0

Kapitel 2

Skalarprodukt
Vektorprodukt

1

Liebe Leserinnen und Leser,

auch in diesem Kapitel sind die Lehrschritte im Leitprogramm wie im vorhergehenden angeordnet. Die Lehrschritte sind kapitelweise durchnummeriert.

Der Pfeil unten zeigt auf die Nummer des jeweils folgenden Lehrschritts.

--------------------------------- ▷ 2

41

Das skalare Produkt in Komponentendarstellung

Die Berechnung des inneren Produktes vereinfacht sich sehr, wenn die Komponentendarstellung benutzt wird. Schreiben Sie sich neue Regeln heraus.

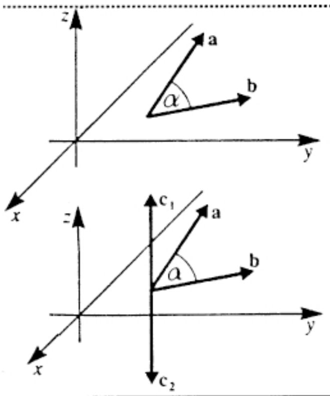
STUDIEREN SIE im Lehrbuch 1.3 Skalares Produkt in Komponentendarstellung
Lehrbuch, Seite 41-42

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt --------------------------------- ▷ 42

81

Vektorproduktor oder äußeres Produkt

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ Hinweis: Des Kreuzes wegen sagt man auch *Kreuzprodukt*.



Die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen in der *x*-*y*-Ebene und schließen den Winkel α ein. Das vektorielle Produkt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ hat folgende Eigenschaften:

1. Betrag $|\vec{c}|$ = ...
2. Die Richtung steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
3. Die Richtung von $\vec{c}$ gemäß der Rechtsschraubenregel ist

☐ $\vec{c}_1$ ☐ $\vec{c}_2$

--------------------------------- ▷ 82

2

Eine nicht nur von Engländern geschätzte Maxime bei der Vorbereitung von Vorträgen lautet:

Tell, what you are going to tell,
tell,
tell, what you have told.

Sinngemäß heißt das:

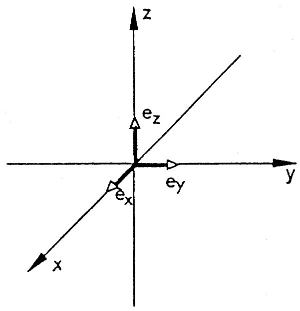
sage am Anfang worum es gehen wird;
sage was zu sagen ist;
sage am Schluß zusammenfassend was Du gesagt hast.

Befolgt man diese Maxime, erleichtert man es dem Zuhörer, etwas zu lernen und zu behalten. Befolgt man diese Maxime, werden die wichtigsten Punkte ... mal wiederholt.

-------------------------------- ▷ 3

42

Gezeichnet sind hier die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen.



Geben Sie an:

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x =$ ....

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y =$ ....

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z =$ ....

$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x =$ ....

$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y =$ ....

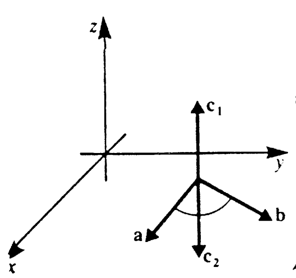
$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z =$ ....

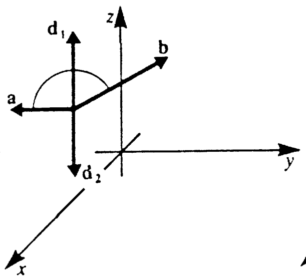
-------------------------------- ▷ 43

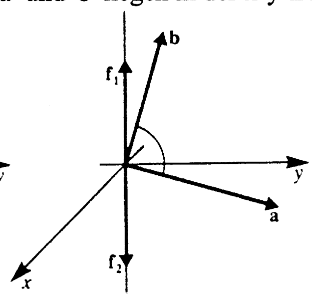
82

$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$ $\qquad$ $\vec{c} = \vec{c}_2$

Geben Sie die Richtung des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ an. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen in der x-y-Ebene.







□ $\vec{c}_1$ □ $\vec{c}_2$ $\qquad$ □ $\vec{d}_1$ □ $\vec{d}_2$ $\qquad$ □ $\vec{f}_1$ □ $\vec{f}_2$ -------- ▷ 83

3

Dreimal

Die Maxime ist aus einem weiteren Grund nützlich. Wenn man die wichtigsten Punkte am Anfang und am Ende wiederholen will, muß man sich darüber klar werden, was die wichtigsten Punkte sind. Man muß Prioritäten setzen.

Genauso nützlich ist es beim Lernen, die wichtigsten Punkte des vorangegangenen Kapitels jeweils vor Beginn des neuen zu wiederholen. Schreiben Sie auf einen Zettel in Stichpunkten – schreiben Sie keine Abhandlung – die Hauptpunkte des letzten Kapitels.

Brechen Sie die Wiederholung nach 6 Minuten ab.

-------------------------------- ▷ 4

43

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$ $\quad$ $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0$

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$ $\quad$ $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$ $\quad$ $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$

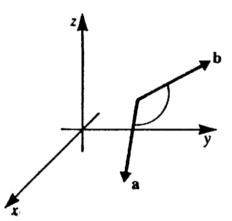
Alles richtig -------------------------------- ▷ 47

Fehler oder Schwierigkeiten -------------------------------- ▷ 44

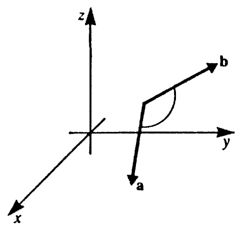
83

$\vec{c}_1$ $\quad$ $\vec{d}_2$ $\quad$ $\vec{f}_1$

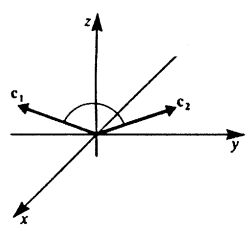
Die Vektoren liegen in der x-y-Ebene. Zeichnen Sie die Richtungen der Vektorprodukte ein.



$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$



$\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$



$\vec{f} = \vec{c}_1 \times \vec{c}_2$

-------------------------------- ▷ 84

4

Ihre Stichworte können sich sehr unterscheiden. Auf Ihrem Zettel könnte stehen:
Vektoren haben Betrag und Richtung; Darstellung durch Pfeile.
Geometrische Addition: Man bildet eine geschlossene Kette.
Geometrische Subtraktion: Addition des Gegenvektors.

Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf einen Vektor $\vec{b}$: Man fällt vom Anfangs- und Endpunkt von $\vec{a}$ die Lote auf die Wirkungslinie von $\vec{b}$.

Komponentendarstellung:
Komponenten sind die Projektionen eines Vektors auf die Koordinatenachsen.

Addition von Vektoren in Komponentendarstellung $\vec{a}+\vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

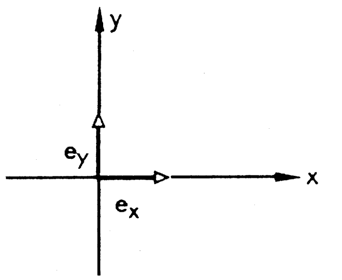
Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$: $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a}$

Betrag eines Vektors $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$: $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

-------------------------------- ▷ 5

44

Betrachten wir die gleiche Überlegung im Zweidimensionalen. Die Einheitsvektoren haben den Betrag 1 und die Richtung der Koordinatenachsen.



$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x$ ist die Multiplikation des Einheitsvektors mit sich selbst. Beide Vektoren haben die gleiche Richtung. Ergebnis $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y$ beide Vektoren stehen senkrecht aufeinander. Ihr inneres Produkt ist daher 0.

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$

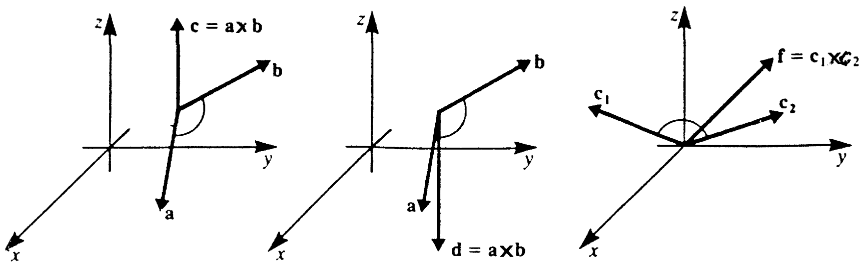
Ergänzen Sie jetzt selbst

$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y =$ ....

$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x =$ ....

-------------------------------- ▷ 45

84



....

Keine Fehler, Rechtsschraubenregel kann angewandt werden ------------------------ ▷ 89

Fehler gemacht oder ausführliche Erläuterung erwünscht ---------------------------- ▷ 85

5

Ihre Formulierungen brauchen nicht mit diesen übereinzustimmen. Ihre Formulierungen können viel knapper sein. Ihre Formulierungen können auch andere Begriffe enthalten wie: freier Vektor, gebundener Vektor, Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, Ortsvektor, Koordinate.

Wichtig ist, daß Sie sich bei dieser Zusammenfassung die Zusammenhänge vergegenwärtigen.

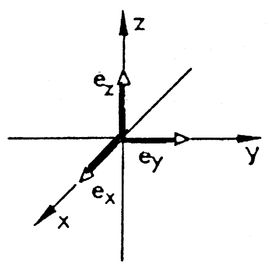
Bevor erfahrene Studenten ein neues Kapitel beginnen, rekapitulieren sie, ob sie das vorhergehende noch im Kopf haben. Das neue Kapitel setzt nämlich voraus, daß man die im vorhergehenden Kapitel dargestellten Sachverhalte gelernt hat.

-------------------------------- ▷ 6

45

$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$

$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0$



Hier noch einmal die Sache im Dreidimensionalen. Geben Sie die Produkte der Einheitsvektoren an:

$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = \ldots\ldots\ldots\ldots$

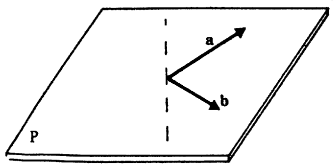
-------------------------------- ▷ 46

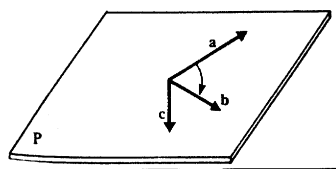
85

Das Ergebnis des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein neuer Vektor $\vec{c}$.

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ definieren eine Ebene. $\vec{c}$ steht senkrecht auf dieser Ebene.

Die Orientierung von $\vec{c}$ wird nach der Rechtsschraubenregel festgelegt.





Handlungsvorschrift: Man drehe den 1. Vektor – hier ist es $\vec{a}$ – auf kürzestem Weg so, daß er auf den 2. Vektor fällt. Die Richtung des Vektorprodukts ist dann diejenige Richtung, in die sich bei dieser Drehung eine Rechtsschraube bewegen würde. Um diese Richtung zu bestimmen, muß man also diese Drehung immer in Gedanken durchführen. Am besten führt man die Bewegung mit der Hand andeutungsweise aus. Dann hat man die Richtung einer Rechtsschraube im Griff.

-------------------------------- ▷ 86

6

Im folgenden Kapitel wird vorausgesetzt, daß Sie wissen, was Sinus und Kosinus eines Winkels sind.

Die meisten werden sich aus der Schule noch daran erinnern, wie sin(α) und cos(α) in einem rechtwinkligen Dreieck definiert sind.

Für diejenigen, für die das nicht zutrifft, folgt eine kurze Erläuterung, die ausreicht das Kapitel zu verstehen.

Erläuterung von sin(α) und cos(α) -------------------------------- ▷ 7

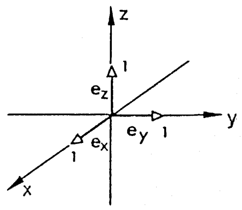
Definition von Sinus und Kosinus bekannt -------------------------------- ▷ 11

46

$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$	Die Vektoren stehen senkrecht aufeinander
$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y = 0$	Die Vektoren stehen senkrecht aufeinander
$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$	Die Vektoren haben die gleiche Richtung

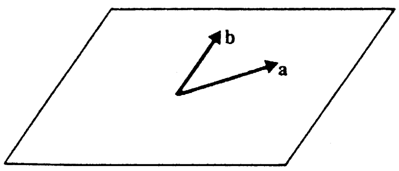
Hinweis:

Vergleichen Sie noch einmal mit der Zeichnung

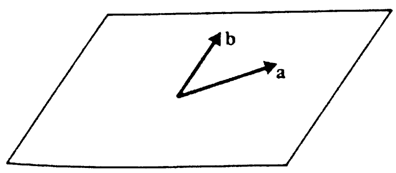


------------------------ ▷ 47

86



Zeichnen Sie die Richtung von $\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$ ein. Wichtig ist es, darauf zu achten, daß immer der im Produkt zuerst stehende Vektor in den zweiten Vektor hineingedreht wird. Das bedeutet nämlich, daß das Produkt von der Reihenfolge der Vektoren abhängt.

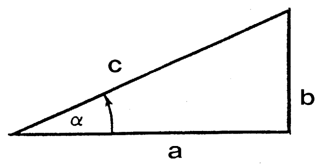


Zeichnen Sie die Richtung von $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$. Hier ist die Reihenfolge der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vertauscht.

-------------------------------- ▷ 87

7

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck. Es heißen



Seite c: Hypothenuse
Seite a: Ankathete
Seite b: Gegenkathete

Sinus und Kosinus des Winkels α sind definiert durch das Verhältnis der Katheten zur Hypothenuse. Das Verhältnis hängt nur vom Winkel ab, nicht von der Größe des Dreiecks.

Definition des Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypothenuse}}$

Definition des Kosinus: $\cos(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypothenuse}}$

Schreiben Sie, bitte, die Definition mit der Zeichnung auf einen Merkzettel, auf den Sie noch zurückgreifen werden. -------------------------------- ▷ 8

47

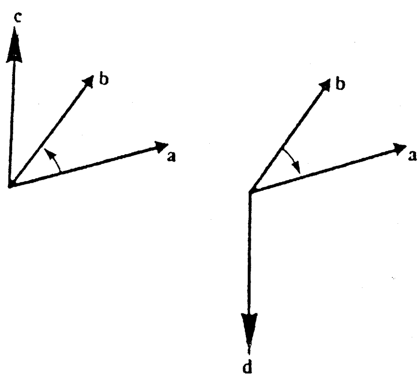
Gegeben sei $\vec{a} = (1, 4)$

$\vec{b} = (3, 1)$

Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ....

-------------------------------- ▷ 48

87



Die Richtung des Vektorprodukts hängt von der Reihenfolge der Faktoren ab.

Das ist anders als beim inneren Produkt. Für das innere Produkt gilt:

$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{a})$

Für das vektorielle Produkt gilt:

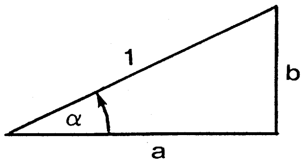
$\vec{a} \times \vec{b} =$ ....

-------------------------------- ▷ 88

8

Die Werte für $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ bestimmt man mit dem Taschenrechner oder entnimmt sie Tabellen.

Sehr einfach ist es, Dreiecke zu betrachten, deren Hypothenuse die Länge 1 hat. Dann können Sie angeben:



$\sin(\alpha) =$ ....

$\cos(\alpha) =$ ....

--------------------------------- ▷ 9

48

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 7$

Gegeben sei

$\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$
$\vec{c} = (c_x,\ c_y,\ c_z)$

Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{c} =$ ....

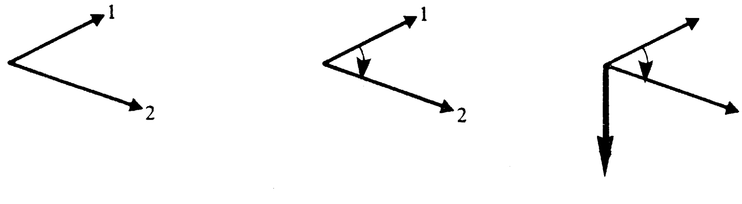
--------------------------------- ▷ 49

88

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Bei der Ermittlung der Richtung des Vektorprodukts also so vorgehen:

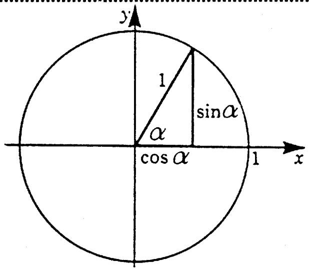
1. Ersten Vektor suchen.
2. Ersten Vektor auf kürzestem Weg in den zweiten Vektor hineindrehen.
3. Die Drehung als Drehung einer Rechtsschraube auffassen. Die Bewegung der Rechtsschraube ist die Richtung des Produkts.



--------- ▷ 9

9

$sin(\alpha) = b$
$cos(\alpha) = a$

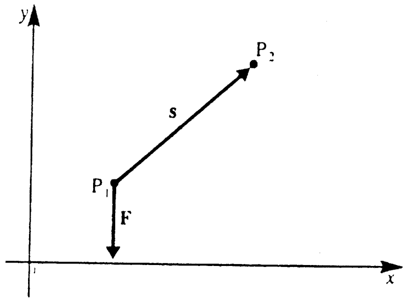


Ein Kreis mit dem Radius 1 wird Einheitskreis genannt.
Die Projektion des Radius auf die x-Achse hat den Betrag: $\cos(\alpha)$.
Die Projektion des Radius auf die y-Achse hat den Betrag: $\sin(\alpha)$.

Hinweis: Wenn wir in der Figur den Punkt P in den zweiten Quadranten wandern lassen, wird α größer als 90° und der Kosinus wird negativ.
Übertragen Sie die Figur auf Ihren Merkzettel. --------------------------------- ▷ 10

49

$\vec{a} \cdot \vec{c} = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z$



Eine Masse wird von P_1 nach P_2 bewegt.

Kraft: $\vec{F} = (0, -5\text{N})$

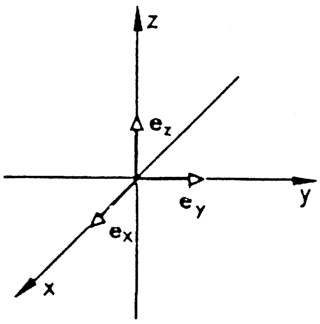
Ortsverschiebung: $\vec{s} = (3\text{m}, 3\text{m})$

Gesucht: Arbeit bei Ortsveränderung von P_1 nach P_2

$W = \vec{F} \cdot \vec{s} =$ ....

--------------------------------- ▷ 50

89



Hier ist ein räumliches Koordinatensystem. Eingezeichnet sind die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen. Das vektorielle Produkt

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y$ hat den Betrag .....

Wir können diese Aufgabe sogar vollständig lösen und die Richtung des Produktvektors angeben:

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y =$ ....

--------------------------------- ▷ 90

10

Kennt man in einem rechtwinkligen Dreieck den Winkel α und die Hypothenuse, lassen sich Ankathete und Gegenkathete ausrechnen.

Gegenkathete: $b = c \cdot \sin(\alpha)$

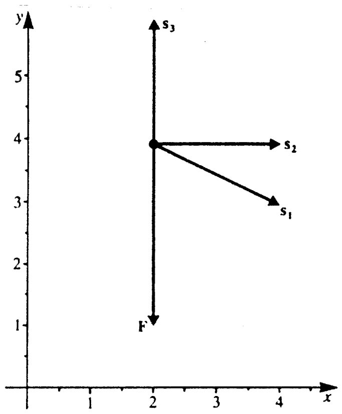
Ankathete: $a = c \cdot \cos(\alpha)$

Auch diese Umformung sollten Sie auf Ihr Merkblatt schreiben. Das Merkblatt werden Sie brauchen, wenn Sie das Kapitel studieren.

▷ 11

50

$W = 0 \cdot 3\text{m} + (-5\text{N} \cdot 3\text{m}) = -15\text{Nm}$ Hinweis: Der Körper verliert Energie.



Gegeben ist die Kraft $\vec{F} = (0, -5\text{N})$.
Berechnen Sie die Arbeit für die Ortsverschiebungen

$\vec{s}_1 = (2\text{m}, \ -1\text{m})$

$\vec{s}_2 = (2\text{m}, \ 0\text{m})$

$\vec{s}_3 = (0\text{m}, \ 2\text{m})$

$W_1 = \vec{F} \cdot s_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$W_2 = \vec{F} \cdot s_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

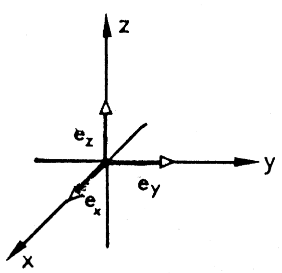
$W_3 = \vec{F} \cdot s_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 51

90

$|\vec{e}_x \times \vec{e}_y| = 1$

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$



Geben Sie das Vektorprodukt der Einheitsvektoren an:

$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\vec{e}_x \times \vec{e}_z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 91

11

Das Skalarprodukt

Jetzt folgt zunächst die Arbeit mit dem Lehrbuch. Rechnen Sie die Umformungen auf einem Zettel mit. Schreiben Sie sich neue Begriffe und Rechenregeln heraus.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 2.1 Das Skalarprodukt
2.2 Kosinussatz
Lehrbuch, Seite 37-41

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt ▷ 12

51

$W_1 = 5\,\text{Nm}$
$W_2 = 0$
$W_3 = -10\,\text{Nm}$

Alles richtig ▷ 57

Weitere Übungen erwünscht oder Fehler gemacht ▷ 52

91

$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$ (Umkehrung von $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$)
$\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$
$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = \vec{e}_x$

Alles richtig ▷ 95

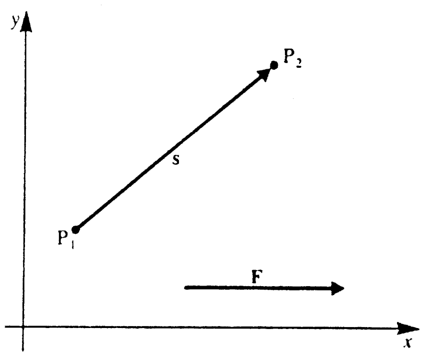
Fehler gemacht oder Erläuterung gewünscht ▷ 92

12

Das innere oder .... Produkt zweier Vektoren läßt sich angeben, wenn von beiden Vektoren die .... und der .... gegeben ist.

---------------------------------- ▷ 13

52



Betrachten wir eine Kraft $\vec{F}$

$\vec{F} = (F_x, F_y)$

$= (20\text{N}, 0)$

Die Kraft greife an einem Gegenstand an, der von P_1 nach P_2 bewegt werde. Die Ortsverschiebung $\vec{s}$ habe die Komponenten $\vec{s}_x$, $\vec{s}_y$

$\vec{s} = (s_x, s_y)$

$= (2\text{km}, 2\text{km})$

Es könnte sich hier also um einen Radfahrer handeln, der bei schräg von hinten kommendem Wind von P_1 nach P_2 fährt. Die vom Wind geleistete Arbeit ist dann:

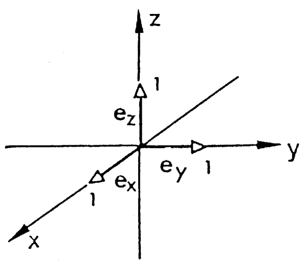
$\vec{F} \cdot \vec{s} =$ ....

---------------------------------- ▷ 53

92

Der Umgang mit Einheitsvektoren will geübt sein. Auch hier handelt es sich vor allem um die Richtungsbestimmung. Das vektorielle Produkt von Einheitsvektoren ist wieder ein Einheitsvektor. Die Vektoren haben den Betrag 1. Sie stehen aufeinander senkrecht. Also ergibt das vektorielle Produkt wieder einen Vektor vom Betrag 1.

Die Richtung gibt uns die Rechtsschraubenregel.



$\vec{e}_z \times \vec{e}_y =$ ....

$\vec{e}_z \times \vec{e}_x =$ ....

$\vec{e}_z \times \vec{e}_z =$ ....

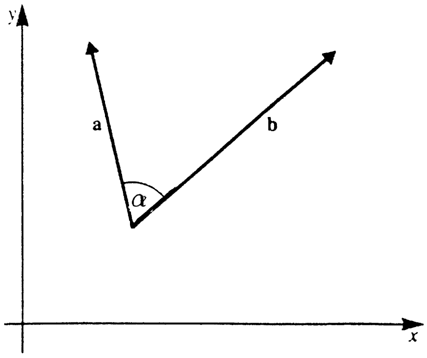
$\vec{e}_y \times \vec{e}_x =$ ....

$\vec{e}_y \times \vec{e}_y =$ ....

---------------------------------- ▷ 93

13

skalare Produkt
Beträge
eingeschlossene Winkel



Geben Sie die Formel für das innere Produkt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus dem Gedächtnis an:

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ....

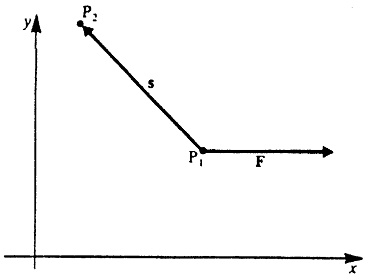
------------------------------- ▷ 14

53

$\vec{F} \cdot \vec{s} = (F_x\, s_x + F_y\, s_y)$

$= (20\text{ N} \cdot 2\text{ km} + 0\text{ N} \cdot 2\text{ km})$
$= 40\text{ N km}$
$= 40\,000\text{ N m}$

Hinweis: Der Radfahrer – das betrachtete System – hat Arbeit gewonnen. Das wird positiv gezählt.



Betrachten wir eine andere Ortsveränderung $\vec{s}$ bei gleicher Windkraft.

$\vec{F} = (20\text{N}, 0)$

$\vec{s} = (-2\text{ km}, 2\text{ km})$

Die vom Wind geleistete Arbeit ist dann:

$\vec{F} \cdot \vec{s} =$ ....

------------------------------- ▷ 54

93

$\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$

$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$

$\vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0$

$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$

$\vec{e}_y \times \vec{e}_y = 0$

Hinweis: Zwei Vektoren stehen nicht senkrecht aufeinander, weil zweimal ein Vektor mit sich selbst multipliziert wird. Daher ist das äußere Produkt = 0.

Weitere Erläuterungen erwünscht ------------------------------- ▷ 94

Keine Fehler ------------------------------- ▷ 95

14

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$

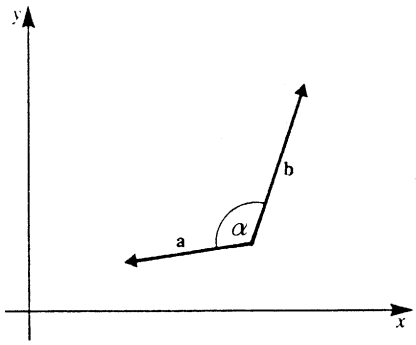
Das skalare Produkt zweier Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ ist gleich dem Produkt von

Vektor $\bar{a}$ mit der

Projektion von . . . .

auf . . . .

Ergänzen Sie die Skizze so, daß sie den Satz darstellt.

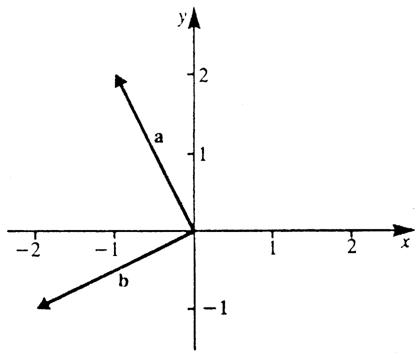


-------------------------------- ▷ 15

54

$\vec{F} \cdot \vec{s}$ = - 40 N km
= - 40 000 Nm

Hinweis: Der Radfahrer hat Arbeit abgegeben. Das wird negativ gezählt.



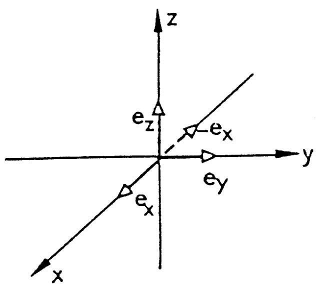
$\vec{a} = (-1, 2)$
$\vec{b} = (-2, -1)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ . . . .

-------------------------------- ▷ 55

94

Betrachten wir die Aufgabe $\vec{e}_z \times \vec{e}_y =$ . . . .



In dem Koordinatensystem muß $\vec{e}_z$ in $\vec{e}_y$ gedreht werden. Eine Rechtsschraube würde sich in Richtung der negativen x-Achse fortbewegen. Der Vektor $\vec{e}_z \times \vec{e}_y$ zeigt in die Richtung der negativen x-Achse. Da er den Betrag 1 hat, ist es ein Einheitsvektor. Der Einheitsvektor $\vec{e}_x$ zeigt in Richtung der positiven x-Achse. Wir müssen also den Gegenvektor bilden. Daraus ergibt sich:

$\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$

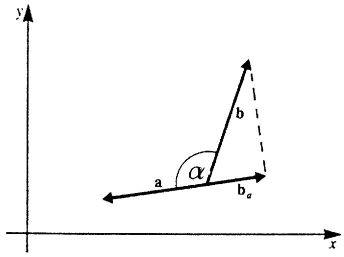
-------------------------------- ▷ 95

15

Das skalare Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich dem Produkt von

Vektor $\vec{a}$ mit der

Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.



Im obigen Beispiel ist das Vorzeichen des Skalarproduktes

☐ positiv

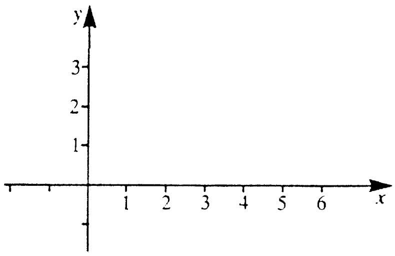
☐ negativ

▷ 16

55

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 2 = 0$

Zeichnen Sie die beiden Vektoren $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = (-1, 4)$ in das Koordinatensystem ein. Die beiden Vektoren stehen .... aufeinander.



▷ 56

95

Und hier geht es weiter.

$|\vec{a}| = 4$

$|\vec{b}| = 2$

$\alpha = 30°$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \ldots\ldots$

φ	α	cos α cos φ	sin α sin φ
0 = 0,00	0°	1	0
$\frac{\pi}{6}$ = 0,52	30°	0,87	0,5
$\frac{\pi}{4}$ = 0,78	45°	0,71	0,71
$\frac{\pi}{3}$ = 1,05	60°	0,50	0,87
$\frac{\pi}{2}$ = 1,56	90°	0	1

▷ 96

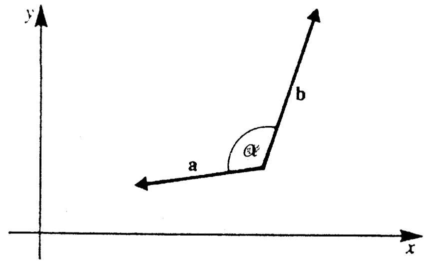
16

Negativ. Hinweis: $\cos\alpha$ ist negativ, weil $\alpha > 90°$. Die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ hat entgegengesetzte Richtung zu $\vec{a}$.

Das skalare Produkt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist auch gleich dem Produkt von

Vektor $\vec{b}$ mit der Projektion
von .... auf ....

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind die gleichen wie im vergangenen Beispiel. Ergänzen Sie die Skizze für diesen Fall.



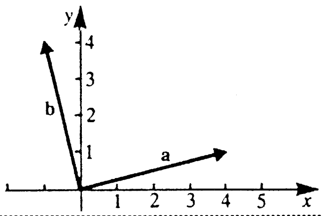
Skalarprodukt der beiden Vektoren

☐ positiv ☐ negativ

---------------------------------- ▷ 17

56

Senkrecht



Schreiben Sie aus dem Gedächtnis die Formel für das innere Produkt der beiden Vektoren

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$

$\vec{F} \cdot \vec{s} = ...$

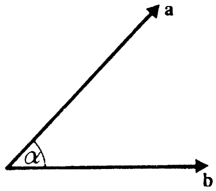
Prüfen Sie im Zweifel selbst anhand des Lehrbuches, ob Ihre Formel richtig ist.

---------------------------------- ▷ 57

96

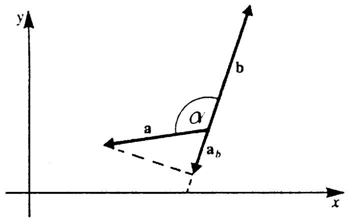
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$$
$$= 4 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 4$$

Der Betrag des vektoriellen Produkts hat eine geometrische Bedeutung. Es ist ein Flächeninhalt. Zeichnen Sie die durch $\vec{a} \times \vec{b}$ gegebene Fläche!



---------------------------------- ▷ 97

17



negativ

....

Entscheiden Sie selbst:

Alles richtig --------------------------------- ▷ 23

Fehler gemacht oder ausführliche Erläuterung erwünscht ----------------------------- ▷ 18

57

Vom Vektor $\vec{c}$ sind die Komponenten gegeben:

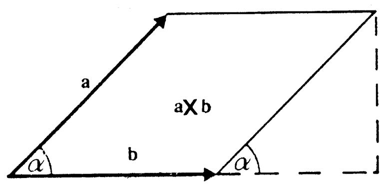
$\vec{c} = (3, 2, -2)$

$\vec{c}$ hat den Betrag

$c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 58

97



Die Formel $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$ *sin* α ist wichtig. Man kann sie auf zweierlei Weise lernen:

1. Man lernt die geometrische Bedeutung. $\vec{a} \times \vec{b}$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
   Oder man prägt sich die Bedeutung anhand des Drehmomentes ein.
   Dann kann man sich anhand dieser Bedeutung durch wenige Überlegungen die Formel immer rekonstruieren.
2. Man prägt sich die Formel gedächtnismäßig ein.

Das erste Verfahren ist Lernen mit Einsicht. Das zweite Verfahren ist Auswendiglernen. Lernen mit Einsicht ist sicherer. -------------------------------- ▷ 98

18

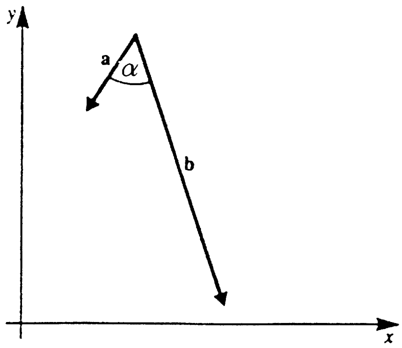
Um das innere Produkt zu verstehen, muß man wissen, was die Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf einen Vektor $\vec{b}$ oder die Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ ist.

1. Gegeben seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Zeichnen Sie die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$: $\vec{a}_b$

   $\vec{a}_b$ hat den Betrag $a_b =$ ....

2. Zeichnen Sie die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$: $\vec{b}_a$

   $\vec{b}_a$ hat den Betrag b_a = ...



▷ 19

58

$\vec{c} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$

Berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren

$\vec{a}$ = (3, -2)

$\vec{b}$ = (1, 1,5)

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ = ...

Welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander ein?

α = ...

▷ 59

98

Das äußere Produkt hat den Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = ...

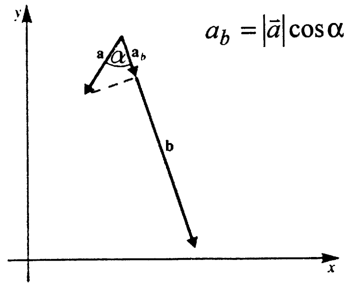
Das innere Produkt ist ein Skalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = ...

Versuchen Sie beide Formeln aus ihren Bedeutungen heraus abzuleiten.

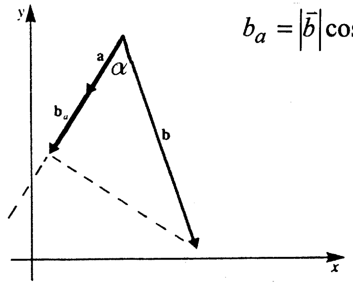
▷ 99

19

1) $a_b = |\vec{a}| \cos \alpha$



2) $b_a = |\vec{b}| \cos \alpha$



Die Länge der Projektion eines Vektors hängt vom eingeschlossenen Winkel ab. Der projizierte Vektor wird um den Faktor $\cos \alpha$ verkürzt. Ist der eingeschlossene Winkel größer als 90°, hat der Kosinus .... Vorzeichen.

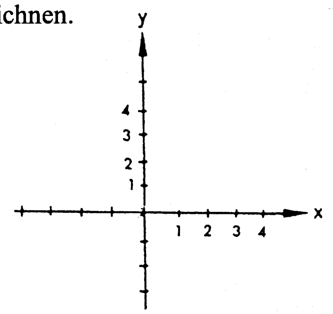
-------------------------------- ▷ 20

59

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\qquad \alpha = 90°$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander.

Überprüfen Sie das Ergebnis geometrisch, indem Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in das Koordinatensystem einzeichnen.



$\vec{a} = (3, -2,)$

$\vec{b} = (1, 1{,}5)$

-------------------------------- ▷ 60

99

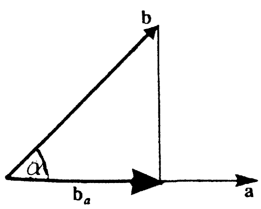
$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \, sin\ \varphi$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$

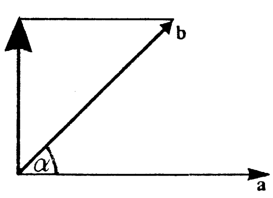
Die zwei Konstruktionen unten zeigen noch einmal inneres und äußeres Produkt.

Inneres Produkt: $\vec{a}$ mal Betrag der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

Äußeres Produkt. $\vec{a}$ mal Betrag der Projektion von $\vec{b}$ auf die Senkrechte zu $\vec{a}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ .... $\qquad |\vec{a} \times \vec{b}| =$ ....





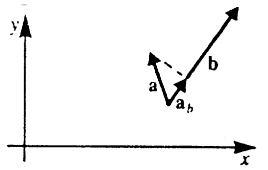
-------------- ▷ 100

20

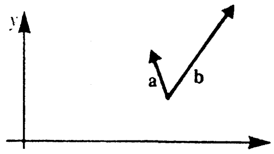
negatives

Bestimmung des inneren Produkts:

- Wir wählen $\vec{b}$ als Bezugsvektor und projizieren $\vec{a}$ auf $\vec{b}$
- Wir bilden das Produkt aus dem Betrag von $\vec{b}$ und dem Betrag der Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$.

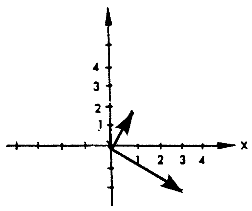


Hinweis: Auch $\vec{a}$ kann Bezugsvektor sein.
Ergänzen Sie die Zeichnung mit $\vec{a}$ als Bezugsvektor.



▷ 21

60



Das innere Produkt verschwindet für Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen. Dieses macht man sich zunutze, wenn man *überprüfen* möchte, ob zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Man bildet das innere Produkt und prüft, ob es verschwindet.

Gegeben sei $\vec{a} = (a_x, a_y)$ Senkrecht auf $\vec{a}$ stehen:

$\vec{a}_1 = (-a_x, -a_y)$

$\vec{a}_2 = (-a_x, +a_y)$ ....

$\vec{a}_3 = (a_y, -a_x)$

$\vec{a}_4 = (-a_y, a_x)$

▷ 61

100

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

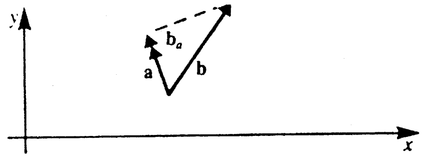
Aufgrund einfacher Überlegungen können die folgenden Fragen beantwortet werden:

$\vec{a} \times \vec{a} =$ ....

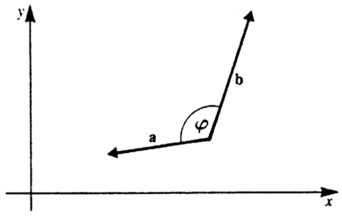
$\vec{a} \cdot \vec{a} =$ ....

▷ 101

21



Bilden Sie die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$:



▷ 22

61

Senkrecht auf $\vec{a}$ stehen $\vec{a}_3$ und $\vec{a}_4$.

Gegeben sei $\vec{F} = (1\text{ N}, -1\text{ N}, 2\text{ N})$

Welche Ortsvektoren stehen senkrecht auf $\vec{F}$?

$$\vec{s}_1 = (2\text{m}, 1\text{m}, 1\text{m})$$
$$\vec{s}_2 = (-1\text{m}, 1\text{m}, 1\text{m})$$
$$\vec{s}_3 = (1\text{m}, 1\text{m}, -2\text{m})$$
$$\vec{s}_4 = (3\text{m}, 1\text{m}, -1\text{m})$$

Senkrecht auf $\vec{F}$ stehen: ....

▷ 62

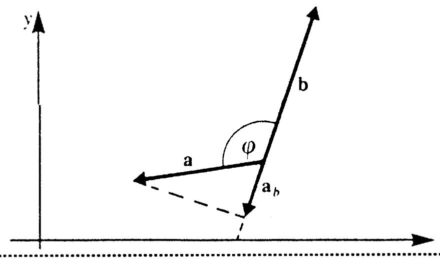
101

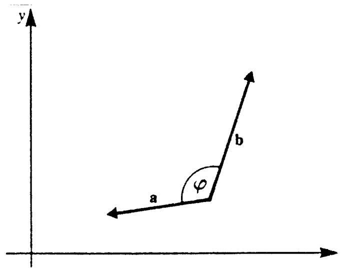
$\vec{a} \times \vec{a} = 0$
$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{a}$ hat einen Namen. Es ist ein .... Vektor.

▷ 102

22



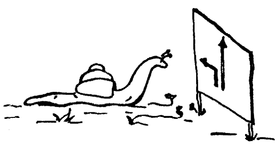


Bilden Sie die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ analog und prüfen Sie nun selbst, ob alles richtig ist:

-------------------------------- ▷ 23

62

$\vec{s}_2$; $\vec{s}_4$

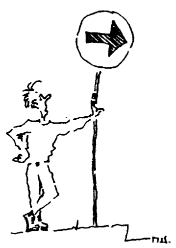


Alles richtig -------------------------------- ▷ 65

Hilfe und Erläuterungen erwünscht -------------------------------- ▷ 63

102

Nullvektor



-------------------------------- ▷ 103

23

In der Literatur wechseln die Symbole für das skalare Produkt: Drei der unten angeführten Bezeichnungen sind Bezeichnungen für das skalare Produkt. Suchen Sie die richtigen Bezeichnungen heraus.

☐ $\vec{a} \cdot \vec{b}$

☐ $[\vec{a}, \vec{b}]$ ☐ $\vec{a} \times \vec{b}$

☐ $<\vec{a}, \vec{b}>$ ☐ $(\vec{a}, \vec{b})$

--------------------------------- ▷ 24

63

Das innere Produkt von Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, ist 0. Diesen Satz benutzen wir für die Prüfung, ob $\vec{F}$ und $\vec{s}$ senkrecht aufeinander stehen.

Gegeben sei $\vec{F} = (1\text{N}, -1\text{N}, 2\text{N})$

Gefragt ist, ob $\vec{s} = (2\text{m}, 1\text{m}, 1\text{m})$ senkrecht auf $\vec{F}$ steht.

Prüfung: Wir bilden das innere Produkt:

$\vec{F} \cdot \vec{s} = 2\text{Nm} - 1\text{Nm} + 2\text{Nm} = 3\text{Nm}$

Ergebnis: Das innere Produkt ist nicht 0. Also steht $\vec{F}$ nicht senkrecht auf $\vec{s}$.

--------------------------------- ▷ 64

103

Jetzt ist wieder eine kurze Pause angebracht. Sie wissen doch noch, vor Beginn der Pause sollten Sie zwei Dinge tun:

1. ....

2. ....

--------------------------------- ▷ 104

24

$\vec{a}\cdot\vec{b}$; $(\vec{a},\vec{b})$; $<\vec{a},\vec{b}>$

Ein Gegenstand wird um den Weg $\vec{s}$ verschoben. Dabei greift an ihm die Kraft $\vec{F}$ an. Gesucht ist die von $\vec{F}$ geleistete Arbeit. Maßeinheiten sind anzugeben.

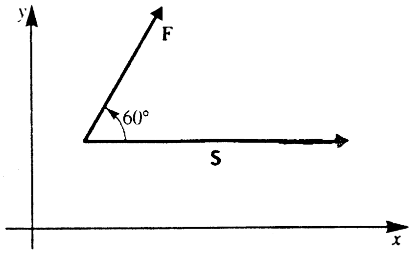
Gegeben: Kraft $|\vec{F}|: \vec{F} = 6N$

Weg $|s|: \vec{s} = 2\text{m}$

eingeschlossener Winkel $\alpha = 60°$

Die Arbeit beträgt $\vec{F}\cdot\vec{s} =$ ....

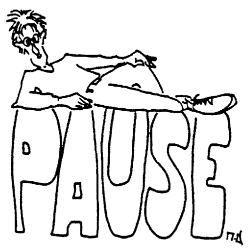
Hinweis: $\cos 60° = 0{,}5$



▷ 25

64

In dieser Weise müssen wir für jeden der vier Vektoren der Aufgabe prüfen, ob $\vec{F}\cdot\vec{s} = 0$ ist. Dann und nur dann stehen $\vec{F}$ und $\vec{s}$ senkrecht aufeinander. Es sei denn, einer der Vektoren ist ein Nullvektor. Im Raum gibt es beliebig viele verschiedene Vektoren, die auf $\vec{F}$ senkrecht stehen können.

Kleine 

▷ 65

104

1. Wiederholen, ob Inhalt des Arbeitsabschnittes verstanden ist.
2. Ende der Pause festlegen oder festlegen, wann mit der Arbeit fortgefahren wird.

Beides muß zur Gewohnheit werden. Nicht nur hier, sondern überall, wo Sie ein Lehrbuch planmäßig studieren.

- Zählen Sie in Gedanken die Stichworte des bearbeiteten Abschnitts auf.
- Schreiben Sie auf einen Zettel, wann Sie mit der Arbeit fortfahren werden.

NACH DER PAUSE ▷ 105

25

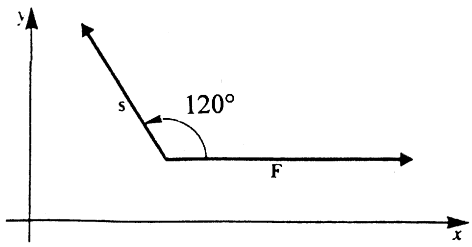
$\vec{F} \cdot \vec{s} = 6\ N \cdot 2m \cdot \cos 60^\circ = 6\ Nm$

....

$F = 6$ N
$s = 2$ m
Eingeschlossener Winkel 120°

Gesucht ist die von $\vec{F}$ geleistete Arbeit:

$\vec{F} \cdot \vec{s} =$ ....



-------------------------------- ▷ 26

65

Das Vektorprodukt
Das Drehmoment
Das Drehmoment als Vektor

Hinweis: Wer den Sinus erst im Leitprogramm kennengelernt hat, sollte seinen Merkzettel während der Arbeit mit dem Lehrbuch benutzen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 2.4 Das Vektorprodukt
2.4.1 Das Drehmoment
2.4.2 Das Drehmoment als Vektor
Lehrbuch, Seite 43-44

BEARBEITEN SIE danach -------------------------------- ▷ 66

105

Ja, nun geht es weiter. Vergleichen Sie Zeit und Datum des Arbeitsbeginns jetzt mit dem Termin auf Ihrem Zettel.

-------------------------------- ▷ 106

26

$F \cdot s = -6$ Nm

....

Entscheiden Sie selbst:

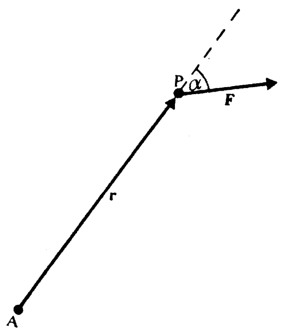
Alles richtig --------------------------------- ▷ 31

Bezeichnungen unklar, Erläuterungen erwünscht --------------------------------- ▷ 27

Begriff der mechanischen Arbeit unklar, Erläuterungen erwünscht ------------------- ▷ 29

66

Die Kraft $\vec{F}$ greife im Punkt P an einem Körper an, der sich um die Achse A drehen kann. $\vec{F}$ und $\vec{r}$ schließen den Winkel α ein. Um das Drehmoment zu ermitteln, wird die Kraft in eine Komponente senkrecht zu $\vec{r}$ und in eine Komponente in Richtung von $\vec{r}$ zerlegt.



Zeichnen Sie in die Skizze beide Komponenten von $\vec{F}$ ein.

Die zu $\vec{r}$ senkrechte Komponente hat die Größe $|\vec{F}_s| =$ ....

--------------------------------- ▷ 67

106

Allgemeine Fassung des Hebelgesetzes

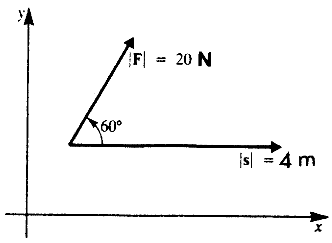
STUDIEREN SIE im Lehrbuch 3.4.7 Allgemeine Fassung des Hebelgesetzes
Lehrbuch, Seite 46-47

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt --------------------------------- ▷ 107

27

Für alle Größen in der Physik und Technik muß man Maßzahl und Maßeinheit angeben. Bei Vektoren kommt die Richtungsangabe hinzu. Die Maßeinheiten werden bei den Rechenoperationen als Faktoren mitgeführt.

Beispiele:	Kraft	: Newton
	Geschwindigkeit	: m/s; km/h
	Ortsveränderung	: mm, m
	Elektrische Feldstärke	: V/m



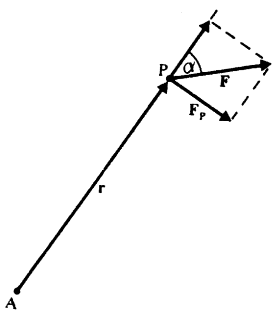
Die Kraft habe einen Betrag von 20 N. Die Ortsveränderung ist durch den Vektor $\vec{s}$ gekennzeichnet. Betrag der Ortsveränderung 4 m. Der eingeschlossene Winkel betrage 60°. (cos 60° = 0,5)

Von der Kraft geleistete Arbeit: W = ...

-------------------------------- ▷ 28

67

$$|\vec{F}_s| = |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$$



Die Komponente von $\vec{F}$ in Richtung von $\vec{r}$ trägt zum Drehmoment nichts bei. Es braucht nur die Komponente $\vec{F}_S$ berücksichtigt zu werden. Daraus ergibt sich der Betrag für das *Drehmoment* oder kurz *Moment* zu

$M =$ ....

-------------------------------- ▷ 68

107

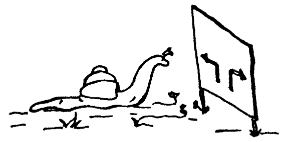
Der kleine Abschnitt im Lehrbuch sollte zeigen, wie elegant sich der allgemeine Fall des Hebelgesetzes darstellen läßt.

-------------------------------- ▷ 108

28

$W = 20N \cdot 4m \cdot 0{,}5 = 40Nm$

Das wichtigste war hier, die Maßeinheiten nicht zu vergessen.

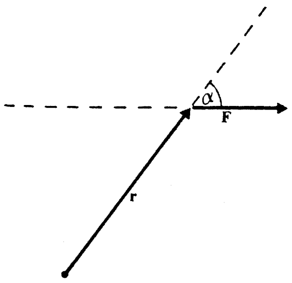


Begriff der mechanischen Arbeit unklar, Erläuterungen erwünscht ------------------ ▷ 29

Keine Schwierigkeiten -------------------------------- ▷ 31

68

$M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha$



Zeichnen Sie in die Skizze die Zerlegung von $\vec{r}$ in eine Komponente senkrecht zu $\vec{F}$ und eine Komponente parallel zu $\vec{F}$ ein. Die Komponente senkrecht zu $\vec{F}$ hat den Betrag

$r_s =$ ....

-------------------------------- ▷ 69

108

Vektorprodukt in Komponentendarstellung

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 2.5 Vektorprodukt in Komponentendarstellung
Lehrbuch Seite 47-48

Rechnen Sie dabei die Umformungen auf einem Zettel mit. Sie wissen doch, gerade unübersichtliche Rechnungen versteht man besser, wenn man sie mitrechnet.

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt -------------------------------- ▷ 109

29

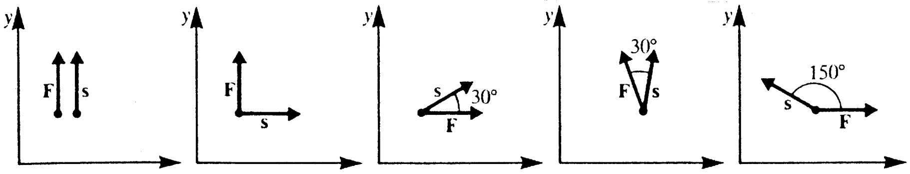
Die physikalische Arbeit ist das Produkt aus

Weg und Kraftkomponente in Richtung des Weges oder, das ist gleichwertig,

Kraft und Wegkomponente in Richtung der Kraft.

Man zählt die Arbeit positiv, wenn Kraft und Weg gleiche Richtung haben. Dies entspricht der Rechenvorschrift des inneren Produkts. Daher nennt man das innere Produkt auch Arbeitsprodukt. Berechnen Sie jeweils die von der Kraft geleistete Arbeit.

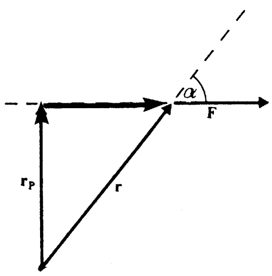
$F = 1N$, $s = 1\text{m}$ $\cos 30^\circ = 0{,}87$



$W_1 = \ldots.$ $W_2 = \ldots.$ $W_3 = \ldots.$ $W_4 = \ldots.$ $W_5 = \ldots.$ ---- ▷ 30

69

$r_s = |\vec{r}| \, sin\, \alpha$



Auch durch diese Überlegung wird das Problem auf den Sonderfall zurückgeführt, daß Kraft und wirksamer Hebelarm senkrecht aufeinander stehen. Auch hier ergibt sich der Betrag für das Drehmoment zu

$M = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 70

109

Berechnen Sie anhand des Lehrbuchs oder Ihrer Aufzeichnungen das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ für

$\vec{a} = (2, 1, 1)$

$\vec{b} = (-1, 2, 1)$

$\vec{a} \times \vec{b} = = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 110

30

$W_1 = 1$ Nm; $W_2 = 0$; $W_3 = 0{,}87$ Nm; $W_4 = 0{,}87$ Nm; $W_5 = -0{,}87$ Nm

Hinweis: Positives Vorzeichen der Arbeit bedeutet: Der Körper, an dem die Kraft angreift, gewinnt Energie.
Negatives Vorzeichen bedeutet, der Körper, an dem die Kraft angreift, verliert Energie.

--------------------------------- ▷ 31

70

$M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \; sin\ \alpha$

....

Bei der Berechnung des Drehmoments werden die Vektoren nicht als freie Vektoren betrachtet. Sie dürfen nur in ihrer *Wirkungslinie* verschoben werden.

Parallelverschiebung der Vektoren ist hier *nicht* erlaubt.

Das Drehmoment ist ein
- ☐ Skalar
- ☐ Vektor

--------------------------------- ▷ 71

110

$$\vec{a} \times \vec{b} = (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1)\ \vec{e}_x + (-1 - 2)\ \vec{e}_y + (4 + 1)\ \vec{e}_z$$
$$= -1\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$$

In Komponentenschreibweise übertragen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

--------------------------------- ▷ 111

31

Das innere oder skalare Produkt ist eine Rechenoperation, die hier zunächst anhand eines Beispiels aus der Physik, nämlich der Ermittlung der Arbeit, gewonnen wurde. Häufig finden Sie in der Literatur auch den Namen *Arbeitsprodukt* anstatt *inneres Produkt.*

Gegeben $|\vec{a}| = 2$

$|\vec{b}| = 1$

eingeschlossener Winkel α

$\alpha = 45°$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} =$ ....

$\alpha = 135°$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} =$ ....

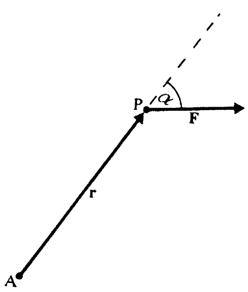
Hinweis: $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$

φ	α	$\cos\alpha$ $\cos\varphi$	$\sin\alpha$ $\sin\varphi$
$0 = 0{,}00$	0°	1	0
$\frac{\pi}{6} = 0{,}52$	30°	0,87	0,5
$\frac{\pi}{4} = 0{,}78$	45°	0,71	0,71
$\frac{\pi}{3} = 1{,}05$	60°	0,50	0,87
$\frac{\pi}{2} = 1{,}56$	90°	0	1

-------------------------------- ▷ 32

71

Vektor



Berechnen Sie das Drehmoment.

Betrag: $M =$ ....

Richtung von $\vec{M}$:

1. $\vec{M}$ steht .... auf $\vec{r}$ und $\vec{F}$.
2. Dreht man $\vec{r}$ im Sinn einer Rechtsschraube so, daß $\vec{r}$ auf $\vec{F}$ fällt, bewegt sich die Rechtsschraube in die Richtung von ....

-------------------------------- ▷ 72

111

$\vec{a} \times \vec{b} = (-1, -3, 5)$

Ein Körper rotiere um die x-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$

Welche Geschwindigkeit hat der Punkt $P = (1, 1, 0)$?

Hinweis: Es gilt $\quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Dabei ist $\vec{r}$ der Ortsvektor zum Punkt P.

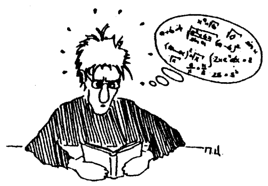
$\vec{v} =$ ....

-------------------------------- ▷ 112

32

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot 0{,}71 = 1{,}42$

$a \cdot b = 2 \cdot 1 \cdot \cos 135^\circ = 2 \cdot (-\cos 45^\circ) = -2 \cdot 0{,}71 = -1{,}42$



Alles richtig --------------------------------- ▷ 36

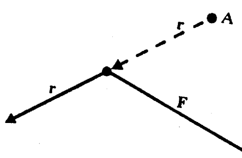
Erläuterung gewünscht oder Fehler gemacht --------------------------------- ▷ 33

72

$M = |\vec{r}||\vec{F}|\, sin\ \alpha$; senkrecht; $\vec{M}$

Die Rechtsschraubenregel ist sprachlich schwer zu formulieren. Sie ist leichter zu zeigen. Um die Richtung zu bestimmen, geht man so vor:

1. $\vec{r}$ und $\vec{F}$ werden durch Verschiebung in ihrer Wirkungslinie auf den gleichen Anfangspunkt gebracht.
2. $\vec{r}$ wird auf kürzestem Wege so gedreht, daß $\vec{r}$ auf $\vec{F}$ fällt.
3. Diese Drehung wird aufgefaßt als Drehung einer Rechtsschraube.



Jeder Mensch hat das Rechtsgewinde im Gefühl, wenn er häufiger mit Schrauben zu tun hat. Um die Richtung von $\vec{M}$ zu ermitteln, drehe man andeutungsweise die rechte Hand in dem durch die Vektoren gegebenen Drehsinn. Dann ergibt sich sofort die Richtung. Das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ weist ☐ NACH OBEN ☐ NACH UNTEN

--------------------------------- ▷ 73

112

$\vec{v} = (0, 0, \omega)$

Jetzt folgen einige Übungen zum gesamten Kapitel.

Gegeben seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der eingeschlossene Winkel α.

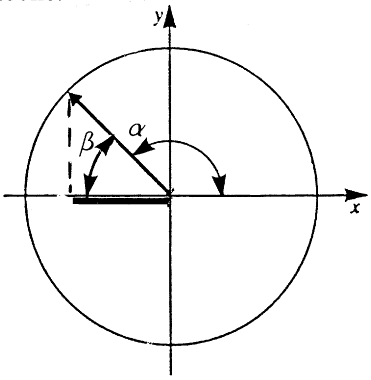
Geben Sie an: Betrag des äußeren Produktes $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = ...

inneres Produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ = ...

--------------------------------- ▷ 113

33

Vermutlich hatten Sie Schwierigkeiten mit der Bestimmung von cos 135° anhand der Tabelle.



Aus der Abbildung links können Sie ablesen

$\cos\alpha = -\cos\beta$

$\alpha + \beta = 180°$

$\beta = (180 - \alpha) = (180° - 135°) = 45°$

Daher gilt allgemein: $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$

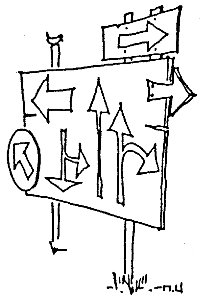
In unserem Fall gilt $\cos 135° = -\cos 45° = -0{,}71$

Damit erhalten Sie $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = -1{,}42$

-------------------------------- ▷ 34

73

Das Drehmoment weist nach oben.

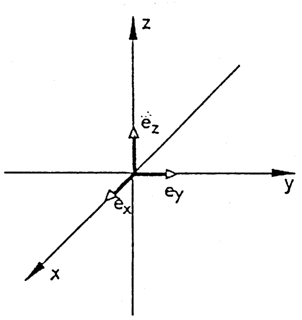


Erläuterung erwünscht -------------------------------- ▷ 74

Weiter -------------------------------- ▷ 75

113

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$



Geben Sie das äußere Produkt der Einheitsvektoren an:

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y =$ ....

$\vec{e}_x \times \vec{e}_z =$ ....

$\vec{e}_x \times \vec{e}_x =$ ....

Geben Sie das innere Produkt an:

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y =$ ....

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z =$ ....

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x =$ ....

-------------------------------- ▷ 114

34

Gegeben seien $|\vec{a}| = 2$ $|\vec{b}| = 4$

Berechnen Sie das Skalarprodukt für verschiedene eingeschlossene Winkel

$\alpha = 45°$

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ....

$\alpha = 90°$

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ....

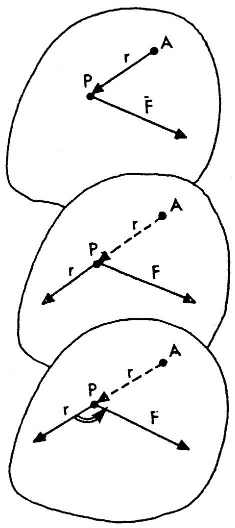
$\alpha = 120°$

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ....

φ	α	$\cos\alpha$ $\cos\varphi$	$\sin\alpha$ $\sin\varphi$
$0 = 0{,}00$	0°	1	0
$\frac{\pi}{6} = 0{,}52$	30°	0,87	0,5
$\frac{\pi}{4} = 0{,}78$	45°	0,71	0,71
$\frac{\pi}{3} = 1{,}05$	60°	0,50	0,87
$\frac{\pi}{2} = 1{,}56$	90°	0	1

-------------------------------- ▷ 35

74



Lösen wir die Aufgabe in Schritten:

Gegeben seien: Drehachse A, Kraft $\vec{F}$, Angriffspunkt der Kraft P.

1. Verschiebung von $\vec{r}$ in der Wirkungslinie, so daß $\vec{F}$ und $\vec{r}$ gleichen Anfangspunkt haben.
2. Wir drehen $\vec{r}$ auf kürzestem Wege in $\vec{F}$. Eine Rechtsschraube würde sich bei dieser Drehung auf den Betrachter hindrehen. Wäre der Körper ein Brett und drehte man in dieser Weise an einer Schraube, so würde sie sich aus dem Brett nach oben herausdrehen.

-------------------------------- ▷ 75

114

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$ $\qquad$ $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$

$\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$ $\qquad$ $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$

$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 0$ $\qquad$ $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$

Wie hieß die Maxime für die Vorbereitung von Vorträgen?

Tell ....

....

....

-------------------------------- ▷ 115

35

$\alpha = 45°$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}71 = 5{,}68$

$\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2 \cdot 0 = 0$

$\alpha = 120°$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2(-0{,}5) = -4$

▷ 36

75

Jetzt ist es wieder Zeit, eine Pause zu machen.

Rekapitulieren Sie vor der Pause kurz die in diesem Abschnitt neu gelernten Begriffe. Diese schreiben Sie sich knapp auf einen Zettel.

Dann legen Sie fest, wie lange die Pause dauern soll. Und in der Pause tun Sie dann etwas ganz anderes. Kochen Sie sich Kaffee, machen Sie Freiübungen oder einen kurzen Spaziergang, spielen Sie Klavier oder Gitarre, spülen Sie Geschirr oder spitzen Sie Ihre Bleistifte. Das Gemeinsame aller dieser Tätigkeiten ist, daß es etwas ganz anderes ist als das Studium der Mathematik.

▷ 76

115

Tell, what you are going to tell,
tell,
tell, what you have told.

Der Vektor $\vec{a} = (2, 3, 1)$ hat den Betrag

$$|\vec{a}| = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ 116

36

Zwei Sonderfälle muß man sich merken:

Das innere Produkt *paralleler* Vektoren ist gleich dem Produkt ihrer Beträge.

Das innere Produkt *senkrecht* aufeinander stehender Vektoren ist 0.

Auch der umgekehrte Schluß ist gültig:

Ist das innere Produkt zweier Vektoren 0, so stehen diese Vektoren .... aufeinander. Es sei denn, einer der Vektoren oder beide verschwinden.

Ist das innere Produkt zweier Vektoren gleich dem Produkt ihrer Beträge, so sind diese Vektoren ....

------------------------------- ▷ 37

76

Die Empfehlung, in Pausen etwas zu tun, was nichts, aber auch gar nichts mit Mathematik zu tun hat, ist begründet. Das Lernen wird behindert, wenn ähnliche Inhalte in zeitlicher Nähe gelernt werden. Beispiel: Eine Fremdsprachenkorrespondentin lernt gleichzeitig Spanisch und Italienisch. Sie denkt, die Ähnlichkeit beider Sprachen wird das Lernen begünstigen. Leider irrt sie. Ihr fallen im Spanischen immer italienische Vokabeln ein und umgekehrt. Dies macht sie unsicher. Das Phänomen heißt in der Lernpsychologie *Interferenz* oder *Ähnlichkeitshemmung*. Interferenz führt zu Lernbehinderungen, verlängert Lernzeiten und vermindert die Sicherheit. Interferenz wird vermieden, wenn Sie in den Pausen etwas ganz anderes machen.

Aber jetzt ist es wirklich Zeit für die Pause. Legen Sie nur noch schnell das Ende der Pause fest und schreiben Sie es auf einen Zettel.

------------------------------- ▷ 77

116

$|\vec{a}| = \sqrt{14} = 3{,}74$

....

Unter dem Einfluß der Kraft $\vec{F} = (5N, 0)$ bewege sich ein Körper von P_0 nach P_1.

Ortveränderung $\vec{s}_1 = (s_1, 0)$

Arbeit $W_1 =$ ....

Ein zweiter Körper bewege ich von P_0 nach P_2.

Ortsveränderung $s_2 = (0, s_2)$

Arbeit $W_2 =$ ....

------------------------------- ▷ 117

37

senkrecht

parallel

Hinweis: Bildet man das innere Produkt eines Vektors mit sich selbst, so liegt Parallelität vor: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$

Gegeben seien $|\vec{c}| = 3;$ $|\vec{a}| = 3$

$\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ Gesucht: eingeschlossener Winkel $\alpha =$ ....

$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ Gesucht: eingeschlossener Winkel $\alpha =$ ....

---------------------------------- ▷ 38

77

NACH DER PAUSE ---------------------------------- ▷ 78

117

$W_1 = 5\, s_1$ N $W_2 = 0$

Wichtig bei allen derartigen Aufgaben ist zunächst die Überlegung, welche Richtungen Ortsveränderung und Kräfte haben. Häufig ergibt sich dabei sofort, daß Extremfälle vorliegen wie:

Richtung von Ortsveränderung und Kraft sind gleich,

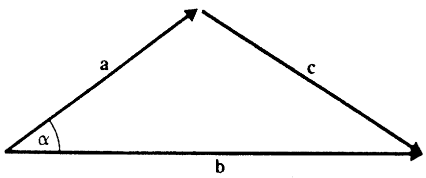
Richtung von Ortsveränderung und Kraft stehen zueinander senkrecht.

In allen Fällen empfiehlt es sich, eine grobe Skizze zu machen. Dies kürzt die Arbeit oft ab.

---------------------------------- ▷ 118

38

$\varphi = 0$
$\varphi = 90^\circ$ oder $\frac{\pi}{2}$



Versuchen Sie, den Kosinussatz selbständig zu beweisen. Der Kosinussatz lautet:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

Beweis gelungen ▷ 40

Hinweis erwünscht ▷ 39

78

Pausentermine festzulegen ist viel einfacher, als sie einzuhalten. Schauen Sie doch noch einmal auf den Zettel, auf dem das Ende der Pause notiert war. Schauen Sie nun auf die Uhr.

Stimmen beide Zeiten überein?

Wenn ja: Ganz großartig.

Wenn nein: So ist das auch nicht schlimm.

Es kann immer etwas dazwischen kommen. Dennoch sollten sich Differenzen zwischen Vorsatz und Realisierung nicht allzusehr häufen.

▷ 79

118

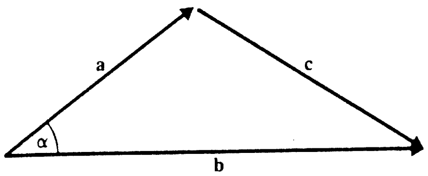
Weitere Übungsaufgaben mit Lösungen finden Sie im Lehrbuch. Sinnvoll ist es, sie erst nach einem oder mehreren Tagen zu rechnen.

Sie beherrschen den Lehrstoff vollständig, wenn Sie die Aufgaben ohne fremde Hilfe rechnen können. Bei Schwierigkeiten muß man oft noch einmal in das Lehrbuch schauen. Bei den Übungsaufgaben im Lehrbuch ist jeweils angegeben, auf welchen Abschnitt sie sich beziehen.

Schließlich noch eine Bemerkung zum Vergleich von passivem mit aktivem Lernen.

▷ 119

39



Man kann $\vec{c}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

Wegen $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$ gilt

$$\vec{c}=(\vec{b}-\vec{a})$$

Dann bilde man:

$$\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

Nun multipliziere man aus

$$c^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

-------------------------------- ▷ 40

79

Definition des Vektorprodukts

Sonderfälle

Vertauschung der Reihenfolge

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

2.4.3 Definition des Vektorprodukts
2.4.4 Sonderfälle
2.4.5 Vertauschung der Reihenfolge
Lehrbuch, Seite 44-46

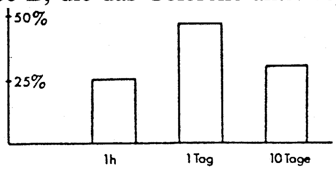
BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt -------------------------------- ▷ 80

119

In Studien wurde der Einfluß der Aktivitätsform auf das Lernergebnis kontrolliert.
Versuchsplan:

Gruppe A: Studenten lesen einen Lehrbuchabschnitt viermal durch.
Gruppe B: Studenten lesen den Lehrbuchabschnitt nur zweimal.
Nach jedem Lesen müssen sie jedoch den Inhalt frei reproduzieren.

Nach einer Stunde, einem Tag und nach 10 Tagen wird kontrolliert, was behalten wurde.
Im Diagramm ist die *Differenz* zwischen den Behaltensleistungen beider Gruppen aufgetragen. Ergebnis: Die Gruppe B, die das Gelesene aktiv reproduzieren mußte, hat zu jedem Zeitpunkt mehr behalten.



Zusätzliche Reproduktionsleistung der Gruppe B gegenüber der Gruppe A.

Schlußfolgerung: ...... erworbenes Wissen wird besser behalten als .... erworbenes Wissen -------------------------------- ▷ 120

40

Gut ist es, wenn Sie den Beweis selbständig reproduzieren konnten. Der Beweis steht auf Seite 40 im Lehrbuch und kann dort nachgerechnet werden.

Jetzt geht es mit den Lehrschritten **in der Mitte der Seiten** weiter.

Sie finden den folgenden Lehrschritt 41 unterhalb Lehrschritt 1

BLÄTTERN SIE JETZT ZURÜCK und fahren Sie fort mit Lehrschritt 41. --------------- ▷ 41

80

Die Rechenvorschrift zur Bildung des Drehmoments ist eine Rechenvorschrift zur Verknüpfung zweier Vektoren. Die Verknüpfung heißt

.... Produkt oder .... Produkt

Um dieses Produkt vom „inneren Produkt“ zu unterscheiden, brauchen wir neue Symbole. Zwei gebräuchliche Symbole sind genannt

$\vec{M}$ = ... oder $\vec{M}$ = ...

Es geht jetzt weiter mit den Lehrschritten **unten** auf den Seiten. Sie finden Lehrschritt 81 unterhalb der Lehrschritte 1 und 41.

BLÄTTERN SIE ZURÜCK -------------------------------- ▷ 81

120

Aktiv erworbenes Wissen wird länger behalten als passiv erworbenes Wissen.

Viele Mißerfolge beim Studium haben trotz großen Zeitaufwandes einen einfachen Grund: Man liest zu viel und vergewissert sich nicht, ob man das, was man gelesen hat, auch wirklich verstanden hat. Abschnittsweises Vorgehen und Selbstkontrolle nach jedem Abschnitt wie hier im Leitprogramm, ist eine einfache, aber außerordentlich wirksame Technik.

des Kapitels