KAPITEL 3

Einfache Funktionen
Trigonometrische Funktionen

1

Der mathematische Funktionsbegriff

Zuerst kommt eine Arbeitsphase anhand des Lehrbuches.

Für viele von Ihnen wird der Abschnitt im Lehrbuch eine Wiederholung sein. Falls das nicht der Fall ist, ist es gut, neue Begriffe und Bezeichnungen mit ihren Bedeutungen herauszuschreiben.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 3.1 Der mathematische Funktionsbegriff
Lehrbuch, Seite 53 - 56.

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt ▷ 2

42

3 Nullstellen
Asymptote

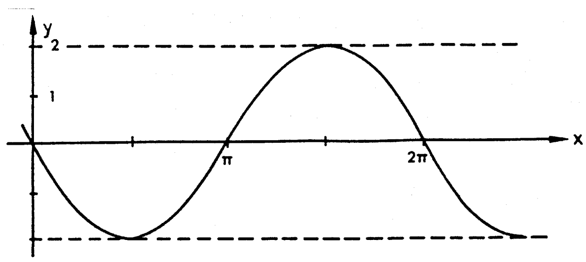
Gegeben sei die Funktion

$$y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

Die Funktion hat .... Nullstelle(n)
.... Pol(e)
.... Asymptote(n)

▷ 43

83



Falls Sie hier noch Schwierigkeiten hatten, hilft nur eins: Zeichnen Sie die Funktion

$y = \sin x$

auf ein Blatt Papier und bilden Sie dann

$y = (-2) \sin x$

Jeder y-Wert muß mit dem Faktor -2 multipliziert werden.
Dann entsteht die oben abgebildete Kurve. ▷ 84

2

Nachdem Sie den Abschnitt im Lehrbuch studiert haben, folgen im Leitprogramm zunächst einige Fragen. Sie dienen vor allem Ihrer eigenen Kontrolle. Auch wenn man den Text verstanden hat, hat man häufig nicht alles behalten.

Der Ausdruck $y = f(x)$

heißt . . . .

Die einzelnen Größen heißen:

y: . . . .

x: . . . .

$f(x)$: . . . .

Die Antworten stehen oben im nächsten Lehrschritt. Die Anordnung ist Ihnen inzwischen vertraut. Der nächste Lehrschritt steht oben auf der übernächsten Seite.

BLÄTTERN SIE um -------------------------------- ▷ 3

43

Keine Nullstelle
2 Pole
1 Asymptote

....

Pole berechnet man, indem man ....

....

-------------------------------- ▷ 44

84

Die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion mit der Periode 2π. Wenn man zum Argument x in $y = \sin x$ den Wert $2\,\pi$ hinzu addiert, erhält man denselben Funktionswert.

In Formeln: $\sin x = \sin (x + 2\,\pi)$

Um wieviel muß also das Argument x erhöht werden, damit sich derselbe Funktionswert ergibt bei $y = \sin (b\,x)$?

$$\sin (b\,[x + x_{\text{periode}}]\,) = \sin (b\,x)$$

$x_{\text{periode}} =$ . . . .

-------------------------------- ▷ 85

3

Funktionsgleichung

y = abhängige Variable

x = unabhängige Variable, Argument

$f(x)$ = Funktionsterm, Rechenvorschrift

....

Der Bereich der x-Werte, für den eine Funktion definiert ist, heißt: ....

Der Bereich der y-Werte heißt: ....

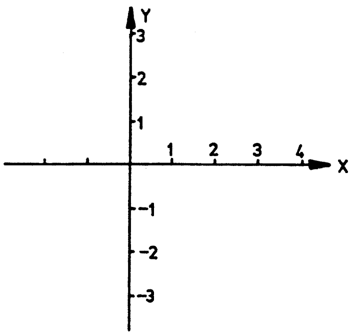
-------------------------------- ▷ 4

44

Pole berechnet man, indem man für den Nenner des Funktionsterms die Nullstellen bestimmt und nachprüft, wie sich der Zähler für diese x-Werte verhält.

....

Skizzieren Sie die Funktion $y = \frac{2}{x}$



Die Funktion hat:

.... Nullstelle(n)

.... Pol(e)

.... Asymptote(n)

-------------------------------- ▷ 45

85

$\frac{2\pi}{b}$ (Die Funktion $y = \sin b\,x$ hat also die Periode $\frac{2\pi}{b}$)

....

Richtig geantwortet -------------------------------- ▷ 88

Hilfe oder Erläuterung erwünscht -------------------------------- ▷ 86

4

Definitionsbereich

Wertevorrat oder Wertebereich

....

Falls Sie noch nicht sicher mit den Begriffen und Bezeichnungen sind, schauen Sie auf den Zettel, auf dem Sie die neuen Begriffe herausgeschrieben haben.

Eine Funktion liegt dann vor, wenn einem Wert des Arguments x zugeordnet wird

☐ ein und nur ein y-Wert -------------------------------- ▷ 5

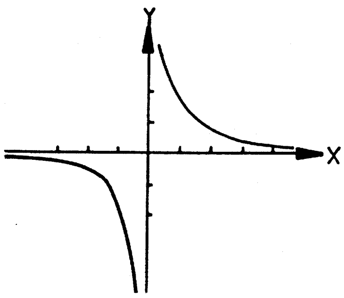
☐ einer oder mehrere y-Werte -------------------------------- ▷ 6

MIT DEM ANGEGEBENEN LEHRSCHRITT FORTFAHREN

45

$y = \frac{2}{x}$ hat *keine* Nullstelle, *einen* Pol, *keine* Asymptote

....



$y = \frac{a}{x}$ ist eine Hyperbel. Die Hyperbel hat zwei Äste. Der linke Ast im 3.Quadranten ist mit zu betrachten.

Ist $y = \frac{a}{x} + b$ eine Hyperbel?

☐ ja

☐ nein

-------------------------------- ▷ 46

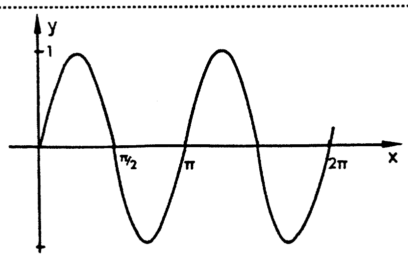
86

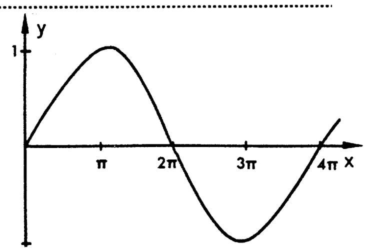
$y = \sin z$ hat die Nullstellen $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ ...

Die Periode der Sinusfunktion stimmt mit dem *doppelten* Abstand zweier benachbarter Nullstellen überein. Die Funktion $y = \sin bx$ hat Nullstellen bei $bx = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ ...

Der Abstand zweier benachbarter Nullstellen ist $\frac{\pi}{b}$. Die Periode ist damit $\frac{2\pi}{b}$

....





Periode .... $y = \sin(\ldots\ldots\ldots)$ Periode ..... $y = \sin(\ldots\ldots\ldots)$ -------- ▷ 87

5

Ihre Antwort ist richtig. Funktionen ordnen einem x-Wert *einen und nur einen* y-Wert zu.

Welches sind Funktionen? Kreuzen Sie an.

$y = x^2 + 2$ ☐

$y = \pm\sqrt{x^2 + 2}$ ☐

$y = \frac{1}{x}$ ☐

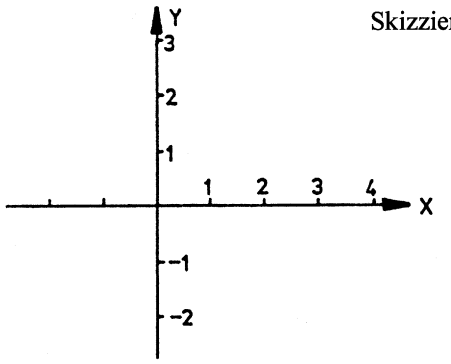
$y = \frac{1}{x} \pm \sqrt{x}$ ☐

$y = \frac{1}{x^2+1}$ ☐

SPRINGEN SIE jetzt auf ▷ 8

46

Ja



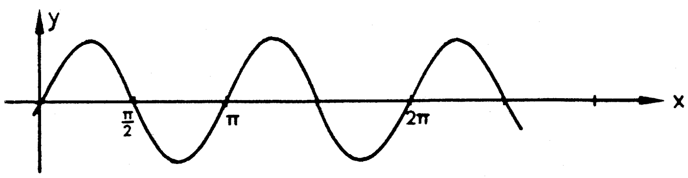
Skizzieren Sie $y = \dfrac{1}{x} + 2$

▷ 47

87

π, $y = \sin(2x)$ 4π, $y = \sin\dfrac{x}{2}$

Hier ist noch einmal der Lösungsweg für die erste Aufgabe



Die allgemeine Form der Sinusfunktion ist $y = \sin(b \cdot x)$ Die Periode ist $x_p = \pi$

Für die Periode muß erfüllt sein $b \cdot x_p = 2\pi$

Wir setzen ein und erhalten $b \cdot \pi = 2\pi$ $b = 2$ ▷ 88

6

Leider, die Antwort war falsch. Bei einer Funktion wird einem x-Wert – dem Argument – *ein und nur ein* y-Wert zugeordnet.

Funktionen sind eindeutig. So sind sie definiert. Hier muß man sehr aufpassen. Es gibt nämlich Rechenausdrücke, die mehrdeutig sind.

Beispiel: $y = \sqrt{x+3}$

für $x = 1$ ergibt das

$y = \pm 2$

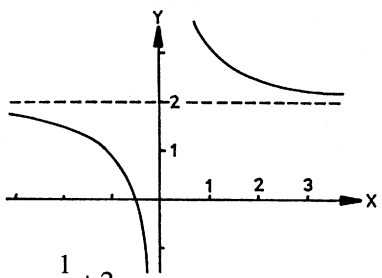
Ist der Ausdruck $y = (4 \pm \sqrt{\frac{1}{x}})^2$ eindeutig?

- ☐ ja
- ☐ nein

▷ 7

47

Hoffentlich haben Sie beide Äste der Hyperbel skizziert.



$y = \frac{1}{x} + 2$

Die Hyperbel hat .... Nullstelle(n)

.... Asymptote(n)

.... Pol(e)

▷ 48

88

Geben Sie die Perioden für die drei Sinusfunktionen an:

$y = 5 \sin(2x)$ ....

$y = 0{,}5 \sin(2x)$ ....

$y = 0{,}5 \sin(2\pi x)$ ....

▷ 89

7

Nein, $y = (4 \pm \sqrt{\frac{1}{x}})^2$ ist mehrdeutig.

Kreuzen Sie die *Funktionen* an

- ☐ $y = x^2 + 2$
- ☐ $y = \pm\sqrt{x^2 + 2}$
- ☐ $y = \frac{1}{x}$
- ☐ $y = \frac{1}{x} \pm \sqrt{x}$
- ☐ $y = \frac{1}{x^2+1}$

-------------------------------- ▷ 8

48

Eine Nullstelle
Eine Asymptote
Einen Pol

Sie können jetzt noch einige Funktionen skizzieren und Nullstellen, Pole und Asymptoten aufsuchen. Sie brauchen es aber nicht. Je unsicherer Sie sich fühlen, desto wichtiger ist es, sich mit den Aufgaben zu befassen. Das ist ja gerade das Ärgerliche, wenn man die Aufgaben gut kann, beginnen sie Spaß zu machen. Dann braucht man sie nicht mehr zu üben.

Kann man sie aber nicht, machen sie Mühe. Dann ist der Spaß gering. In diesem Fall muß man leider üben.

Auf der nächsten Seite finden Sie einige Funktionen und Aufgaben.

-------------------------------- ▷ 49

89

π
π
1

Versuchen Sie, den Ausdruck für die Periode der Funktion $y = A \sin(bx)$ abzuleiten.

$x_{\text{periode}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Hinweis: Eine Periode ist durchlaufen, wenn der Term, d.h. der Klammerausdruck, von dem der Sinus genommen wird, um 2π anwächst.

Ziehen Sie im Zweifel das Lehrbuch zu Rate.

-------------------------------- ▷ 90

8

Funktionen sind: $y = x^2 + 2 \quad y = \frac{1}{x} \quad y = \frac{1}{x^2+1}$

Hinweis: Die Antwort war hier relativ leicht, weil vor den Wurzeln das Zeichen ± stand.

Das Zeichen ± sagt, daß beide Wurzelwerte genommen werden müssen. Oft wird aber das Zeichen ± vor der Wurzel weggelassen, weil jeder weiß, daß eine Wurzel zwei Werte hat. Man kann aus dem mehrdeutigen Ausdruck $y = \sqrt{x^2 + 2}$ eine Funktion machen, wenn man sich darauf beschränkt, entweder *nur* den positiven Wurzelwert oder *nur* den negativen Wurzelwert zu nehmen. Beispiel: $y_1 = +\sqrt{x^2+2} \quad y_2 = -\sqrt{x^2+2}$

Schwierig ist die Sache, wenn kein Vorzeichen benutzt wird. In diesem Fall bleibt ungewiß, ob der Schreiber den positiven Wurzelwert oder den negativen Wurzelwert meint. Präzisieren Sie den Ausdruck $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ so, daß eine Funktion entsteht.

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $y = \ldots\ldots\ldots\ldots$ -------------------------------- ▷ 9

49

Hier sind einige Funktionen:

$$y = x^2 + x + 1$$

$$y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Skizzieren Sie den Kurvenverlauf!

Lösungen und weitere Aufgaben -------------------------------- ▷ 50

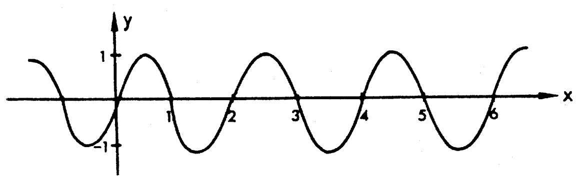
Falls Sie sicher sind und diese Aufgaben leicht finden -------------------------------- ▷ 56

90

$$x_{\text{periode}} = \frac{2\pi}{b}$$

Das folgt aus $bx_{\text{periode}} = 2\pi$

Welche Periode und welche Funktionsgleichung hat die skizzierte Funktion?



Periode: ....

Funktionsgleichung: .... -------------------------------- ▷ 91

9

$y = +\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$

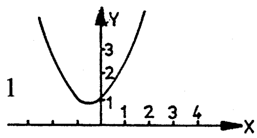
Durch die Gleichung $y = x^2$ werde eine Funktion definiert. Hier ist:

abhängige Variable: ....
unabhängige Variable: ....
Argument: ....
Funktionsterm: ....
Definitionsbereich: ....
Wertevorrat: ....

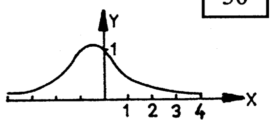
------------------------------- ▷ 10

50

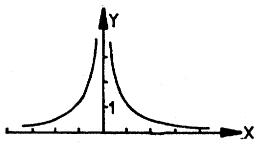
$y = x^2 + x + 1$



$y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$



$y = \frac{1}{x^2}$



Skizzieren Sie: $\quad y = \frac{1}{x} + x \qquad y = -\frac{1}{x} \qquad y = \frac{3}{x} - 2$

Lösungen und weitere Aufgaben ------------------------------- ▷ 51

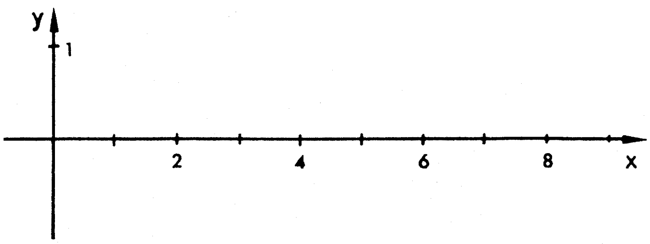
Falls Sie sicher sind und diese Aufgaben leicht finden ------------------------------- ▷ 56

91

Periode: 2

Funktiongleichung: $y = \sin(\pi x)$

Skizzieren Sie die Funktion $y = \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$



------------------------------- ▷ 92

10

y

x

x

x^2

$-\infty < x < +\infty$

$0 \leq y < +\infty$

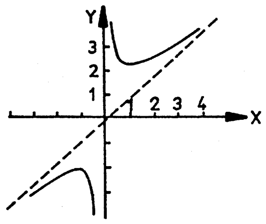
Die Selbstkontrolle anhand einfacher Fragen ist wichtig, um Fehler oder Mißverständnisse von Anfang an zu eliminieren. Eine Vorlesung kann diese Funktion nur in unzureichendem Maß erfüllen. Stimmt Ihre Antwort nicht mit der gegebenen überein, lassen Sie sie Sache nicht auf sich beruhen. Es ist nicht schlimm, falsch zu antworten, aber es ist wichtig, den Ursachen für falsche Antworten nachzugehen — und etwas dagegen zu tun.

Denkfehler? Verständnisschwierigkeiten? Gedächtnisschwierigkeiten?

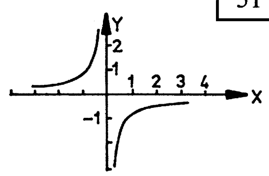
▷ 11

51

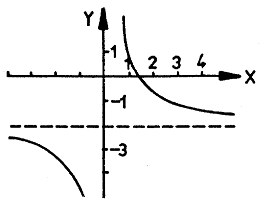
$y = \frac{1}{x} + x$



$y = -\frac{1}{x}$



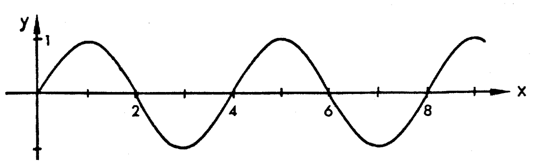
$y = \frac{3}{x} - 2$



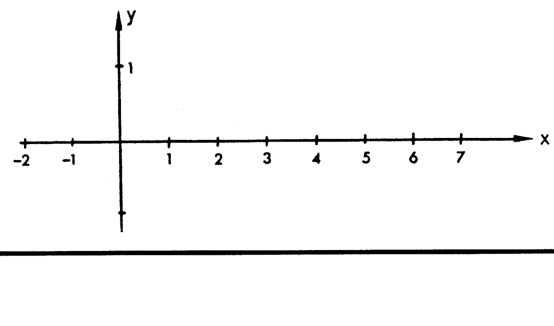
▷ 52

92

$y = \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$



Skizzieren Sie die Funktion $y = \sin(x + \pi)$



▷ 93

11

Graphische Darstellung von Funktionen

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 3.3 Graphische Darstellung von Funktionen
Lehrbuch, Seite 56-57

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt -------------------------------- ▷ 12

52

Überprüfen Sie, ob Ihnen die Begriffe noch geläufig sind:
Die x-Achse heißt . . . . Die y-Achse heißt . . . .

Bestimmen Sie die Nullstellen für die Funktionen:

a) $y = x - 2$

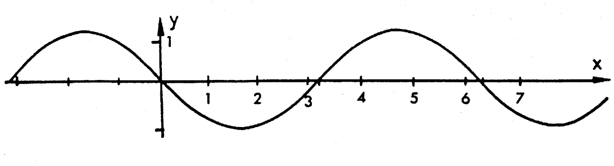
Nullstelle: . . . .

b) $y = x^2 - 4$

Nullstellen: . . . .

-------------------------------- ▷ 53

93



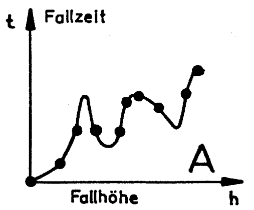
Hinweis: In der Funktion $y = \sin(x + \pi)$ nimmt der Term in der Klammer den Wert 0 bereits bei $x = -\pi$ an. Dort beginnt also praktisch der Kurvenverlauf, falls Sie die Zeichnung mit dem Wert für sin (0) beginnen. Die Kurve ist um den Abszissenwert π nach links verschoben.

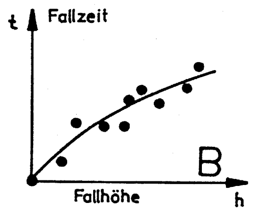
Wichtig ist es zunächst, die Periode einer trigonometrischen Funktion aus der Formel entnehmen zu können und umgekehrt aus einer gegebenen gezeichneten Funktion den Funktionsterm zu ermitteln.

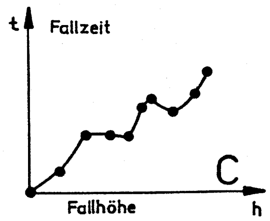
-------------------------------- ▷ 94

12

Fallhöhe und Fallzeit sind in einer Versuchsreihe gemessen. Gezeichnet sind hier die Meßpunkte und drei Kurven.







Welches ist Ihrer Meinung nach die beste Ausgleichskurve?

☐ A -------------------------------- ▷ 13

☐ B -------------------------------- ▷ 15

☐ C -------------------------------- ▷ 14

53

Abszisse Ordinate

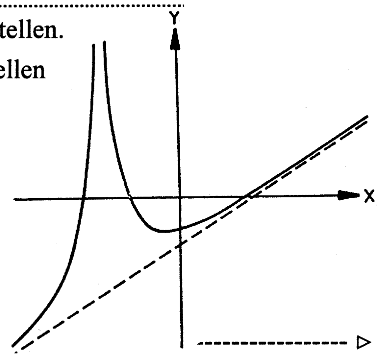
Nullstellen: a) $x = 2$ b) $x_1 = +2$

$x_2 = -2$

Die gezeichnete Funktion hat .... Nullstellen.

Die gezeichnete Funktion hat .... Polstellen

Die Näherungsgerade heißt ....



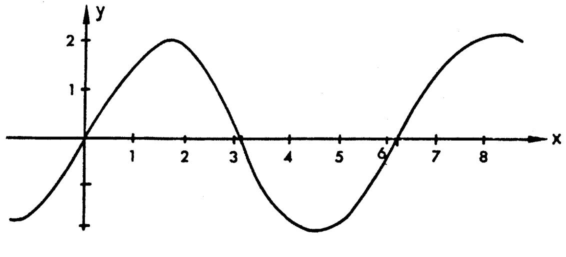
----------------- ▷ 54

94

Überprüfen Sie ihre Kompetenz rasch mit einer kleinen Kontrolle:

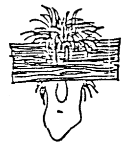
Geben Sie die Funktionsgleichung der dargestellten trigonometrischen Funktion an

$y =$ ....



-------------------------------- ▷ 95

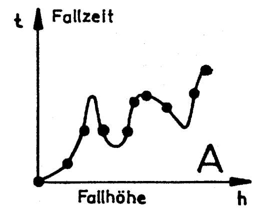
13



Nein, nein, nein.

Vielleicht wollen Sie nur nachschauen, was hier steht.

Die Kurve A ist in höchstem Grad unwahrscheinlich. Aus den Meßpunkten läßt sich kein Anhaltspunkt dafür ableiten, daß der Kurvenverlauf so schwankt. Bedenken Sie auch, daß es sich um den Zusammenhang zwischen Fallhöhe und Fallzeit handelt. Wir erwarten hier ein monotones Ansteigen der Fallzeit mit der Fallhöhe.

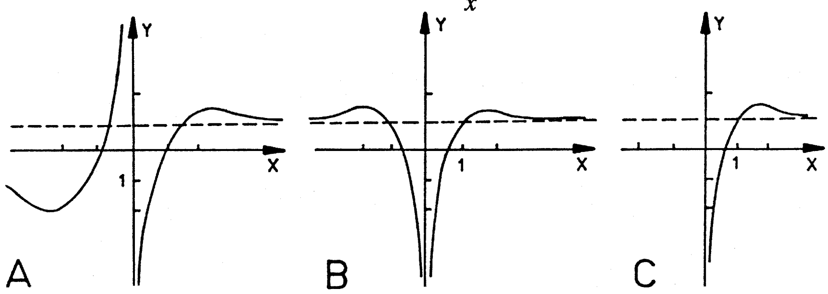


BLÄTTERN SIE ZURÜCK und wählen Sie nun ▷ 14

54

3 Nullstellen 1 Polstelle Aymptote

Welches ist der Graph der Funktion $y = \frac{x^2 - 1}{x^4} + 1$?



Die Funktion hat ..... Nullstellen, ... Pole, ... Asymptoten ▷ 55

95

$y = 2 \sin x$

In dem Ausdruck $y = A \sin \varphi$ ist

φ das ....

A die ....

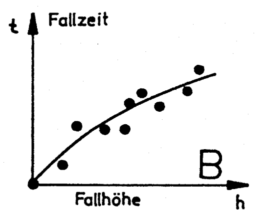
▷ 96

14

Sie haben die Kurve *B* gewählt, die weder Physiker noch Ingenieure wählen würden.

Mit der Kurve wird versucht, aus den Meßpunkten auf einen Zusammenhang zu schließen. Nun wissen wir aber, daß alle Messungen mit Fehlern behaftet sind. Gleichzeitig ist die Annahme plausibel, daß die Fallzeit monoton mit der Fallhöhe zunimmt.

Der Physiker zieht die Kurve unten vor und betrachtet die Abweichungen der Meßpunkte von dieser Ausgleichskurve als zufällige Meßfehler. Im Kapitel *Fehlerrechnung* werden Methoden mitgeteilt, aus Meßwerten mit Fehlern auf die wahrscheinlich richtigen Werte zu schließen.



▷ 16

55

Graph *B* 1 Pol

2 Nullstellen 1 Asymptote

War alles richtig, so herzlichen Glückwunsch. Jetzt können Sie auf Lehrschritt 56 gehen. Andernfalls wäre es doch zweckmäßig, im Lehrbuch den Abschnitt 3.3.3 zu wiederholen und einige Aufgaben aus dem Übungsteil im Lehrbuch, Seite 78 zu lösen.

▷ 56

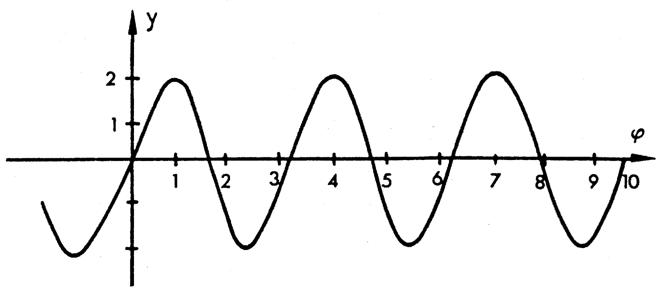
96

φ = Argument oder unabhängige Variable

A = Amplitude

Die Funktionsgleichung der dargestellten Funktion ist

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



▷ 97

15

Sehr gut. Richtig.

Wir wissen, daß alle Messungen mit Meßfehlern behaftet sind. Das Verfahren, Meßpunkte durch Ausgleichskurven zu verbinden, setzt Einsicht in die physikalischen Zusammenhänge und Probleme voraus. Es muß immer entschieden werden, ob und wie groß die Meßfehler sein können. Das hängt von den verwendeten Instrumenten und Verfahren ab. In Ihrem Studium werden Sie noch sehr häufig mit diesem Problem zu tun haben.

Im Kapitel *Fehlerrechnung* werden Methoden entwickelt, aus Meßwerten mit Fehlern auf die wahrscheinlichen richtigen Werte zu schließen.

-------------------------------- ▷ 16

56

Veränderung von Funktionsgleichungen und ihrer Graphen

In diesem kleinen aber wichtigen Abschnitt wird gezeigt, wie sich die Veränderung einer Konstante in einer Funktionsgleichung auf den Graphen auswirkt.

Als Beispiel wird im Lehrbuch die Parabel benutzt.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 3.3.4 Veränderung von Funktionsgleichungen und ihrer Graphen
Lehrbuch, Seite 62-63

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt -------------------------------- ▷ 57

97

$y = 2 \sin 2\varphi$

Die Funktion $y = 2 \sin 2\varphi$ hat die Periode: ....

Im Ausdruck $y = A \cdot \sin(b \cdot x)$ ist die Periode ....

-------------------------------- ▷ 98

16

Ermittlung des Graphen aus der Gleichung für die Gerade
Ermittlung der Funktiongleichung der Geraden aus dem Graphen

In diesem Abschnitt wird die Geradengleichung und ihre graphische Darstellung erläutert. Das ist vielen aus der Schule bekannt und somit eine Wiederholung.

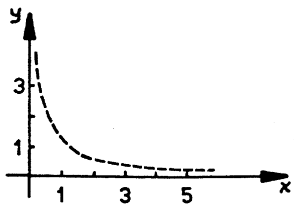
STUDIEREN SIE im Lehrbuch
3.3.1 Ermittlung des Graphen aus der Gleichung für die Gerade
3.3.2 Bestimmung der Gleichung einer Geraden aus ihrem Graphen
Lehrbuch, Seite 57-59

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt -------------------------------- ▷ 17

57

Zur Übung betrachten wir die unten skizzierte Funktion $y_1 = f(x) = \frac{1}{x}$

Wir wollen Variationen dieser Funktion skizzieren. Da es uns hier vor allem auf die grundsätzliche Überlegung ankommt, beschränken wir uns auf einen Hyperbelast.



Multiplikation des *Funktionsterms* mit einer Konstanten:

$y_2 = 3 \cdot f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Skizzieren Sie y_2

-------------------------------- ▷ 58

98

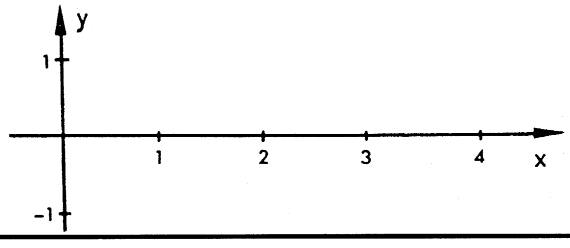
Periode: π

Periode: $\frac{2\pi}{b}$

....

Skizzieren Sie in dem Koordinatensystem die Funktion $y = \sin(2\pi x)$.

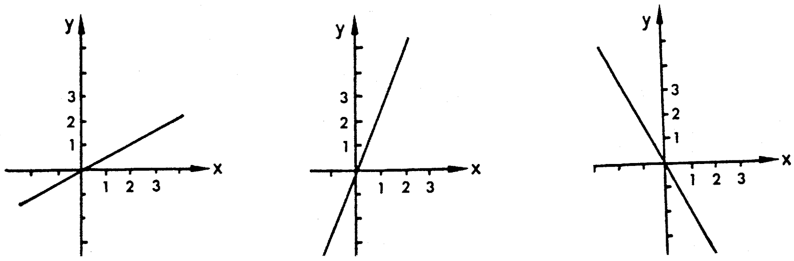
Es kommt nicht auf eine ganz exakte Darstellung an. Skizzen sind keine Präzisionszeichnungen. Sie müssen im Prinzip richtig sein.



-------------------------------- ▷ 99

17

Geben Sie die Gleichung der drei Geraden an:



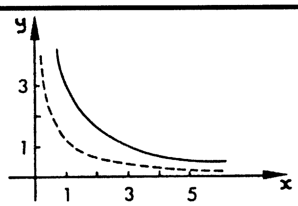
$y = \ldots\ldots\ldots$ $y = \ldots\ldots\ldots$ $y = \ldots\ldots\ldots$

Falls Ihnen die Aufgabe zu einfach ist ▷ 23

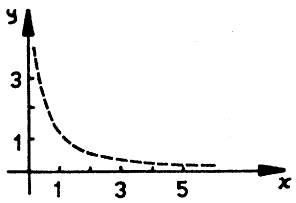
Antwort und weitere Übung ▷ 18

58

$y_2 = 3 \cdot f(x) = \frac{3}{x}$



Addition einer Konstanten zum *Funktionsterm*.



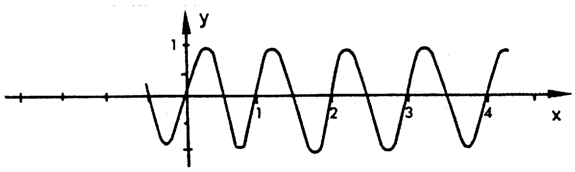
Gegeben $y_1 = f(x) = \frac{1}{x}$

Skizzieren Sie links die Funktion

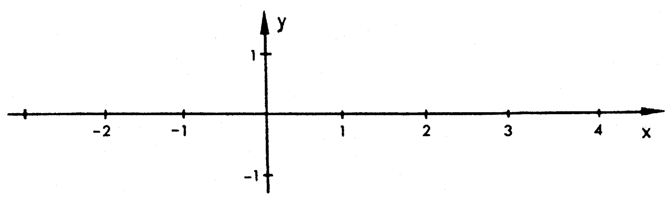
$y_2 = f(x) + 3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 59

99



Skizzieren Sie jetzt die Funktion $y = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$

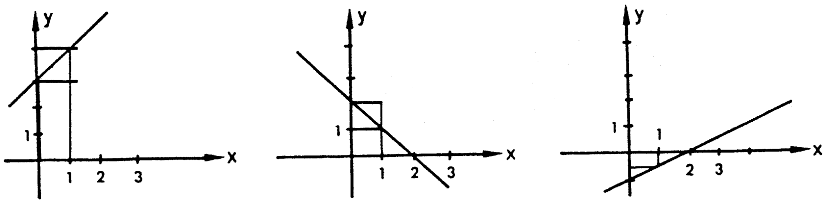


▷ 100

18

$y = 0{,}5 \cdot x$ $\qquad$ $y = 2{,}5 \cdot x$ $\qquad$ $y = -2x$

Der einfachste Fall liegt vor, wenn die Gerade durch den Nullpunkt geht. Dann kann an der Stelle $x = 1$ abgelesen werden, wie groß die Steigung ist. Schwieriger wird es, wenn die Gerade nicht durch den Nullpunkt geht. In diesem Fall bestimmen wir zunächst das konstante Glied und dann erst die Steigung. Wie heißen die Geradengleichungen?

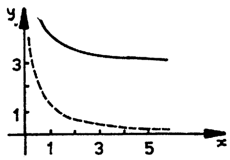


$y = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $y = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $y = \ldots\ldots\ldots$

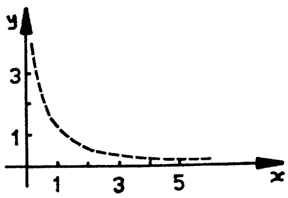
▷ 19

59

$$y_2 = f(x) + 3 = \frac{1}{x} + 3$$



Multiplikation des *Arguments* mit einer Konstanten. Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$



Skizzieren Sie links die Funktion $y_2 = f(3x) = \ldots\ldots$

Hinweis: Wir ersetzen in der Funktionsgleichung x durch $(3x)$.

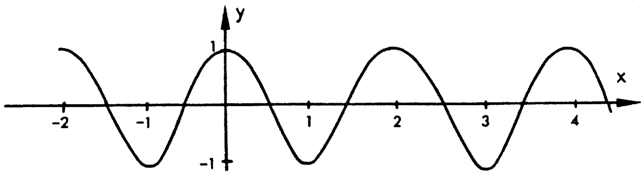
Veränderung des Graphen

☐ Streckung in x-Richtung

☐ Stauchung in x-Richtung

▷ 60

100



Hier kommt es nicht darauf an, daß die Zeichnung gut ist, sie muß richtig sein. Sie haben überprüft, ob Sie mit der Sinusfunktion umgehen können. Wichtig und schwierig zugleich ist, dabei zu berücksichtigen, wie sich im Ausdruck $y = A \sin(bx+c)$ die Größen b und c im Argument auswirken. b verändert die Periode, positives c verschiebt den Graphen der Funktion nach links.

Falls Sie hier Schwierigkeiten hatten, empfiehlt es sich durchaus, den Abschnitt „Sinusfunktion" im Lehrbuch, Seite 64-70 noch einmal zu studieren.

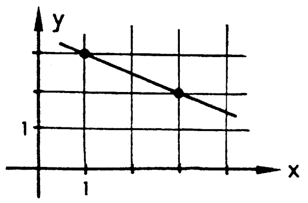
Wenn Sie mit den Aufgaben zurecht gekommen sind, so auf ▷ 101

19

$y = x + 3$ $\qquad$ $y = -x + 2$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}x - 1$

....

Für den Fall, daß Sie hier Fehler hatten, studieren Sie bitte noch einmal im Lehrbuch den Abschnitt 3.3.2 und fahren Sie danach hier fort.
Jetzt kommen einige Aufgaben, bei denen die Steigung bestimmt werden muß, ohne daß die einfache Möglichkeit gegeben ist, die Werte für $x = 0$ und $x = 1$ abzulesen und den Zuwachs als Steigung zu nehmen. Im allgemeinen Fall muß die Steigung der Geraden so bestimmt werden, daß der Zuwachs des Funktionswertes durch den Zuwachs des x-Wertes geteilt wird. Dafür muß man sich geeignete Abschnitte aussuchen.



Geben Sie die Steigung an.

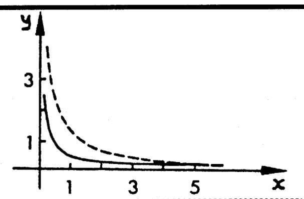
$y = ax + b$

$a =$ .... ------------------------- ▷ 20

60

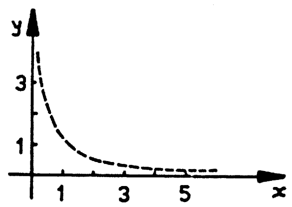
$y = \dfrac{1}{3x}$

Der Graph ist in x-Richtung gestaucht.



....

Addition einer Konstanten zum *Argument*. Gegeben $y_1 = f(x) = \frac{1}{x}$



Skizzieren Sie links die Funktion

$y_2 = f(x+3) =$ ....

Hinweis: Wir ersetzen in der Funktionsgleichung x durch $(x+3)$.

Veränderung des Graphen:

☐ Verschiebung nach links

☐ Verschiebung nach rechts ---------------- ▷ 61

101

Kosinusfunktion, Zusammenhang zwischen Kosinusfunktion und Sinusfunktion

Tangens, Kotangens

Additionstheoreme, Superposition

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 3.4.3 Kosinusfunktion
3.4.4 Zusammenhang zwischen Kosinus- und Sinusfunktion
3.4.5 Tangens, Kotangens
3.4.6 Additionstheoreme, Superposition von trigonometrischen Funktionen
Lehrbuch, Seite 71-76

Teilen Sie sich die Arbeit in zwei oder drei Abschnitte ein.

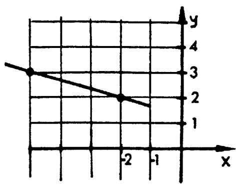
BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt ------------------------------- ▷ 102

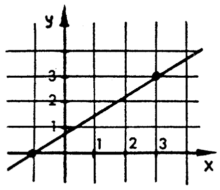
20

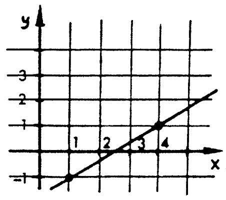
$a = -\frac{1}{2}$

Falls Sie Schwierigkeiten mit dem Vorzeichen der Steigung haben, sehen Sie sich bitte noch einmal genau den Abschnitt 3.3.2 im Lehrbuch an.

Bestimmen Sie die Steigung a, indem Sie geeignete Intervalle wählen, um den Zuwachs von y und den Zuwachs von x zu bestimmen. $y = ax + b$





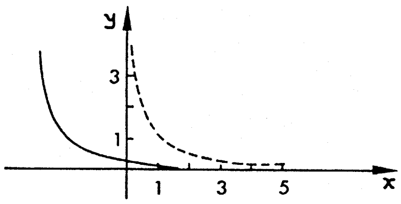


$a =$ .... $a =$ .... $a =$ .... --------- ▷ 21

61

$y = \frac{1}{x+3}$

Verschiebung nach links



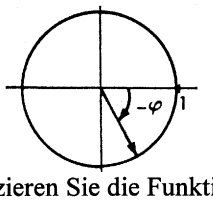
In den folgenden Schritten wird (statt wie eben mit $c = 3$) die Variation mit $c = -3$ durchgeführt. Ob diese Übung für Sie überflüssig ist, müssen Sie selbst entscheiden.

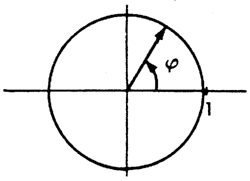
Übung unnötig -------------------------------- ▷ 65

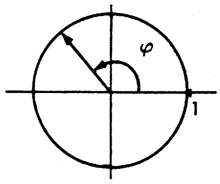
Übung erwünscht -------------------------------- ▷ 62

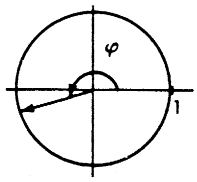
102

Skizzieren Sie den Kosinus des Winkels φ in den Zeichnungen

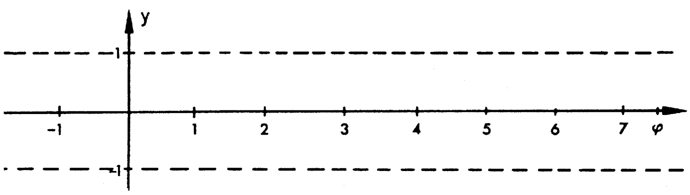








Skizzieren Sie die Funktion $y = \cos \varphi$



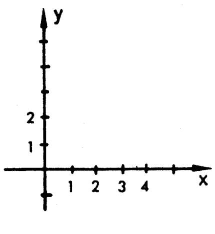
----------------- ▷ 103

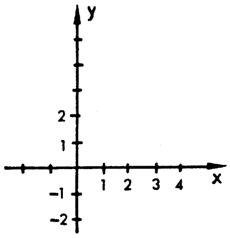
21

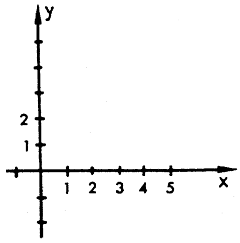
$a=-\frac{1}{3}$ $a=\frac{3}{4}$ $a=\frac{2}{3}$

Skizzieren Sie die Geraden

$y=0{,}1\,x+2$ $y=-2x-2$ $y=\frac{x+1}{2}$



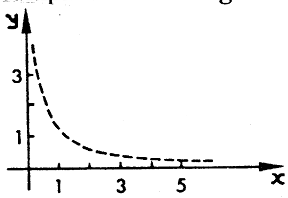




▷ 22

62

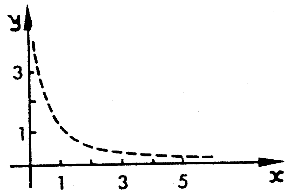
Multiplikation des *Arguments* mit einer Konstanten. Gegeben: $y_1 = f(x) = \frac{1}{x}$



Skizzieren Sie

$y_2 = f(-3x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Addition einer *Konstanten* zum Funktionsterm. Gegeben $y_1 = \frac{1}{x}$

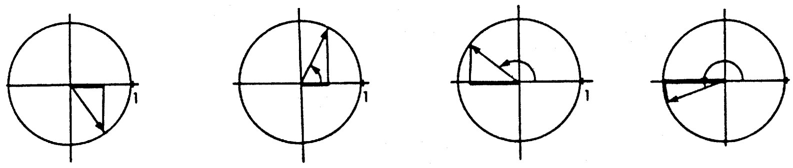


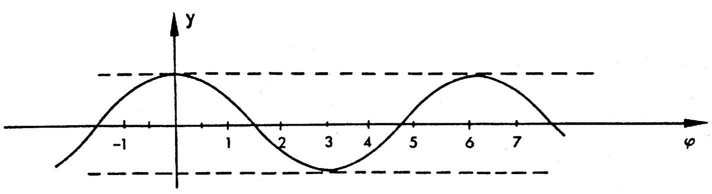
Skizzieren Sie

$y_2 = f(x) - 3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 63

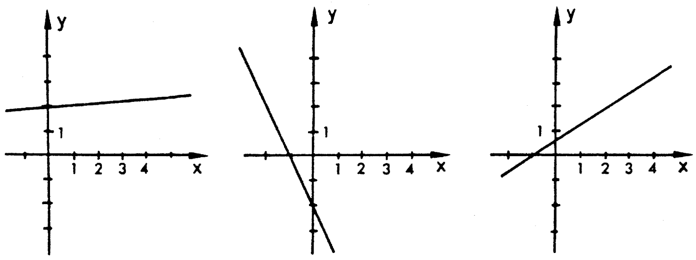
103



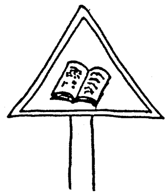


GLEICH WEITER ▷ 104

22



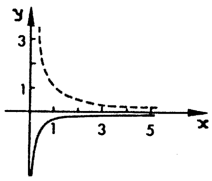
Bei Schwierigkeiten noch einmal Abschnitt 3.3.1 im Lehrbuch durcharbeiten.



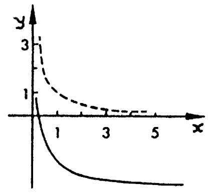
--------------------------------- ▷ 23

63

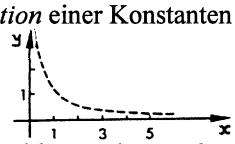
$y_2 = \frac{1}{-3x}$



$y_2 = \frac{1}{x} - 3$



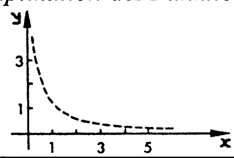
Addition einer Konstanten zum *Argument*. Gegeben: $y_1 = f(x) = \frac{1}{x}$



Skizzieren Sie auf einem Blatt

$y_2 = f(x-3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Multiplikation der *Funktion* mit einer Konstanten. Gegeben $y_1 = f(x) = \frac{1}{x}$



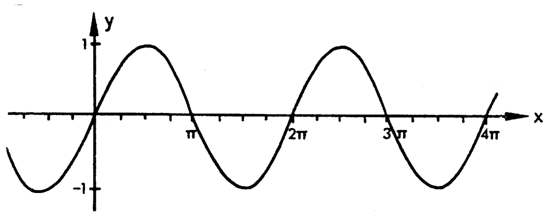
Skizzieren Sie auf einem Blatt

$y_2 = -3 \cdot f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 64

104

Hier ist die Funktion $y = \sin x$ skizziert



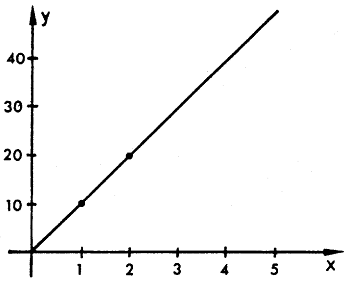
Zeichnen Sie in diese Skizze noch ein die Funktion $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

--------------------------------- ▷ 105

23

In der Physik müssen Einheiten auf den Koordinatenachsen häufig dem Problem angepaßt werden.

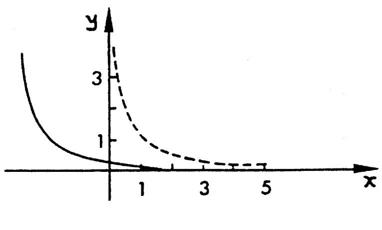
Unten ist die Skaleneinteilung verändert. Geben Sie die Gleichung für den Graphen an:



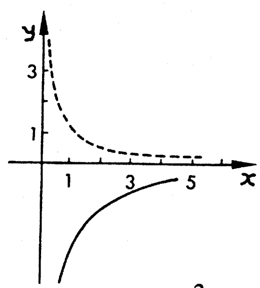
$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 24

64



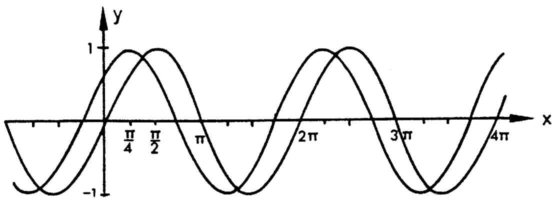
$y_2 = f(x-3) = \frac{1}{x-3}$



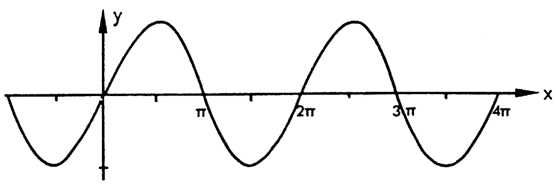
$y_2 = -3\,f(x) = \frac{-3}{x}$

-------------------------------- ▷ 65

105



Die Skizze zeigt $y = \sin x$ Zeichnen Sie dazu die Funktion $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ein.

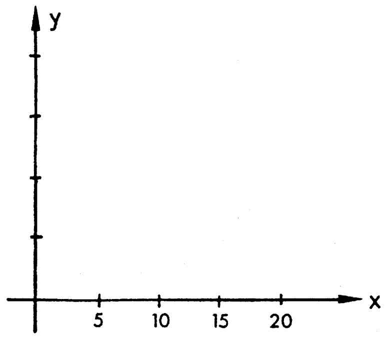


Die Funktion hat einen eigenen Namen, sie heißt .... - Funktion --------- ▷ 106

24

$y = 10\,x$

....



Die folgende Funktion soll dargestellt werden:

$y = 50\,x + 1000$

Wertebereich für x:

$0 \le x \le 20$

Wählen Sie eine geeignete Skala für die Ordinate und skizzieren Sie die Gerade..

-------------------------------- ▷ 25

65

Winkelfunktionen, trigonometrische Funktionen

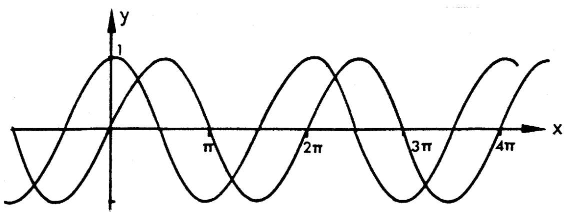
Einheitskreis

Die Voraussetzung für den gesamten Abschnitt Winkelfunktionen ist, daß Sie Winkel sowohl im Gradmaß wie im Bogenmaß messen können. Hier wird daher zunächst anhand des Einheitskreises das Bogenmaß für Winkel definiert.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 3.4.1 Einheitskreis
Lehrbuch, Seite 63-64

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt -------------------------------- ▷ 66

106



Kosinus-Funktion: $y = \cos x$

....

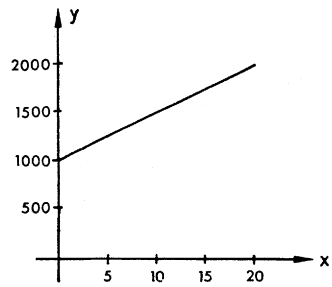
Wir betrachten nun den Übergang zwischen sin- und cos-Funktion von einer anderen Seite.

Man muß die Kurve $y = \cos x$ um .... nach rechts verschieben um zur Kurve $y = \sin x$ zu gelangen.

In Formeln: cos (x.....) = sin x

-------------------------------- ▷ 107

25



Alles richtig --------------------------------- ▷ 30
Erläuterung erwünscht oder Fehler gemacht --------------------------------- ▷ 26

66

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle

Gradmaß		Bogenmaß
180°	$\hat{=}$	....
.....	$\hat{=}$	2π
57°	$\hat{=}$	....
.....	$\hat{=}$	2

--------------------------------- ▷ 67

107

$\frac{\pi}{2}$

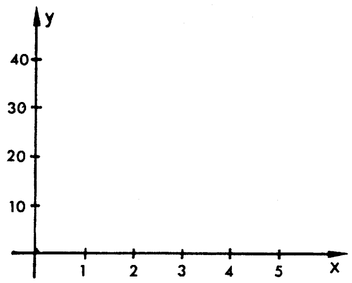
In Formeln: $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

Sinusfunktion und Kosinusfunktion sind weitgehend ähnliche Funktionen. Wer verstanden hat, daß sie sich nur dadurch unterscheiden, daß sie um die Phase $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander verschoben sind, versteht auch, daß es häufig reine Geschmackssache ist, welche der beiden Funktionen für die Beschreibung einer Pendelschwingung oder einer elektrischen Schwingung genommen wird.

--------------------------------- ▷ 108

26

Den Maßstab eines Koordinatensystems kann man willkürlich wählen. Man wählt ihn in der Regel so, daß eine gegebene Kurve mit allen wesentlichen Einzelheiten gut zu sehen ist. Zeichnen Sie die Graphen ein für $y = x$ $y = 10\,x$ $y = 20\,x$



---------------------------------- ▷ 27

67

$180° \mathrel{\hat{=}} \pi$
$360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi$
$57° \mathrel{\hat{=}} 1$
$115° \mathrel{\hat{=}} 2$

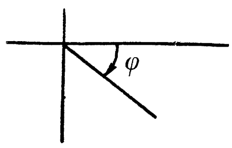
Wie werden Winkel in Uhrzeigerrichtung gezählt?

☐ positiv

☐ negativ

Geben Sie an im Bogenmaß

$1° \mathrel{\hat{=}}$ .....
$45° \mathrel{\hat{=}}$ .....



---------------------------------- ▷ 68

108

Es ist kein Widerspruch, wenn Sie in einem Physikbuch finden:

Die Pendelschwingung läßt sich darstellen durch den Ausdruck $S = S_0 \sin(\omega t)$

Und in einem anderen Buch steht:

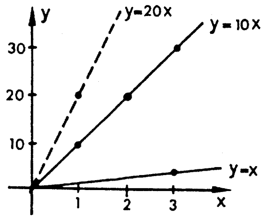
Die Pendelschwingung läßt sich darstellen durch den Ausdruck $A = A_0 \cos(\omega t)$

Die beiden Darstellungen unterscheiden sich in zwei Punkten:

1. Die Bezeichnung der Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage ist verschieden. Das hat physikalisch nichts zu bedeuten, denn es ist gleichgültig, ob wir die Auslenkung S oder A nennen.
2. Beide Ausdrücke unterscheiden sich durch die Lage des Pendels zur Zeit $t = 0$. Im ersten Fall hat das Pendel zu Beginn der Zeitrechnung gerade einen Nulldurchgang, im zweiten Fall hat der Pendelausschlag gerade seinen Extremwert erreicht. Es ist klar, daß dieses nicht den Charakter der Pendelschwingung betrifft.

---------------------------------- ▷ 109

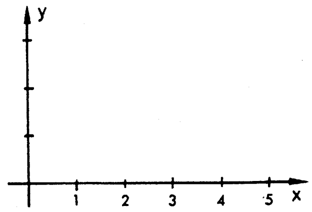
27



Gut darstellbar sind

$y = 10x$

$y = 20x$



Wählen Sie die Koordinateneinteilung der Ordinate so, daß der Graph für $y = 0{,}01x$ gut dargestellt werden kann.

Definitionsbereich für x: $0 \leq x \leq 5$

---------------------------------- ▷ 28

68

negativ

$1° \;\hat{=}\; 0{,}017$

$45° \;\hat{=}\; 0{,}78$

Die Bezeichnungen für Winkel im Bogen- und Gradmaß werden in den verschiedenen Büchern unterschiedlich gewählt.

Hatte Schwierigkeiten bei der Beantwortung der Fragen, weitere Übungen --------- ▷ 69

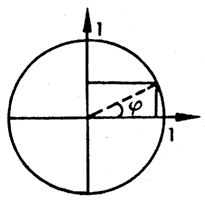
Hatte keine Schwierigkeiten ---------------------------------- ▷ 74

109

Der zweite Zusammehang zwischen Sinusfunktion und Kosinusfunktion ergibt sich aus einer Betrachtung im Einheitskreis. Leiten Sie die Beziehung ab, indem Sie den Satz von Pythagoras benutzen und berechnen Sie

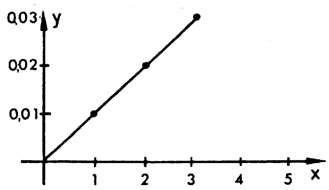
$\sin^2 \varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos^2 \varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots$



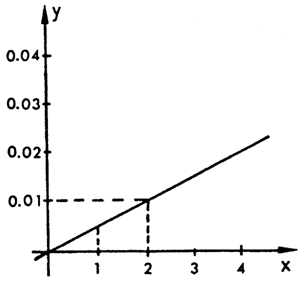
---------------------------------- ▷ 110

28



Das Prinzip ist einfach, man wählt die Einteilung so, daß auf der Abszisse der Definitionsbereich Platz hat und daß auf der Ordinate der jeweiligeWertebereich Platz hat.

Ist der Graph gegeben und soll die Funktionsgleichung bestimmt werden, so bestimmen wir



zunächst die Steigung der Geraden.

Wir benutzen den Ausdruck $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Es ist zweckmäßig, hier den Nullpunkt und einen beliebigen Punkt der Geraden zu nehmen.

$a = ...$ $\qquad y = a \cdot x = ...$

--------------------------------- ▷ 29

69

Bei praktischen Rechnungen muß immer darauf geachtet werden, in welchem Maß Winkel angegeben werden. Daher muß man die Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß beherrschen.

Rechnen Sie um:

$1° \;\hat{=}\; ....$

$90° \;\hat{=}\; ....$

$180° \;\hat{=}\; ....$

$360° \;\hat{=}\; ....$

--------------------------------- ▷ 70

110

$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$

$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$

Leicht zu merken ist $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$

Man schreibt auch oft

$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$

$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$

Dann muß aber das Vorzeichen der Wurzel zusätzlich angegeben werden

cos φ ist positiv im .... und .... Quadranten

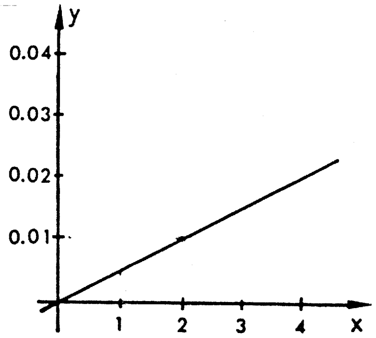
cos φ ist negativ im .... und .... Quadranten

--------------------------------- ▷ 111

29

$a = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$

$y = 0{,}005x$



Verifizieren Sie für sich, daß die Steigung unabhängig vom gewählten Intervall ist, indem Sie $x_1 = 0$ nehmen und für x_2 die Werte 1, 2 und 3 nehmen.

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

--------------------------------- ▷ 30

70

$1° \mathrel{\hat{=}} 0{,}017$

$90° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{2} = 1{,}57$

$180° \mathrel{\hat{=}} \pi = 3{,}14$

$360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi = 6{,}28$

Bei der Umrechnung muß man sich immer eine Relation merken:

360° ist ein ganzer Winkel und entspricht dem Umfang des Einheitskreises, nämlich 2π. Es ist gut, diese Beziehung auswendig zu wissen.

Wenn Sie bei diesen Umrechnungen noch Schwierigkeiten hatten, so studieren Sie noch einmal Abschnitt 3.4.1 im Lehrbuch, ehe Sie hier weiterarbeiten.

Winkel im Uhrzeigersinn werden .... gezählt.

--------------------------------- ▷ 71

111

positiv im *ersten* und *vierten* Quadranten

negativ im *zweiten* und *dritten* Quadranten

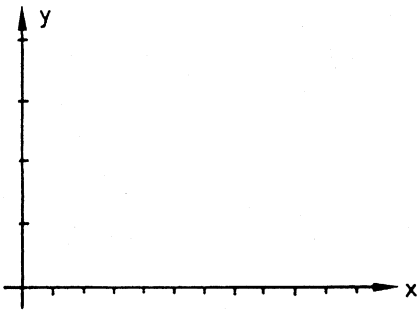
Den Ausdruck $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ bezeichnet man mit ....

$\cot\varphi =$ ....

--------------------------------- ▷ 112

30

Wählen Sie eine geeignete Einteilung der Koordinatenachsen, um die Funktion $y = 0{,}02x$ für den Definitionsbereich $0 \leq x \leq 1000$ darzustellen.



-------------------------------- ▷ 31

71

Negativ Hinweis: Die Festsetzung des Richtungssinns ist eine Konvention. Man muß sie akzeptieren und sich merken.

....

Rechnen Sie um vom Bogenmaß auf das Gradmaß. Es kommt nicht auf die Dezimalen an, sondern darauf, daß Sie das Prinzip der Umrechnung erfassen.

Danach können Sie mit Ihrem Taschenrechner kontrollieren.

Bogenmaß	Gradmaß
$3{,}14 = \pi$	$\hat{=}$ ....
1	$\hat{=}$ ....
0,1	$\hat{=}$ ....
1,79	$\hat{=}$ ....

-------------------------------- ▷ 72

112

$\tan \varphi$; $\quad \cot \varphi = \dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$

....

Aus der Definition $\tan \varphi = \dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ lassen sich die wichtigsten Eigenschaften der Funktion $y = \tan \varphi$ ablesen.

Die Tangensfunktion hat Nullstellen

bei φ = ...

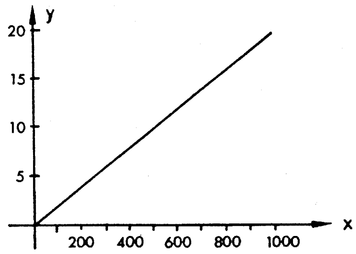
Pole bei φ = ...

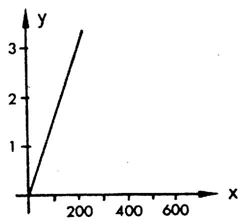
Es ist

$\tan \varphi = 1$ für $\varphi =$ ....

-------------------------------- ▷ 113

31





Wie heißt die Geradengleichung

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 32

72

3,14	$\hat{=}$	180°
1	$\hat{=}$	57°
0,1	$\hat{=}$	5,7°
1,79	$\hat{=}$	102°

Bogenmaß (φ) Gradmaß (α)

$2\pi \;\hat{=}\; 360°$

Umrechnungsformeln $\alpha = \ldots\ldots\ \varphi$

$\varphi = \ldots\ldots\ \alpha$

▷ 73

113

Nullstellen bei $\varphi = 0$,

Pole bei $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

$\tan\varphi = 1$ für $\varphi = + \frac{\pi}{4}$

▷ 114

32

$y = \frac{3}{200}x = 0{,}015x$

Alles richtig --------------------------------- ▷ 35

Weitere Erläuterung --------------------------------- ▷ 33

73

$\alpha = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \varphi \qquad \varphi = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha$

Diese Beziehungen müssen Sie tatsächlich im Kopf haben oder schnell herleiten können. Falls Sie hier noch Schwierigkeiten hatten, versuchen Sie selbst einmal unabhängig vom Buch, die Beziehung herzuleiten.

--------------------------------- ▷ 74

114

Drücken Sie den Sinus durch den Kosinus aus und umgekehrt. Es gibt mehrere Möglichkeiten. Finden Sie mindestens zwei:

$\sin\varphi$ = ...

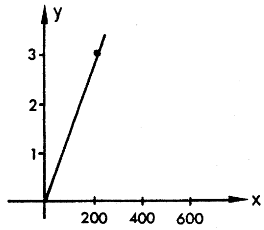
$\sin\varphi$ = ...

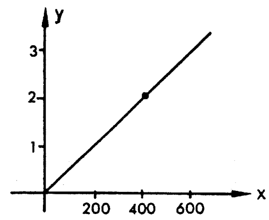
$\cos\varphi$ = ...

$\cos\varphi$ = ...

--------------------------------- ▷ 115

33





In dem Graphen sind 2 Punkte ausgewählt.

$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0$

$x_2 = 200, \qquad y_2 = 3$

Damit läßt sich die Steigung der Geraden y = a x berechnen.

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad a = \dfrac{3}{200}$

Wie lautet die Gleichung für den Graphen links

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 34

74

Sinusfunktion

Dieser Abschnitt im Lehrbuch ist länger. Vieles werden Sie noch aus der Schule kennen. Machen Sie bei der Erarbeitung eine Pause.

Notieren Sie die für sie neuen Begriffe und Definitionen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 3.4.2 Sinusfunktion
Lehrbuch, Seite 64-70

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt -------------------------------- ▷ 75

115

$\sin\varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$

$\cos\varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$

Vereinfachen Sie mit Hilfe der Tabelle im Lehrbuch, Seite 77 folgende Ausdrücke:

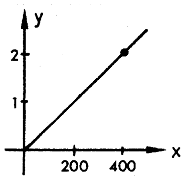
a) $\dfrac{\sin(\omega_1+\omega_2)+\sin(\omega_1-\omega_2)}{\cos(\omega_1+\omega_2)+\cos(\omega_1-\omega_2)}$ b) $\cos(45° + \alpha) + \cos(45° - \alpha)$

c) $\dfrac{\cos^2\varphi}{\sin 2\varphi}$

Diese Aufgaben stehen auch als Übungsaufgaben auf Seite 79 des Lehrbuches.

-------------------------------- ▷ 116

34



$$y = \frac{2}{400} = 0{,}005x$$

Ist die Geradengleichung aus dem Graphen zu bestimmen, so müssen zwei Punkte gegeben sein. Die Steigung läßt sich dann unmittelbar angeben als Quotient aus

der Differenz der y-Werte und

der Differenz der x-Werte.

Diese Differenzen lassen sich bei gegebener Skaleneinteilung immer ablesen. In allen hier betrachteten Fällen gingen die Geraden durch den 0-Punkt.

Falls Sie noch Schwierigkeiten haben, erfinden Sie sich selbst einige Aufgaben, bei denen Sie Definitionsbereich und Wertebereich willkürlich wählen.

-------------------------------- ▷ 35

75

Wir nehmen hier an, daß Sie in der Schule zumindest die geometrische Definition des Sinus gelernt haben. Diese wurde auch ganz kurz im vorhergehenden Leitprogramm zum Kapitel „Vektorprodukt" erklärt. Neu könnte für Sie die Übertragung auf die Konstruktion im Einheitskreis sein. Die Sinusfunktion ist eine .... - Funktion. Sie ist definiert für die Werte des Winkels:

☐ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

☐ $0 \leq \varphi < \infty$

☐ $-\infty < \varphi < +\infty$

-------------------------------- ▷ 76

116

In unregelmäßigen Abständen werden Aufgaben gestellt, deren Lösung sich nicht unmittelbar aus dem gerade bearbeiteten Abschnitt im Lehrbuch ergibt. Sie erfordern

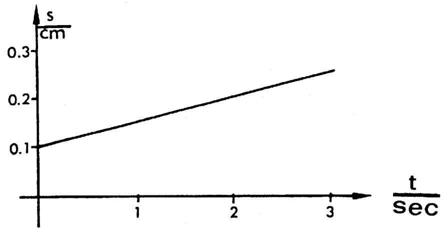
- manchmal Kenntnisse aus verschiedenen Kapiteln und Abschnitten,
- einfache physikalische Kenntnisse
- Überlegung und Anwendung einfacher Problemlösestrategien

Gerade die Kombination und Vernetzung verschiedener Kenntnisse im Hinblick auf ein komplexes Problem ist schwierig. Daher versuchen wir vernetzendes Denken ansatzweise zu üben.

-------------------------------- ▷ 117

35

Bei den Anwendungen treten an die Stelle der vertrauten Bezeichnungen x und y häufig andere Variable.



Wie lautet die Gleichung dieser Geraden?

$s =$ . . . .

Es handelt sich um die Fortbewegung einer Schnecke.

--------------------------------- ▷ 36

76

Trigonometrische Funktion

Definitionsbereich der Sinusfunktion: $-\infty < \varphi < +\infty$

....

Der Wert der Funktion $y = \sin x$ übersteigt nie den Wert $y_{\max} =$ . . . .

Der Wert der Funktion $y = \sin x$ wird nie kleiner als $y_{\min} =$ . . . .

Der Wertebereich von $\sin x$ ist also das Intervall

. . . . . $\leq \sin x \leq$ . . . . .

--------------------------------- ▷ 77

117

Problem:

Ein Satellit fliegt auf kreisförmiger Bahn mit konstanter Bahngeschwindigkeit in einer Höhe von 1700 km um die Erde.

Seine Umlaufzeit beträgt von der Erde aus gemessen $T = 2$ h.

Der Erdradius beträgt 6400 km.

Frage: Wie lange ist dieser Satellit von einem Beobachter über dem Horizont zu sehen?

. . . . Minuten

Schreiben Sie sich diese Aufgabe auf einen Zettel.

Bevor Sie mit dem Problem beginnen, lesen Sie bitte
die allgemeinen Bemerkungen auf der folgenden Seite. --------------------------------- ▷ 118

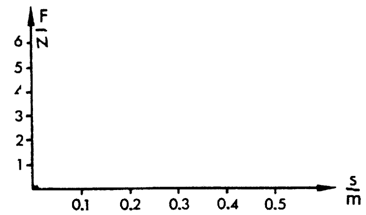
36

$s = 0{,}05\frac{cm}{sec} \cdot t \cdot sec + 0{,}1cm$

Eine Feder wird an einer Stelle eingespannt und aus ihrer Ruhelage ausgelenkt. Die Wertetabelle zeigt die Auslenkung und die dabei auftretende rücktreibende Kraft.

Auslenkung s m	Kraft F N
0	0
0,1	1,2
0,2	2,4
0,3	3,6
0,4	4,8
0,5	6,0

Zeichnen Sie den Graphen und geben Sie die Funktionsgleichung an.



$F = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ---------------------- ▷ 37

77

$y_{max} = +1$

$y_{min} = -1$

$-1 \leq \sin x \leq +1$

Wir können es auch so schreiben: $|\sin x| \leq 1$: Das heißt, der Betrag von $\sin x$ ist immer kleiner oder gleich 1.

Die Funktion $y = \sin x$ hat Nullstellen bei

$x = \ldots\ldots;\ \ldots\ldots;\ \ldots\ldots;\ \ldots\ldots;\ \ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 78

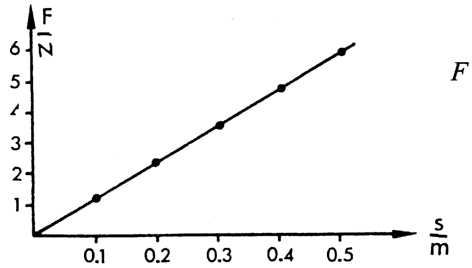
118

Für die Lösung eines Problems kann man so vorgehen:

1. Situationsanalyse
   Der verbal dargestellte Sachverhalt wird möglichst in eine Zeichnung übertragen. Bei unserem Problem empfiehlt sich eine Zeichnung und eine Überlegung, welche Größen bekannt sind.
2. Zielanalyse
   Man versucht, genau zu formulieren, welche Größe man wissen möchte. Dies ist in unserem Fall bereits klar gesagt.

-------------------------------- ▷ 119

37



$F = a \cdot s \qquad a = 12\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

Es handelt sich hier um das Beispiel von Seite 54 im Lehrbuch.

Eine Geläufigkeit in der Darstellung linearer Zusammenhänge und in der geschickten Wahl des Koordinatensystems werden Sie noch sehr oft gebrauchen.

-------------------------------- ▷ 38

78

$x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, \ldots\ldots$

Geben Sie zwei verschiedene Notationen für das Argument an:

$y = \sin$ ..

$y = \sin$ ..

Die Sinusfunktion hat die Periode ....

-------------------------------- ▷ 79

119

3. Problemlösung:

   Man versucht Verbindungen herzustellen zwischen den Werten, die man kennt und den Werten, die man nicht kennt.

   Wenn man keine direkte Verbindung herstellen kann, muß man Zwischenglieder suchen, die sich aus den bekannten Werten ergeben, und von denen man dann auf die gesuchte Größe schließen kann.

Jetzt folgt eine schrittweise Erarbeitung der Lösung -------------------------------- ▷ 120

Falls Sie die Aufgabe selbst lösen wollen, finden Sie die vollständige Lösung auf -- ▷ 122

38

Graphische Darstellung von Funktionen

Auch dieser Abschnitt im Lehrbuch enthält Inhalte, die Ihnen vermutlich bereits in der Schule begegnet sind. Je nach Ihren Vorkenntnissen werden Sie den Abschnitt schneller oder langsamer bearbeiten.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 3.3.3 Graphische Darstellung von Funktionen
Lehrbuch, Seite 60-61

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt -------------------------------- ▷ 39

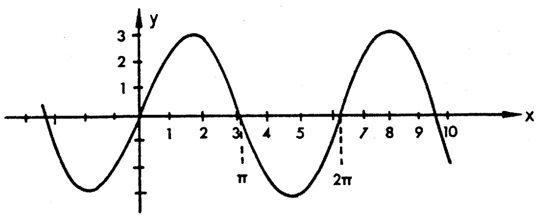
79

$y = \sin \varphi$ $y = \sin x$ oder ähnliche Formen. Die Periode ist 2π

Gegeben sei die Funktion

$y = A \sin x$ A heißt ....

In der Abbildung unten ist die Funktion $y =$ .... dargestellt.



-------------------------------- ▷ 80

120

1. Situationsanalyse: Hier reduziert bereits eine Skizze die gegebene Information auf die wesentlichen Daten. Zeichnen Sie Erde, Satellitenbahn und Beobachter und stellen Sie fest, welche Teile der Satellitenbahn sichtbar sind.
Die Verbindung der sichtbaren Teile der Satellitenbahn mit dem Erdmittelpunkt schließt den Winkel α ein.
2. Zielanalyse: Gesucht ist die Zeit T_s, die der Satellit braucht, um den sichtbaren Teil der Satellitenbahn zu durchfliegen.
3. Problemstellung: Wir fragen uns, welche Größen bekannt sind und welche gesucht sind. Von den bekannten Größen können wir nicht unmittelbar auf die Zeit T_s schließen. Wir können jedoch Zwischenglieder finden, die wir mit den bekannten Größen bestimmen können und aus denen wir dann die gesuchte Größe berechnen können.

Versuchen Sie zunächst die Skizze -------------------------------- ▷ 121

Falls Ihnen die Hinweise bereits reichen -------------------------------- ▷ 122

39

Bestimmen Sie die Nullstellen für die folgende Funktion

$y = x^2 - 4$

Nullstellen: ....

-------------------------------- ▷ 40

80

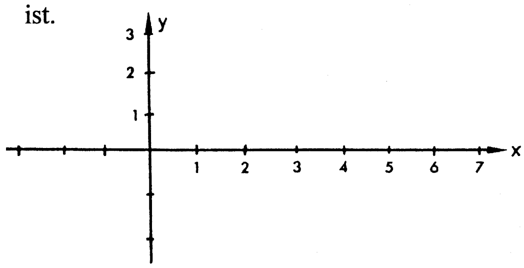
Amplitude

$y = 3 \sin x$

Skizzieren Sie freihändig die beiden Funktionen

$y = 2 \sin x$ und $y = -0{,}5 \sin x$

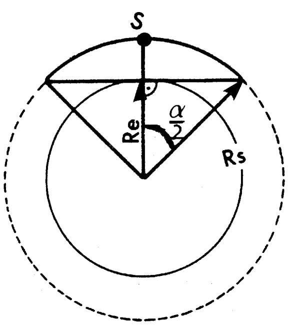
Es kommt nicht auf eine gute Zeichnung an. Wichtig ist, daß sie im Prinzip *richtig* skizziert ist.



-------------------------------- ▷ 81

121

In der Skizze nennen wir den sichtbaren Teil der Satellitenbahn *s*. Folgende Zwischengrößen lassen sich unmittelbar bestimmen:



Bahngeschwindigkeit aus Umlaufzeit und Bahnradius. Der *Bahnradius* setzt sich aus Höhe über der Erde und Erdradius zusammen.

Länge des sichtbaren Teils der Satellitenbahn aus Radius der Satellitenbahn und Winkel α.

Winkel α aus Erdradius und Radius der Satellitenbahn.

Letzter Hinweis: Die Aufgabe ist hier nicht vollständig erklärt. Der Rest ist Anwendung von Kenntnissen, die bereits erarbeitet wurden (Bogenmaß). Gelingt die Problemlösung jetzt?

Die vollständige Lösung finden Sie auf -------------------------------- ▷ 122

40

$x_1 = +2$

$x_2 = -2$

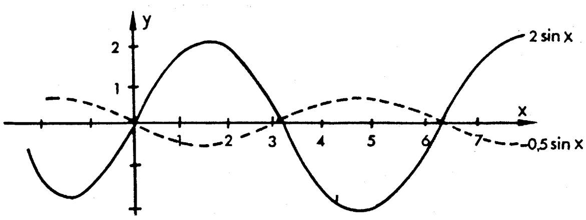
Falls Sie einen Fehler hatten prüfen Sie bitte anhand des Lehrbuches, Abschnitt 3.3.3, wo der Fehler liegt.

An welchen Stellen hat die Funktion $y = \frac{1}{x+1} - 1$ einen Pol?

Polstelle: ....

-------------------------------- ▷ 41

81



Fehler gemacht -------------------------------- ▷ 82

Alles richtig -------------------------------- ▷ *83

*Sie finden Lehrschritt 83 auf dem **unteren Drittel der Seiten**.

Lehrschritt 83 steht unterhalb Lehrschritt 1 und Lehrschritt 42. Dafür müssen Sie zurückblättern.

BLÄTTERN SIE ZURÜCK -------------------------------- ▷ 83

122

Lösung : $T_S = 0.422h = 25\,min$

Die Bezeichnungen beziehen sich auf die Figur im vorhergehenden Lehrschritt.
Folgende Beziehungen kommen zur Anwendung:

1. $v = \frac{2\pi R_s}{T}$

2. $T_S = \frac{s}{v} = \frac{s}{2\pi R_S} T$

3. $\frac{\alpha}{360°} = \frac{S}{2\pi R_S}$ $\qquad S = \frac{\alpha}{360°} 2\pi\, R_S$

   $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{R_e}{R_S} = \frac{6400}{8100} = 0.7901$

4. $\frac{\alpha}{2} = 38°$ $\qquad \alpha = 76°$

   $T_S = \frac{\alpha}{360°} \cdot T$

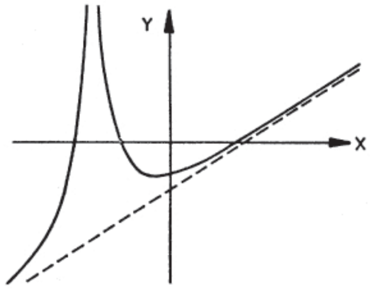
-------------------------------- ▷ 123

41

$x = -1$

Wieviele Nullstellen hat die gezeichnete Funktion? ....

Die gestrichelte Näherungsgerade nennt man: ....

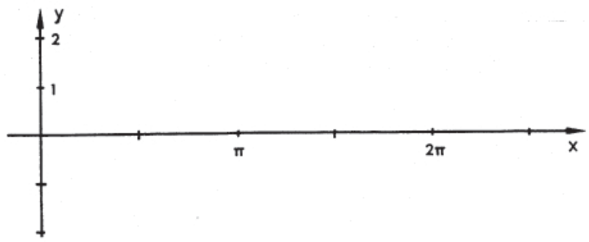


---------------------------------- ▷ 42

82

Lesen Sie im Lehrbuch erneut den Abschnitt „Amplitude", Seite 67 unten.

Beachten Sie, daß die Amplitude auch negative Werte annehmen kann. Skizzieren Sie die Funktion $y = -2 \sin x$



---------------------------------- ▷ 83

123

Worauf kommt es bei der Lösung an?

Man braucht den Lösungsweg nicht auf Anhieb zu finden. Wichtig ist, sich mit dem Problem aktiv auseinanderzusetzen und die einzelnen Denkschritte nachzuvollziehen und mitzurechnen.

des Kapitels.