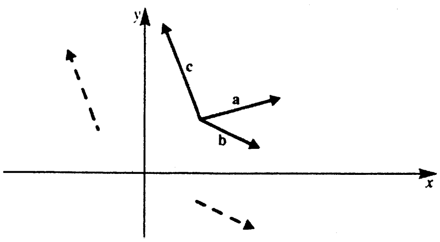
$\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -1)$

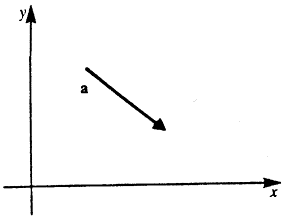
Man kann sich merken:

Komponenten eines Vektors von Punkt P_1 zu P_2:
Koordinaten der Pfeilspitze minus Koordinaten des Pfeilendes.

--------------------------------- ▷ 115

23

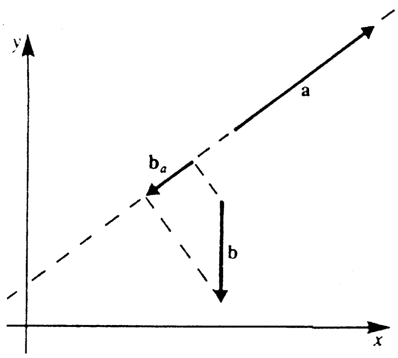




Verschieben Sie den Vektor $\vec{a}$ so, daß er im Nullpunkt des Koordinatensystems beginnt.

-------------------------------- ▷ 24

69



Hinweis:
Hier mußte man die Wirkungslinie von $\vec{a}$ zeichnen, um die Lote fällen zu können.

Alles richtig -------------------------------- ▷ 71

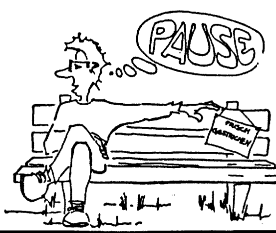
Fehler gemacht oder Erläuterung gewünscht -------------------------------- ▷ 70

115

Weitere Übungen stehen auf Seite 33 des Lehrbuchs. Vor den Übungsaufgaben steht jeweils die Nummer des dazugehörenden Abschnittes im Lehrbuch.

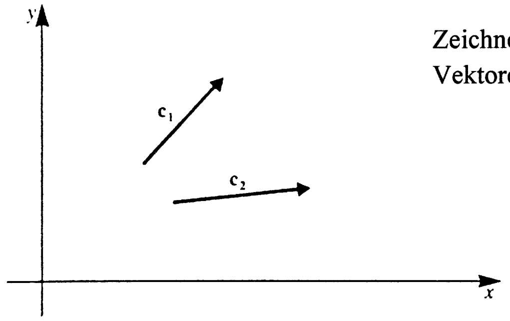
Sinnvoll ist es, diese Aufgaben erst morgen oder übermorgen zu rechnen, dann ist die Übung wirksamer, weil Sie dann wieder neu überlegen müssen.

Merkzettel in das Lehrbuch legen: Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.6 rechnen



-------------------------------- ▷ 116

24



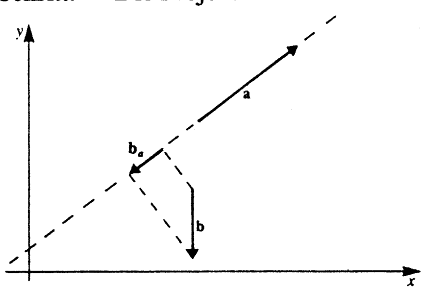
Zeichnen Sie die Wirkungslinien für die Vektoren $\vec{c}_1$ und $\vec{c}_2$

--------------------------------- ▷ 25

70

Hinzugekommen ist bei dieser Aufgabe, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht den gleichen Anfangspunkt haben. Wir gewinnen die Projektion hier in drei Schritten:

1. Schritt: Wirkungslinie von $\vec{a}$ zeichnen.
2. Schritt: Vom Anfangs- *und* vom Endpunkt von $\vec{b}$ Lot auf Wirkungslinie fällen.
3. Schritt: Die Projektion einzeichnen.



--------------------------------- ▷ 71

116

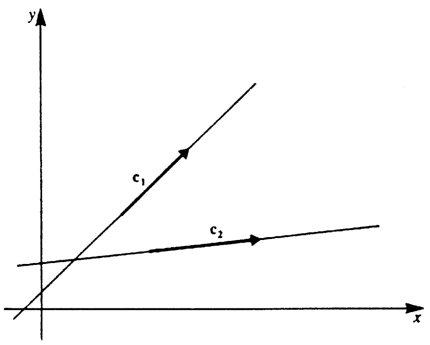
Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar
Betrag eines Vektors

Es folgt jetzt die letzte Phase des selbständigen Studiums anhand des Lehrbuches. Danach ist das Kapitel 1 beendet.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch: 1.7 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar
1.8 Betrag eines Vektors
Lehrbuch, Seite 28-30

BEARBEITEN SIE danach --------------------------------- ▷ 117

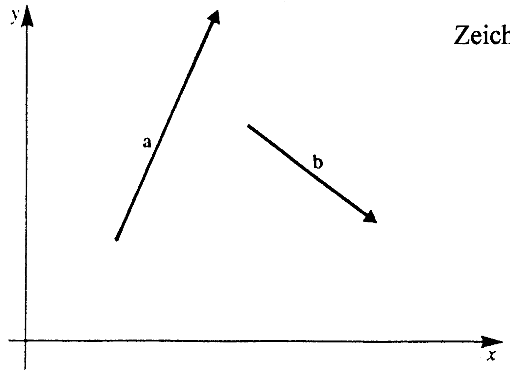
25



Hinweis: In das Leitprogramm mit Bleistift zeichnen. Nicht zu stark drücken. Dann können Sie wieder radieren und das Leitprogramm kann von einem Kommilitonen noch einmal benutzt werden. Sie können die Antworten auch auf einem Zettel notieren.

-------------------------------- ▷ 26

71



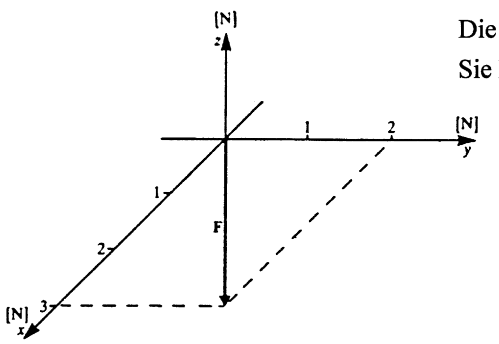
Zeichnen Sie die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$.

Falls Sie Schwierigkeiten haben, noch einmal den Abschnitt 1.4 im Lehrbuch lesen und diese Aufgabe anhand der im Text dargestellten Konstruktion lösen.

-------------------------------- ▷ 72

117

Hier im Leitprogramm folgen gleich Übungen:



Gegeben sei die Kraft

$\vec{F} = (3\text{ N}, 2\text{ N}, 0)$

Die Kraft soll auf das 2,5-fache gesteigert werden.

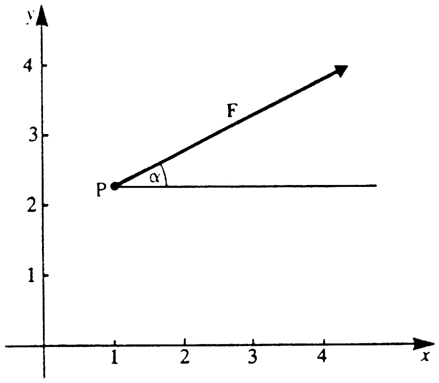
Sie hat dann die Komponentendarstellung:

$2{,}5 \cdot \vec{F} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

-------------------------------- ▷ 118

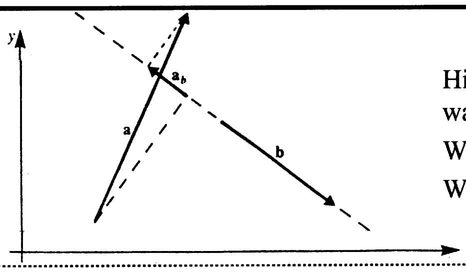
26

Im Punkt P greift eine Kraft $\vec{F}$ an. In der Zeichnung bedeutet 1 cm ≅ 1 Newton.
Wie groß ist der Betrag des Kraftvektors?



$F =$ ....

---------------------------------- ▷ 27



72

Hinweis: Die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe war, die Lote von Anfangs- und Endpunkt auf die Wirkungslinie von $\vec{b}$ zu fällen. $\vec{a}$ kreuzt die Wirkungslinie von $\vec{b}$.

In den nächsten Lehrschritten wird der Begriff des Kosinus benutzt. Dieser Begriff wird den meisten von Ihnen aus der Schule bekannt sein. Falls nicht, gibt es hier eine ganz kurze Erläuterung.

Kosinus bekannt ---------------------------------- ▷ 74

Kosinus nicht bekannt ---------------------------------- ▷ 73

118

$2{,}5\ \vec{F} = (7{,}5\ \text{N}, 5\ \text{N}, 0)$

Der Vektor $\vec{S} = (0, 0, 0)$ heißt ....

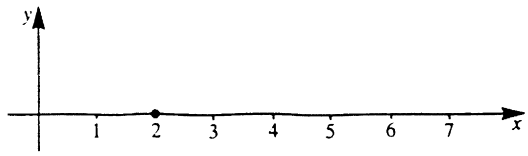
---------------------------------- ▷ 119

27

$F \approx 3{,}1\,\mathrm{N}$

Hinweis: der Betrag ist ein Skalar. Skalare physikalische Größen sind festgelegt durch eine Maßzahl (hier 3,1) und eine Maßeinheit (hier Newton). Es mag kleinlich klingen, aber die Maßeinheit muß stets angegeben werden.

Ein Massenpunkt bewege sich entlang der positiven x-Achse. Der Betrag seiner Geschwindigkeit sei v = 4 m/sec. Er befinde sich an der Stelle x = 2. Für die Zeichnung gilt: 1 cm entspricht 1 m/sec. Zeichnen Sie den Geschwindigkeitsvektor ein.



--------------------------------- ▷ 28

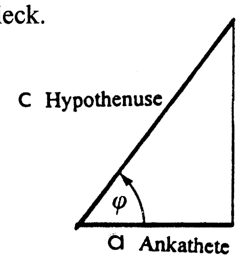
73

Im Lehrbuch werden Kosinus und Sinus in Kapitel 3 ausführlich behandelt. Hier das Notwendige in Kurzform: Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck.

Bezeichnung: c = Hypothenuse, a = Ankathete

Definition: Der Kosinus des Winkels φ ist das Verhältnis $\frac{a}{c}$

Formel: $\cos(\varphi) = \frac{a}{c}$

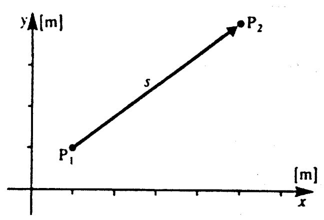


Das können wir umformen zu: $a = c \cdot \cos(\varphi)$. Diese Umformung wird benötigt. Die Werte für cos(φ) bestimmt man mit dem Taschenrechner oder entnimmt sie Tabellen. Schreiben Sie sich diese Definition und die Umformung auf einen Zettel, den Sie bei Bedarf einsehen.

--------------------------------- ▷ 74

119

Nullvektor



Eine Schnecke kriecht mit gleichförmiger Geschwindigkeit von Punkt P_1 = (1 cm, 1 cm) nach Punkt P_2 = (5 cm, 4 cm). Sie braucht dafür 50 sec. Geben Sie an:

Ortsveränderung: $\overrightarrow{P_1P_2}$ = ...

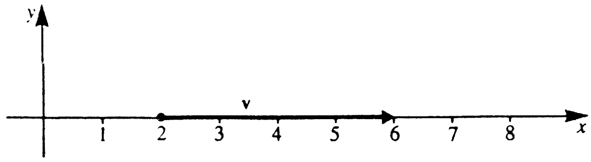
Betrag der zurückgelegten Strecke: $|\vec{s}|$ = ...

Betrag der Geschwindigkeit: $|\vec{v}|$ = ...

Geschwindigkeit: $\vec{v}$ = ...

------- ▷ 120

28



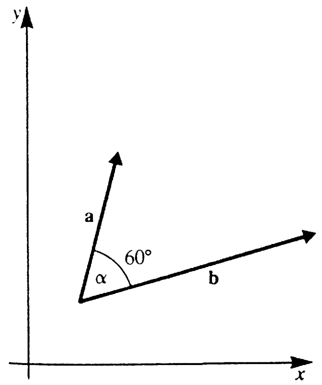
Das war der letzte Lehrschritt für diesen Abschnitt.

▷ 29

74

Rechnerische Ermittlung der Projektion eines Vektors.

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen einen Winkel von 60 Grad ein.



$|\vec{a}| = 3$

$|\vec{b}| = 4$

Wie groß ist die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$?

$a_b =$..............

Hinweis: cos 60° = 0,5

▷ 75

120

Ortsveränderung	$\vec{s} = \overrightarrow{P_1P_2} = (4\,\text{cm}, 3\,\text{cm})$
Betrag der zurückgelegten Strecke	$\lvert\vec{s}\rvert = \sqrt{16\,\text{cm}^2 + 9\,\text{cm}^2} = 5\,\text{cm}$
Betrag der Geschwindigkeit	$\lvert\vec{v}\rvert = 5$ cm / 50 sec = 0,1 cm/sec
Geschwindigkeit	$v = (\frac{4}{50}\frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \frac{3}{50}\frac{\text{cm}}{\text{sec}}) = (0{,}08\frac{\text{cm}}{\text{sec}}, 0{,}06\frac{\text{cm}}{\text{sec}})$

Alles richtig ▷ 123

Fehler gemacht oder Erläuterung erwünscht ▷ 121

29

Addition von Vektoren

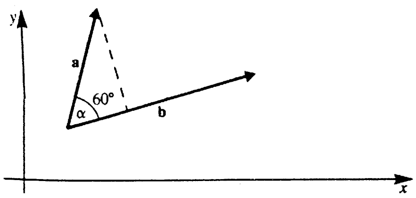
Subtraktion von Vektoren

Die nächsten Abschnitte im Lehrbuch behandeln die geometrische Addition und Subtraktion von Vektoren. Beide Operationen sind für die Lösung vieler Probleme sehr nützlich. Auch hier gilt, einige Begriffe sind mit ihren Bedeutungen fast wie Vokabeln zu lernen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 1.2 Addition von Vektoren
1.3 Subtraktion von Vektoren
Lehrbuch, Seite 16-19

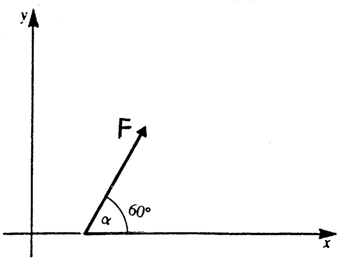
BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt ---------------------------------▷ 30

75



$a_b = a \cdot \cos 60° = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$

Hinweis: Der Betrag von $\vec{b}$ spielt keine Rolle. Es kommt nur auf die Richtung von $\vec{b}$ an.



$|\vec{F}| = 10\,\text{N}$.

Wie groß ist die Komponente der Kraft $\vec{F}$ in x–Richtung?

$F_x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Hinweis: cos (60°) = 0,5

---------------------------------▷ 76

121

Schreiben Sie zunächst, bitte, die Aufgabe und die Zeichnung aus dem Lehrschritt 119 ab.

1. Bestimmung der Ortsveränderung: Der Vektor, der die Ortsveränderung angibt, ist die Differenz der Ortsvektoren.

   $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (5\text{ cm} - 1\text{ cm}, 4\text{ cm} - 1\text{ cm}) = (4\text{ cm}, 3\text{ cm})$

2. Bestimmung des Betrags der Ortsveränderung: $\overrightarrow{P_1P_2}$

   Erinnerung: Der Betrag eines Vektors $\vec{a} = (a_x, a_y)$ ist $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

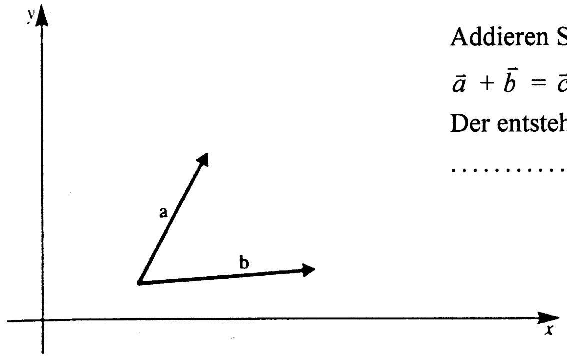
   Hier: $\overrightarrow{P_1P_2} = \sqrt{(4\text{cm})^2 + (3\text{cm})^2} = \sqrt{25\text{cm}^2} = 5\text{ cm}$

   (falls hier Schwierigkeiten, noch einmal in das Lehrbuch schauen)

---------------------------------▷ 122

30

Nach dem Studium des Abschnittes im Lehrbuch kontrollieren Sie nun, ob Sie alles verstanden und behalten haben. Nicht alles was wir verstanden haben, behalten wir auch..



Addieren Sie die Vektoren

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Der entstehende Vektor heißt

.... oder ....

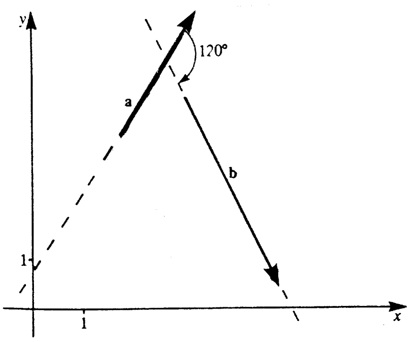
-------------------------------- ▷ 31

76

$F_x = 5$ N

....

Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.



$b_a =$ ....

Bei Schwierigkeiten Aufgabe anhand des Lehrbuchs lösen.

$|\vec{a}| = 3$

$|\vec{b}| = 4$

Hinweis: cos 60° = 0,5
cos 120° = - 0,5

-------------------------------- ▷ 77

122

3. Die Geschwindigkeit ist — bei gleichförmiger Bewegung — die Ortsveränderung pro Zeitintervall. Für den Betrag der Geschwindigkeit gilt: Die Schnecke kriecht im Zeitintervall 50 sec gerade 5 cm weiter.

   $|\vec{v}| = 5 \text{ cm} / 50 \text{ sec} = 0{,}01 \ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$

4. Den Geschwindigkeitsvektor erhalten wir, wenn wir die Komponenten der Geschwindigkeit einzeln ermitteln.

   Die Schnecke kriecht in x–Richtung um 4 cm weiter. Geschwindigkeit in x–Richtung:

   $v_x = 4 \text{ cm} / 50 \text{ sec} = 0{,}08 \ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$

   Die Schnecke kriecht in y–Richtung um 3 cm weiter. Geschwindigkeit in y–Richtung:

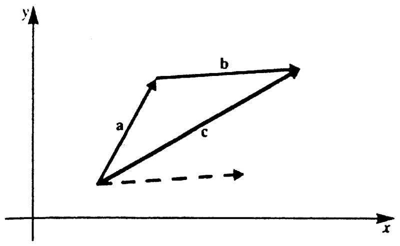
   $v_y = 3 \text{ cm} / 50 \text{ sec} = 0{,}06 \ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$

   Komponentendarstellung des Geschwindigkeitsvektors:

   $\vec{v} = (0{,}08 \ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, 0{,}06 \ \frac{\text{cm}}{\text{sec}})$

-------------------------------- ▷ 123

31

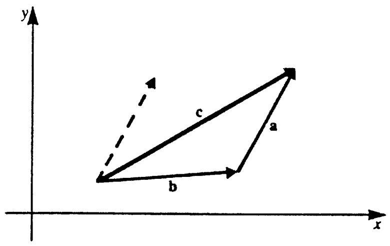


Resultierender Vektor

Summenvektor

Resultante

Hinweis: Auch die Addition mit vertauschter Reihenfolge ist eine gleichwertige Lösung.



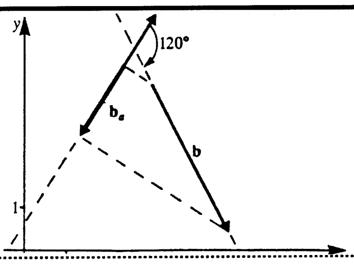
Schreiben Sie die beiden gleichwertigen Gleichungen

$\ldots + \ldots = \vec{c}$

$\ldots + \ldots = \vec{c}$

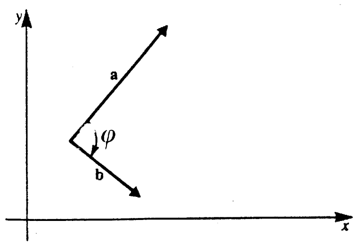
--------------------------------- ▷ 32

77



$$\left|\vec{b}_a\right| = b \cdot \cos 120^\circ$$
$$= 4 \cdot (-0{,}5)$$
$$= -2$$

Ermitteln Sie rechnerisch und zeichnerisch die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$.



$|\vec{a}| = 5$

$|\vec{b}| = 2$

$\varphi = 90^\circ$

$a_b = \ldots\ldots\ldots$

Hinweis: $\cos 90^\circ = 0$ -------------- ▷ 78

123

Gegeben sei der Vektor $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

Betrag von $\vec{b}$ allgemein:

$|\vec{b}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Zahlenbeispiel

$\vec{b} = (1, 2, 1)$

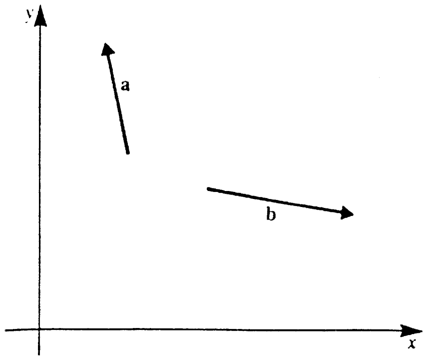
$|\vec{b}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 124

32

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

$\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$



Bilden Sie den Summenvektor der Vektoren

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Anderer Name für Summenvektor:

....

....

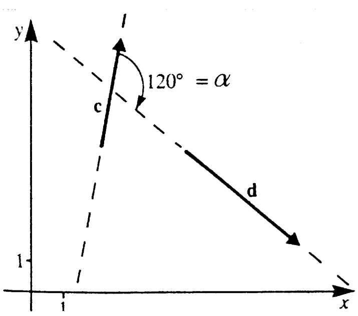
Zeichnen Sie die beiden gleichwertigen Lösungen auf einen Zettel.

-------------------------------- ▷ 33

78

$a_b = 0$

Ermitteln Sie rechnerisch und zeichnerisch die Projektion von $\vec{c}$ auf $\vec{d}$.



$\alpha = 120°$

$\cos\alpha = -0{,}5$

$|\vec{c}| = 4$

$|\vec{d}| = 5$

$c_d =$ ....

-------------------------------- ▷ 79

124

$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

Gegeben sei ein Vektor $\vec{a}$.

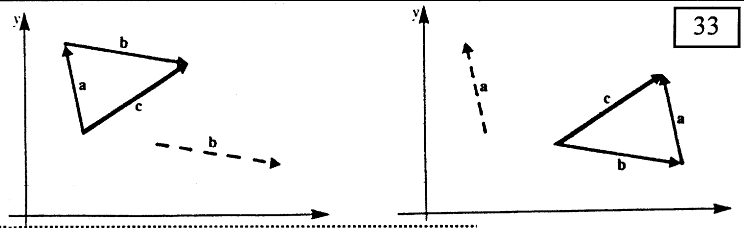
$\vec{a} = (4, 2, 4)$

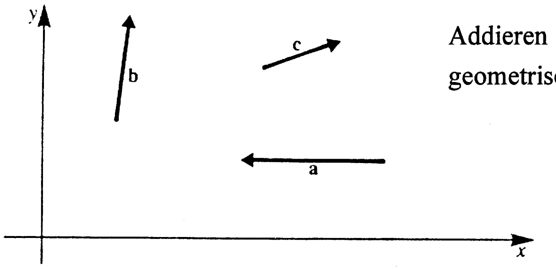
$\vec{a}$ hat den Betrag: ....

-------------------------------- ▷ 125

33

Resultierender Vektor
Resultante

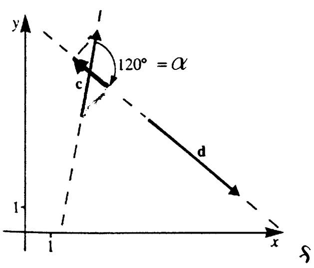




Addieren Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ geometrisch.

---------------------------------- ▷ 34

79



$c_d = 4 \cdot (-0{,}5) = -2$

Jetzt folgen noch kurze Hinweise zur Arbeitseinteilung. ---------------------------------- ▷ 80

125

$|\vec{a}| = \sqrt{16+4+16} = 6$

Gesucht ist nun der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$.

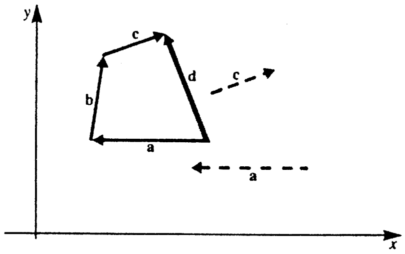
Wir gewinnen den Einheitsvektor in Richtung eines Vektor $\vec{a}$, indem wir $\vec{a}$ mit dem Faktor 1/a multiplizieren. Formal ist das die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar.

Geben Sie den Einheitsvektor $\vec{e}_a$ an für $\vec{a} = (4, 2, 4)$

$\vec{e}_a = ...$

---------------------------------- ▷ 126

34



Die Vektoraddition besteht in der Bildung einer geschlossenen fortlaufenden Kette der zu addierenden Vektoren. Es entsteht ein Polygonzug. Jetzt entscheiden Sie:

Vektoraddition verstanden, keine Fehler gemacht ---------------------------------- ▷ 44

Fehler gemacht oder weitere Erläuterungen erwünscht ---------------------------------- ▷ 35

80

Einteilung von Arbeitsphasen und Pausen

Alle Lebewesen ermüden. Auch der Mensch. Gelegentlich muß man eine Pause machen. Soll man die Pause machen, wenn vor Ermüdung die Augenlider bereits gesunken sind?

Sicher. Aber besser ist es, Pausen rechtzeitig zu machen. Durch kurze Pausen kann ein Leistungsabfall durch Ermüdung hinausgeschoben werden.

Ein für derartige Zusammenhänge typischer Befund wird im nächsten Lehrschritt dargestellt.

---------------------------------- ▷ 81

126

$$\vec{e}_a = \left(\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Berechnen wir zur Kontrolle und Verifizierung jetzt den Betrag von $\vec{e}_a = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$|\vec{e}_a| = ...$

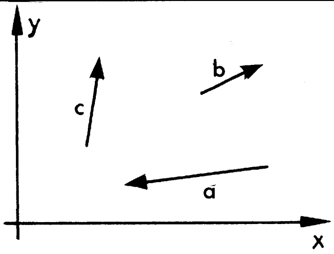
---------------------------------- ▷ 127

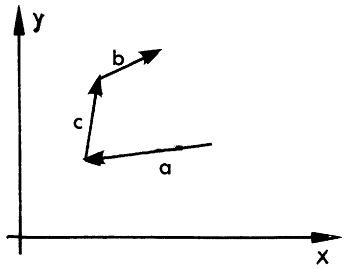
35

Zur Erläuterung addieren wir die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ Schritt für Schritt:

1. Schritt: Die Vektoren werden so verschoben, daß eine fortlaufende geschlossene Kette der Pfeile entsteht. Einzige Veränderung: Verschiebung der Vektoren.

2. Schritt: Anfangspunkt und Endpunkt der Kette werden durch die Resultierende verbunden. Zeichnen Sie die Resultierende ein.

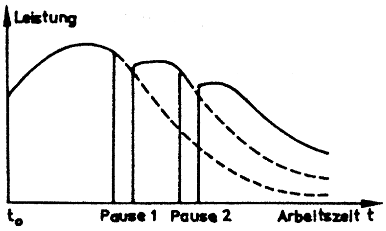




----- ▷ 36

81

Der experimentell durch Tests erhobene Verlauf der Leistungsfähigkeit ist als Funktion der Zeit dargestellt.



Pausen verzögern den Leistungsabfall. Das bedeutet, daß Sie Ihre Arbeit in Arbeitsabschnitte und Pausen einteilen sollten. Hier im Leitprogramm sind die Abschnitte bereits eingeteilt. Die Größe des Arbeitsabschnittes richtet sich nach der subjektiven Schwierigkeit des Inhalts. Deshalb sind die Arbeitsabschnitte vom Leitprogramm jeweils so gewählt, daß sie eher zu klein als zu groß bemessen sind. Förderliche Arbeitszeiten liegen zwischen 20 und 60 Minuten. -------------------------------- ▷ 82

127

$$|\vec{e}_a| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

....

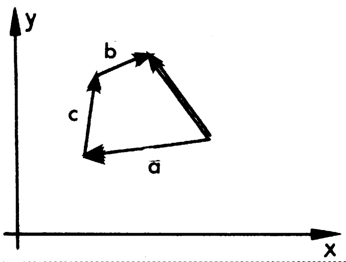
Berechnen Sie den Einheitsvektor für

$\vec{a} = (3, 4)$

$\vec{e}_a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

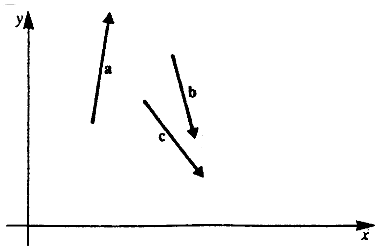
-------------------------------- ▷ 128

36



Richtung der Resultierenden: Sie zeigt vom Anfangspunkt der Kette zum Endpunkt.

Merkhilfe: Bei der Vektoraddition kommt man zum gleichen Punkt, wenn man entweder die Kette der zu addierenden Vektoren entlang geht oder der Resultierenden folgt.



Addieren Sie die drei Vektoren

-------------------------------- ▷ 37

82

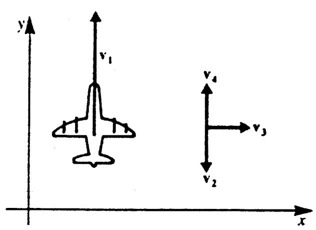
Pausen sind Bestandteil der Arbeit. Aber genau wie die Arbeit eingeteilt ist, sollte auch die Pause eingeteilt sein. Pausen dürfen nicht zu lang werden. Dann unterbrechen sie die Arbeit, und man muß sich wieder ganz neu auf die Lernsitutation einstellen — dafür braucht man Zeit und Energie.

Es hilft sehr, vor Beginn der Pause bereits auch das Ende der Pause festzulegen. Wenn man das vorgesehene Ende auf einen Zettel schreibt, kann man kontrollieren, wie gut man sich an eigene Vorsätze hält.

-------------------------------- ▷ 83

128

$\vec{e}_a = (0{,}6,\ 0{,}8)$



Ein Flugzeug habe die Geschwindigkeit gegenüber der Luft $\vec{v}_1 = (0, 200 \text{ km/h})$

Geben Sie die Geschwindigkeit des Flugzeuges über Land an für drei verschiedene Windgeschwindigkeiten:

Gegenwind: $\vec{v}_2 = (0, -50 \text{ km/h})$

Seitenwind: $\vec{v}_3 = (50 \text{ km/h}, 0)$

Rückenwind: $\vec{v}_4 = (0, +50 \text{ km/h})$

Gesucht ist die Geschwindigkeit über Land

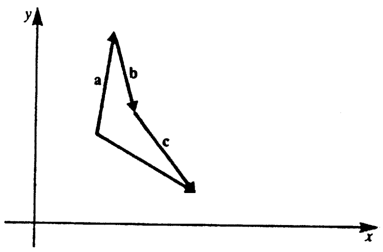
$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 =$ ....

$\vec{v}_1 + \vec{v}_3 =$ ....

$\vec{v}_1 + \vec{v}_4 =$ ....

-------------------------------- ▷ 129

37



Entscheiden Sie selbst:

Vektoraddition verstanden ▷ 41

Noch eine Übung gewünscht ▷ 38

83

Komponentendarstellung im Koordinatensystem

Jetzt folgt wieder eine Phase selbständigen Studiums anhand des Lehrbuches.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch
1.6 Komponentendarstellung im Koordinatensystem
1.6.1 Ortsvektoren
1.6.2 Einheitsvektoren
1.6.3 Komponentendarstellung eines Vektors
Lehrbuch, Seite 22-25

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt ▷ 84

129

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (0, 150\,\frac{\text{km}}{\text{h}})$ (Gegenwind)

$\vec{v}_1 + \vec{v}_3 = (50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}, 200\,\frac{\text{km}}{\text{h}})$ (Seitenwind)

$\vec{v}_1 + \vec{v}_4 = (0, 250\,\frac{\text{km}}{\text{h}})$ (Rückenwind)

Geben Sie den Betrag der Absolutgeschwindigkeit über dem Erdboden an für die drei Fälle oben:

$|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| =$ .... (Gegenwind)

$|\vec{v}_1 + \vec{v}_3| =$ .... (Seitenwind)

$|\vec{v}_1 + \vec{v}_4| =$ .... (Rückenwind)

▷ 130

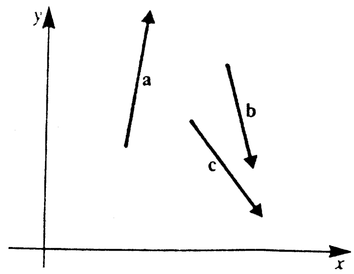
38

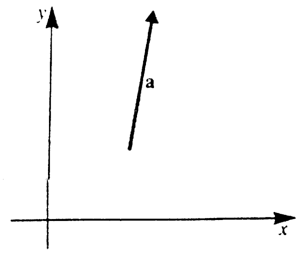
Addieren Sie die drei Vektoren in zwei Schritten.

1. Schritt: Bildung einer fortlaufenden Kette:

a) Verschieben Sie zunächst den Vektor $\vec{b}$ so, daß er an der Spitze von $\vec{a}$ beginnt.

b) Verschieben Sie nun den Vektor $\vec{c}$ so, daß er an der Spitze des verschobenen Vektors $\vec{b}$ beginnt.





---▷ 39

84

Rekapitulieren Sie die neuen Begriffe.

Vektoren mit der Länge 1 heißen ....

Die Darstellung eines Vektors in der Form $\vec{a} = (3, 1, 2)$ heißt ....

Der Vektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt P heißt ....

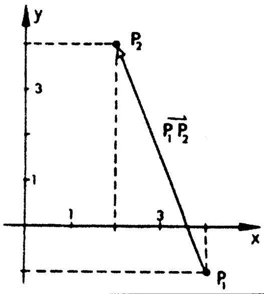
--------------------------------▷ 85

130

$$|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = \sqrt{(150\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}})^2} = 150 \text{ km/h}$$

$$|\vec{v}_1 + \vec{v}_3| = \sqrt{(50\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}})^2 + (200\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}})^2} = \sqrt{42.500(\tfrac{\text{km}}{\text{h}})^2} \approx 206 \text{ km/h}$$

$$|\vec{v}_1 + \vec{v}_4| = \sqrt{(250\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}})^2} = 250 \text{ km/h}$$



Gegeben seien zwei Punkte P_1, P_2

$P_1 = (4, -1)$

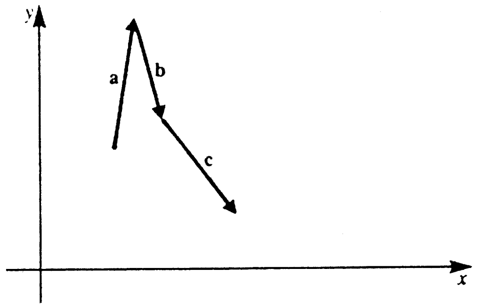
$P_2 = (2, 4)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = ($ .... $)$

Entfernung der Punkte: ....

--------------------------------▷ 131

39



2. Schritt:

Verbinden Sie nun den Anfangspunkt und den Endpunkt der Kette und zeichnen Sie die Resultierende $\vec{r}$ ein.

--------------------------------- ▷ 40

85

Einheitsvektoren

Komponentendarstellung

Ortsvektor

Geben Sie drei Schreibweisen für die Einheitsvektoren in den drei Richtungen des Koordinatensystems an:

$\vec{e} = (\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots)$

$\vec{e} = (\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots)$

$\vec{e} = (\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots)$

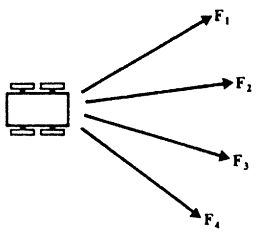
--------------------------------- ▷ 86

131

$\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, 5)$

$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{29} \approx 5{,}39$

An einem Wagen ziehen vier Hunde. Sie haben die Kräfte:



$\vec{F}_1 = (20\text{ N}, 15\text{ N}) \quad \vec{F}_2 = (18\text{ N}, 0\text{ N})$

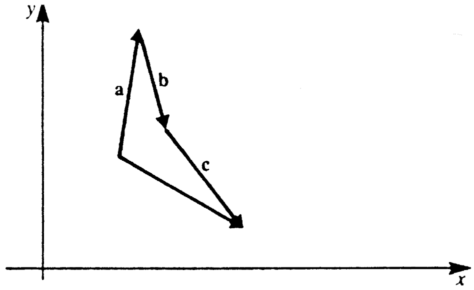
$\vec{F}_3 = (25\text{ N}, -5\text{ N}) \quad \vec{F}_4 = (27\text{ N}, -20\text{ N})$

Gesamtkraft $\vec{F} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$|\vec{F}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 132

40



Das Verfahren der zeichnerischen Addition von Vektoren ist im Kern ganz einfach. Man muß nur die geschlossene Kette der Pfeile bilden und dabei darauf achten, daß die Pfeile gleichsinnig aneinander gereiht werden. Der hinzugefügte Pfeil beginnt immer an der Spitze des vorausgehenden.

-------------------------------- ▷ 41

86

$\vec{e} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$\vec{e} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

....

p_x, p_y, p_z seinen die Komponenten eines Ortsvektors $\vec{p}$.

Die ausführliche Darstellung von $\vec{p}$ als Summe seiner Komponenten wird notiert:

$\vec{p} =$ ....

In abgekürzter Komponentendarstellung wird $\vec{p}$ notiert:

$\vec{p} =$ .... oder $\vec{p} =$ ....

-------------------------------- ▷ 87

132

$\vec{F} = (90\ \text{N}, -10\ \text{N})$

$|\vec{F}| = \sqrt{8200}\ \text{N} \approx 90{,}5\ \text{N}$

....

Für die nächste Aufgabe ist es notwendig zu wissen, was $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ bedeuten.

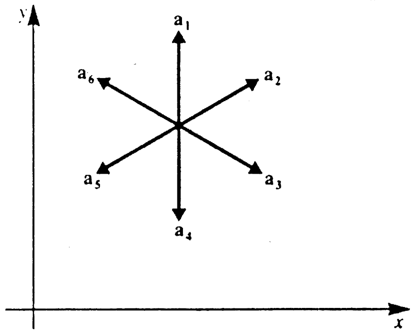
Bedeutung von Kosinus und Sinus bekannt -------------------------------- ▷ 134

Bedeutung von Kosinus und Sinus nicht bekannt -------------------------------- ▷ 133

41

Der Summenvektor ist von der Reihenfolge unabhängig, in der die Vektoren addiert werden.

Bilden Sie den Summenvektor einmal, indem Sie die Vektoren in der Reihenfolge $1 \to 6$ und dann in umgekehrter Reihenfolge $6 \to 1$ addieren.



-------------------------------- ▷ 42

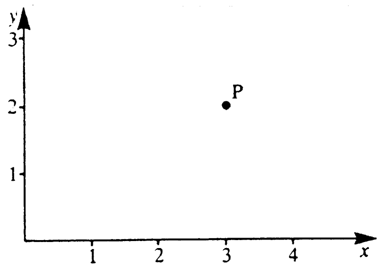
87

$\vec{p} = p_x \cdot \vec{e}_x + p_y \cdot \vec{e}_y + p_z \cdot \vec{e}_z$ $\qquad \vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ $\qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

....

Der Punkt $P = (3, 2)$ sei gegeben.

Der Ortsvektor $\vec{p}$ hat die beiden .... $p_x \cdot \vec{e}_x$ und $p_y \cdot \vec{e}_y$.



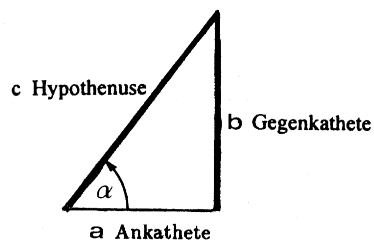
Zeichnen Sie p_x und p_y sowie $\vec{p}$ ein.

-------------------------------- ▷ 88

133

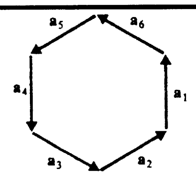
Im Lehrbuch werden Kosinus und Sinus im Kapitel 3 ausführlich behandelt. Hier genügt folgende Betrachtung für ein rechtwinkliges Dreieck:

Definition des Kosinus:
$\cos\alpha = a/c$ = Ankathete/Hypothenuse
Daraus ergibt sich $a = c \cdot \cos(\alpha)$
Definition des Sinus:
$\sin\alpha = b/c$ = Gegenkathete/Hypothenuse
Daraus ergibt sich $b = c \cdot \sin(\alpha)$



Die Werte von Sinus und Kosinus bestimmt man für den gegebenen Winkel α mit dem Taschenrechner oder entnimmt sie Tabellen. Schreiben Sie sich die Definition und die Umformungen auf einen Zettel, den Sie bei Bedarf benutzen

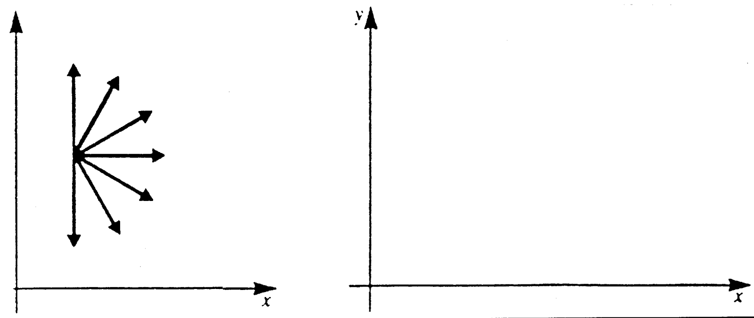
-------------------------------- ▷ 134



42

Der Summenvektor oder die Resultierende ist in beiden Fällen Null.

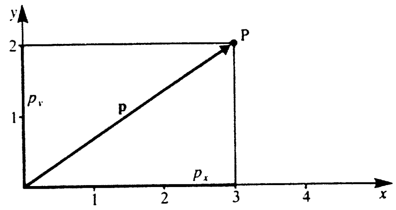
Bilden Sie den Summenvektor



--------- ▷ 43

88

Komponenten



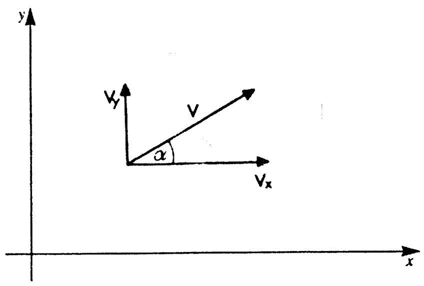
Wie lautet die Komponentendarstellung von $\vec{p}$ oben in der Zeichnung?

$\vec{p}$ = ...

-------------------------------- ▷ 89

134

Hier eine praktisch wichtige Aufgabe:
Ermittlung der Komponenten eines Vektors bei gegebenem Betrag und bekanntem Winkel.

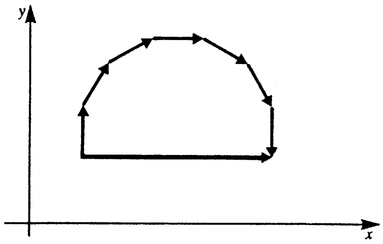


Geben Sie $\vec{v}$ in Komponentenschreibweise unter Benutzung von Kosinus (α) und Sinus (α) an.

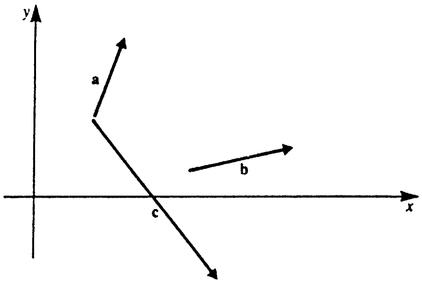
$\vec{v}$ = (......., ...)

-------------------------------- ▷ 135

43



Bei einer anderen Reihenfolge ergeben sich andere Ketten – aber das Ergebnis ist immer gleich.



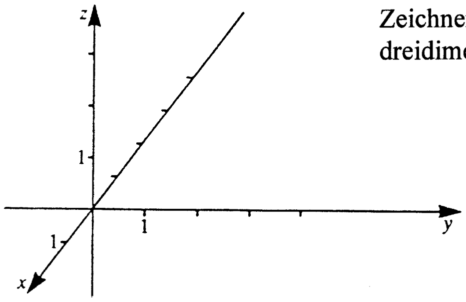
Addieren Sie nun die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

--------------------------------- ▷ 44

89

$\vec{p}$ = (3, 2) oder $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Komponentendarstellung des dreidimensionalen Vektors $\vec{a}$: $\vec{a}$ = (-2, 4, 2)



Zeichnen Sie den Vektor $\vec{a}$ in das dreidimensionale Koordinatensystem.

--------------------------------- ▷ 90

135

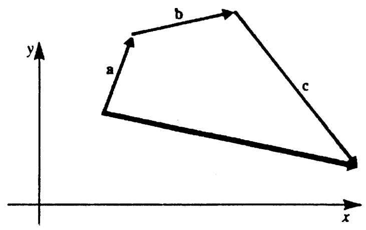
$\vec{v}$ = (v cos α, v sin α)

Hier noch eine kurze Bemerkung zu Übungen. Wenn Übungsaufgaben leicht sind, nützt es wenig, weitere Übungen des gleichen Typs zu rechnen. Dies ist bereits von Ebbinghaus (1885) beobachtet worden. Jede Wiederholung oder Übung trägt um so mehr zur Erhöhung des Behaltenes oder des Verständnisses bei, je größer die subjektiv empfundenen Schwierigkeiten sind. Voraussetzung ist, daß die Aufgabe lösbar bleibt.

Bei den letzten Übungen hier bezogen sich die Aufgaben auf den gesamten Stoff des Kapitels 1. Die Schwierigkeit einer Übung hängt auch vom Kontext ab. Innerhalb einer Reihe gleichartiger Übungen ist eine Übung immer subjektiv leichter als dieselbe Übung in einem neuen Zusammenhang. Man beherrscht eine Rechenoperation oder ein Rechenverfahren erst dann vollständig, wenn man es in jeder Situation, also in unterschiedlichem Kontext, anwenden kann.

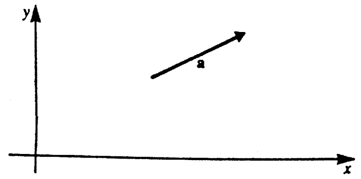
--------------------------------- ▷ 136

44



Man legt wieder die drei Vektoren wie eine Kette aneinander. Der Summenvektor ist durch den Anfangspunkt des ersten und den Endpunkt des letzten Vektors eindeutig bestimmt.

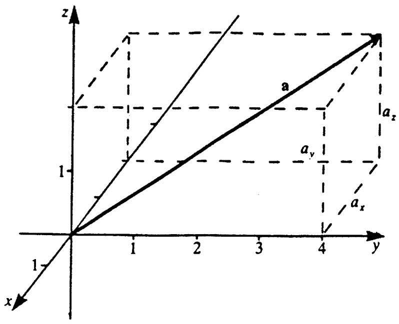
Gegeben sei der Vektor $\vec{a}$. Zeichnen Sie den Vektor $-\vec{a}$



$-\vec{a}$ heißt ....

--------------------------------- ▷ 45

90



Überprüfen Sie anhand der Zeichnung, daß es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Vektorkomponenten addiert werden.

Schwierigkeiten gehabt --------------------------------- ▷ 91

Alles richtig --------------------------------- ▷ 92

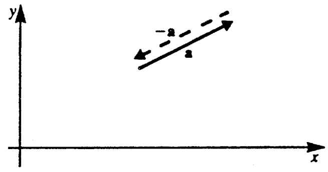
136

Die hier gelernten mathematischen Verfahren und Zusammenhänge werden in der Physik und in der Technik außerhalb des gewohnten mathematischen Kontextes und häufig mit ungewohnter Notierung verwendet.

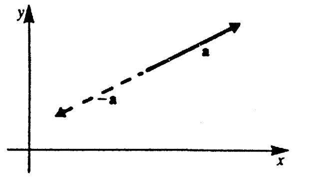
Aus diesem Grunde finden Sie gelegentlich den Wechsel der Notierungen und künftig auch Aufgabenzusammenstellungen, die sich nicht nur auf den gerade vorangegangenen Abschnitt beziehen.

--------------------------------- ▷ 137

45



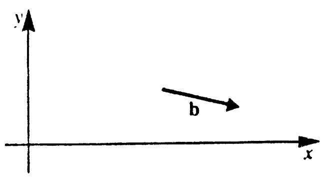
oder



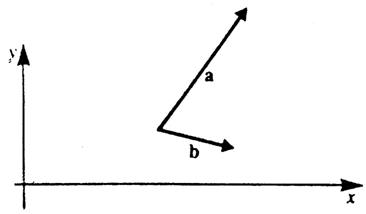
Gegenvektor

Mit Hilfe des Gegenvektors kann die geometrische Subtraktion von Vektoren auf die Addition von Gegenvektoren zurückgeführt werden.

Zeichnen Sie den Gegenvektor $-\vec{b}$



Bilden Sie die Differenz $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



------- ▷ 46

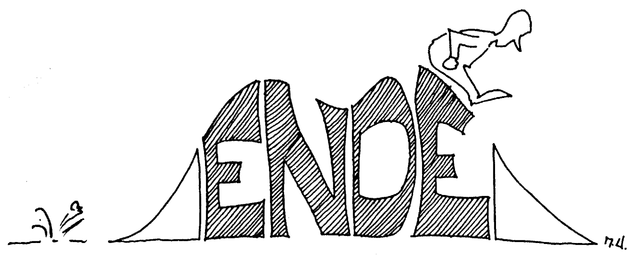
91

Lesen Sie noch einmal im Lehrbuch die Seiten 24 und 25.

Übertragen Sie dabei zunächst alle Aussagen auf den einfacheren zweidimensionalen Fall. Fertigen Sie zu den Abbildungen im Lehrbuch die analogen Zeichnungen für die Ebene (x-y-Koordinatensystem) auf einem separaten Blatt an.

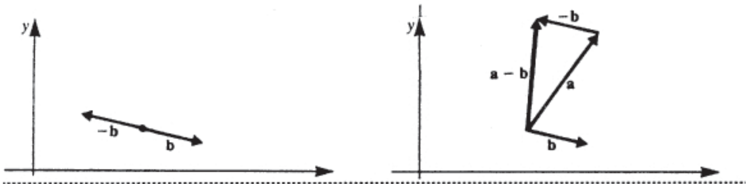
-------------------------------- ▷ 92

137

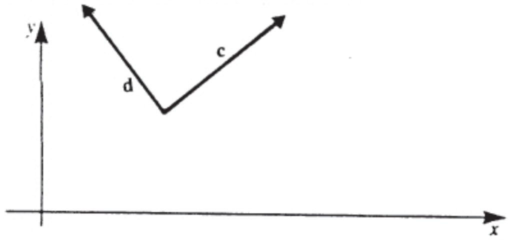


des ersten Kapitels erreicht.

46



Bilden Sie $\vec{c} - \vec{d} = \vec{f}$



--------------------------------- ▷ 47

92

Oft sind neue Schreibweisen und Begriffe zu lernen. Sie sind Grundlage für das Verständnis späterer Abschnitte und Kapitel.

Es wird Ihnen sehr helfen, beim Studium des Lehrbuchs neue Begriffe und ihre Bedeutung stichwortartig auf einem separaten Blatt herauszuschreiben. Dies heißt exzerpieren. Das Ergebnis ist ein Exzerpt. Exzerpte sind gute Grundlagen für spätere Wiederholungen.

--------------------------------- ▷ 93