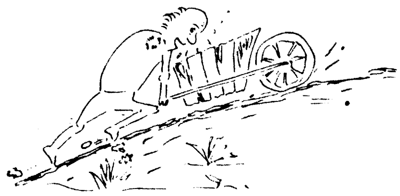
0

Kapitel 8

Komplexe Zahlen

1

Hier zunächst eine kurze Wiederholung des vorhergehenden Kapitels.



Nennen Sie in Stichworten die drei wichtigsten Punkte aus dem Kapitel 7 „Taylorreihen und Potenzreihenentwicklung“

1. ....

2. ....

3. ....

-------------------------------- ▷ 2

32

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3}-2i$$

....

Noch eine Division

$z_1 = 8+7i$ $\qquad$ $z_2 = 3+4i$

Gesucht $\frac{z_1}{z_2} =$ ....

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 34

Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 33

63

$w = e^{\gamma t} \cdot e^{i\omega t}$

$w = e^{\gamma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$

Schreiben Sie getrennt Realteil und Imaginärteil.

Realteil: ....

Imaginärteil: ....

-------------------------------- ▷ 64

2

1. Eine Funktion $f(x)$ ist einer unendlichen Potenzreihe der Form $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots$ äquivalent.
2. Die Koeffizienten der Potenzreihe lasssen sich bestimmen, wenn man die Ableitungen von $f(x)$ kennt.
$$a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$$
3. Mit Hilfe der Potenzreihen lassen sich Näherungspolynome für Funktionen bilden.

-------------------------------- ▷ 3

33

Um komplexe Zahlen zu dividieren, müssen wir zunächst den Nenner zu einer reellen Zahl machen. Wir wissen bereits, daß das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen immer eine reelle Zahl ergibt. Also erweitern wir den Bruch mit der konjugiert komplexen des Nenners.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(8+7i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{(8+7i)\cdot(3-4i)}{9+16} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 34

64

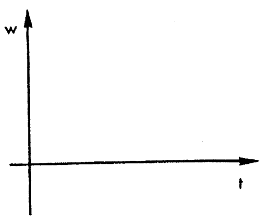
Realteil: $e^{\gamma t} \cdot \cos(\omega t)$

Imaginärteil : $e^{\gamma t} \cdot \sin(\omega t)$

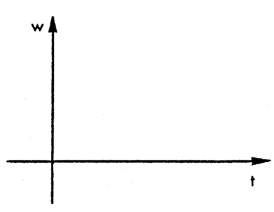
....

Skizzieren Sie den Graphen des Realteils der Funktion
$w = e^{\gamma t} \cdot e^{i\omega t} = e^{\gamma t}(\cos\omega t + i \sin\omega t)$

a) $\gamma > 0$



b) $\gamma < 0$



----------------- ▷ 65

3

Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen

Die praktische Bedeutung der komplexen Zahlen liegt darin, daß sie die Lösung von Differentialgleichungen erleichtern werden, besonders von Differentialgleichungen, die bei Schwingungsproblemen auftreten.

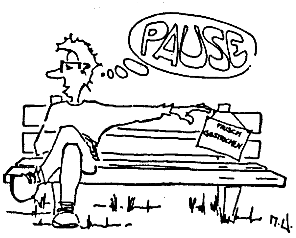
STUDIEREN SIE im Lehrbuch 8.1 Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen
Lehrbuch, Seite 183 - 186

BEARBEITEN SIE danach --------------------------------- ▷ 4

34

2,08 - 0,44i

So, und nun haben Sie wirklich einen erheblichen Fortschritt gemacht und sich eine Pause redlich verdient.



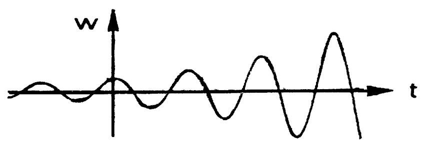
--------------------------------- ▷ 35

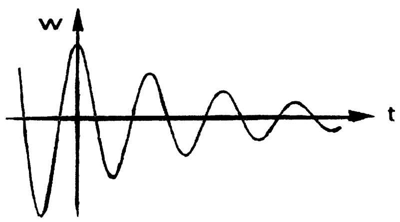
65

Der Realteil von $w(t) = e^{\gamma t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$ ist: $e^{\gamma t} \cdot \cos\omega t$

Sein Graph stellt dar:

a) $\gamma > 0$ angefachte Kosinusschwingung b) $\gamma < 0$ gedämpfte Kosinusschwingung





--------------------------------- ▷ 66

4

Welche der folgenden Zahlen ist eine *imaginäre* Zahl?

☐ i^2 --------------------------------- ▷ 5

☐ 4i --------------------------------- ▷ 7

☐ 4 + 4i --------------------------------- ▷ 6

35

Komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

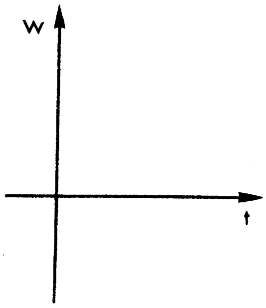
STUDIEREN SIE im Lehrbuch 8.2 Komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene
Lehrbuch, Seite 186 - 188

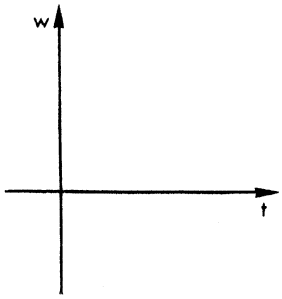
BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 36

66

Skizzieren Sie jetzt den Imaginärteil von $w = e^{\gamma t} \cdot e^{i\omega t} = e^{\gamma t}(\cos \omega t + i \sin \omega t)$

a) $\gamma > 0$ b) $\gamma < 0$





------------------- ▷ 67

5

Hier haben Sie einen Fehler gemacht.
i ist eine imagniäre Zahl aber es gilt $i^2 = -1$. Die Zahl -1 ist reell.

Noch einmal:
Welche der folgenden Zahlen ist eine *imaginäre* Zahl?

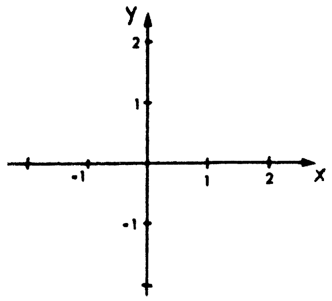
☐ 4i -------------------------------- ▷ 7

☐ 4 + 4i -------------------------------- ▷ 6

36

Zeichnen Sie den Punkt P(*z*) ein, der zu der komplexen Zahl gehört.

$z = 1 - 2i$



-------------------------------- ▷ 37

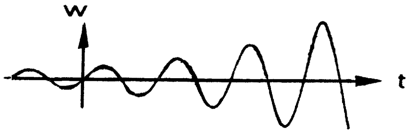
67

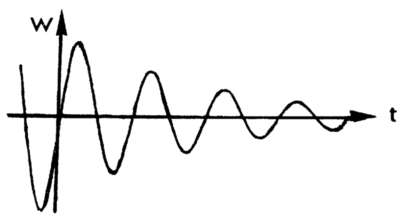
Der Imaginärteil von $w = e^{\gamma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ ist: $e^{\gamma t}\cdot\sin\omega t$

Sein Graph stellt dar

a) $\gamma > 0$ angefachte Sinusschwingung

b) $\gamma < 0$ gedämpfte Sinusschwingung



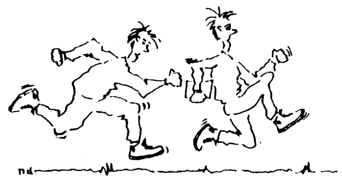


58

6

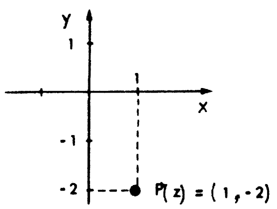
Beinahe richtig, aber nicht ganz.

$4 + 4i$ ist eine *komplexe* Zahl. Sie besteht aus der reellen Zahl 4 und der *imaginären* Zahl $4i$.
$4i$ ist eine *imaginäre* Zahl.



--------------------------------- ▷ 7

37

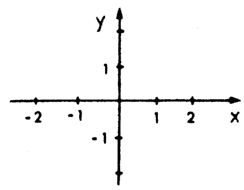


Zeichnen Sie die Punkte für die drei komplexen Zahlen

$z_1 = 1 + i$

$z_2 = -2 + i$

$z_3 = -2i$



--------------------------------- ▷ 38

68

Multiplikation und Division komplexer Zahlen
Potenzieren und Wurzelziehen komplexer Zahlen
Periodizität von e^{ia}

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

8.3.4 Multiplikation und Division komplexer Zahlen
8.3.5 Potenzieren und Wurzelziehen komplexer Zahlen
8.3.6 Periodizität von $e^{i\alpha}$
Lehrbuch Seite 193 - 195

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 69

7

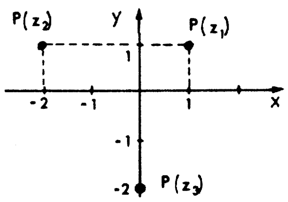
RICHTIG!

Vereinfachen Sie jetzt $i^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden ---------------------------------- ▷ 9

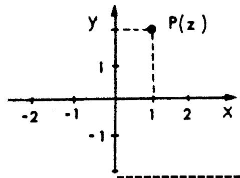
Hilfe erwünscht ---------------------------------- ▷ 8

38



....

Bestimmen Sie aus der nebenstehenden Figur Realteil x und Imaginärteil y der Zahl z.



$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ---------------------------------- ▷ 39

69

Gegeben seien die beiden komplexen Zahlen

$$z_1 = 2e^{i\varphi_1} \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$z_2 = 2e^{i\varphi_2} \qquad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$z_1 \cdot z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden ---------------------------------- ▷ 71

Hilfe erwünscht ---------------------------------- ▷ 70

8

Wir wissen: $i^2 = -1$

Um einen Ausdruck wie i^6 zu vereinfachen, zerlegen wir ihn, soweit es geht, in Produkte von $i^2 = (-1)$

Beispiel: $i^6 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

Nun fällt es Ihnen sicher leicht

$i^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 9

39

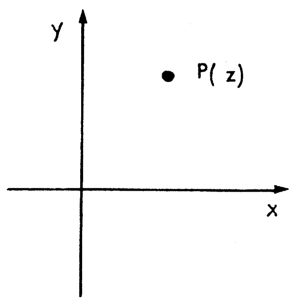
$z = 1 + 2i$

Gegeben ist jetzt eine komplexe Zahl

$z = x + iy$

Nun kann man den Punkt $P\,(z)$ auch durch Polarkoordinaten r und φ festlegen.

Zeichnen Sie r und φ in die Zeichnung ein.



--------------------------------- ▷ 40

70

Beim Multiplizieren werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

Beispiel:

$$z_1 = e^{i\pi}$$
$$z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot e^{\left(i\pi + i\frac{2\pi}{3}\right)} = 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Lösen Sie jetzt: $z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_1 \cdot z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 71

9

$i^4 = 1$

Potenzen von i löst man auf, indem man die Potenz, soweit es geht, in Produkte von $i^2 = (-1)$ zerlegt.

Ein Verfahren wie dieses, das zwangsläufig zur Lösung eines Problems führt, nennt man einen *Algorithmus* oder auch *Lösungsalgorithmus*.

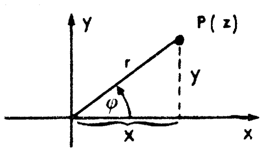
Kennt man den Lösungsalgorithmus einer Aufgabe, dann hat man die Lösung in der Tasche.

Rechnen Sie noch aus: $i^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$i^8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 10

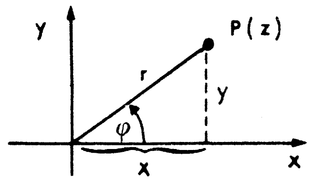
40



z sei in den beiden Formen gegeben:
$z = x + iy$ und $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
Drücken Sie x und y aus durch r und φ

$x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



Können Sie die Beziehungen aus der Zeichnung ableiten ?

Ja --------------------------------- ▷ 42
Nein --------------------------------- ▷ 41

71

$z_1 \cdot z_2 = 4e^{i\pi}$

Berechnen Sie den Quotienten aus den beiden komplexen Zahlen

$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\frac{z_1}{z_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 73

Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 72

10

$i^5 = i^2 \cdot i^2 \cdot i = (-1)\,(-1) \cdot i = i$
$i^8 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = 1$

Berechnen Sie:

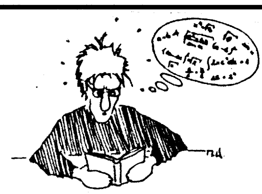
$$\sqrt{-9} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-4} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 12

Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 11

41

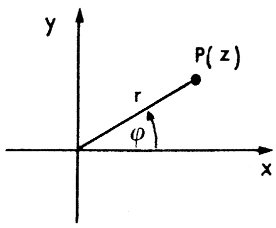
Sehen Sie im Lehrbuch nach, und zwar entweder in der Formelsammlung Seite 190 oder in Abschnitt 8.2.2, Seite 187.



Drücken Sie x und y aus durch r und φ.

$x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



-------------------------------- ▷ 42

72

Bei der Division sind die Beträge zu dividieren und die Winkel voneinander abzuziehen.

Beispiel: $z_1 = 4 \cdot e^{i2\pi}$

$z_2 = 2 \cdot e^{i\pi}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2} \cdot e^{i2\pi - i\pi} = 2 \cdot e^{i\pi}$

Nun rechnen Sie nach diesem Schema die alte Aufgabe

$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\frac{z_1}{z_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 73

11

Hier ist die Folge der Umformungen für die Aufgabe $\sqrt{-25}$

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25\cdot(-1)} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{-1} = 5i$$

Lösen Sie nun $\sqrt{-9} =$ ....

$\sqrt{-16}\cdot\sqrt{-4} =$ ....

-------------------------------- ▷ 12

42

$x = r\cdot\cos\varphi$

$y = r\cdot\sin\varphi$

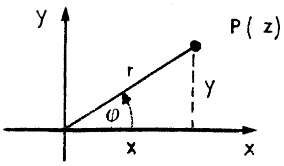
Tun Sie jetzt das Umgekehrte:

Drücken Sie r, $\tan\varphi$ und φ aus durch die Größen x und y.

$r =$ ....

$\tan\varphi =$ ....

$\varphi =$ ....



Hinweis: Die Umkehrfunktion zur Tangensfunktion ist im Lehrbuch auf Seite 97 erläutert. Bei Unsicherheit dort kurz wiederholen.

-------------------------------- ▷ 43

73

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

....

Hier folgen kurze Bemerkungen über Fehler und Rückkopplung beim Lernen.

Will Bemerkung überschlagen -------------------------------- ▷ 77

Bemerkung zu Fehlern und der Rückkopplung beim Lernen -------------------------- ▷ 74

12

$\sqrt{-9} = 3i$

$\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-4} = -8$ Erläuterung: $\sqrt{16}\sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}\sqrt{-1} = 4 \cdot i \cdot 2 \cdot i = -8$

Die Wurzel aus einer negativen Zahl wird immer nach demselben Algorithmus gezogen:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot i$$

Lösen Sie

$$\sqrt{-b^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt{25} + \sqrt{-9} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 13

43

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\tan\varphi = \frac{y}{x}$ Hinweis: φ ist der Winkel, dessen Tangens den Wert $\frac{y}{x}$ hat.

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

Jetzt ein weiteres Beispiel: Eine komplexe Zahl z sei in der folgenden Form gegeben:

$z = a^2 + (b + c)i$ a^2, b, c seien reell.

Wie schreibt sich z in der Form $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\tan\varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 45
Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 44

74

Empirisch gut belegt ist folgender Befund:

Ein Kurs A wird unterrichtet und wöchentlich wird eine Arbeit geschrieben und besprochen.

Ein Kurs B wird in gleicher Weise unterrichtet. Es werden aber keine Kontrollarbeiten geschrieben.

In allen untersuchten Fällen ist der Lernzuwachs im Kurs A größer. Die Leistungskontrollen und die Diskussion der Fehler wirken sich positiv auf die Lernvorgänge aus. Auch wenn sie zunächst als unbequem und störend empfunden werden.

-------------------------------- ▷ 75

13

$b \cdot i$

$5+3i$

Vereinfachen Sie

a) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{-8} =$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} =$ ....

c) $\dfrac{1}{(-i)^3} =$ ....

Lösung gefunden ---------------------------------- ▷ 15
Hilfe erwünscht ---------------------------------- ▷ 14

44

Hinweise: Es war: $z = a^2 + (b+c)i$

Wir vergleichen mit der allgemeinen Form $z = x + iy$. In unserem Fall gilt also

$$x = a^2$$
$$y = (b+c)$$

Dann ist $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots}$

Weiter gilt $\tan\varphi = \dfrac{y}{x} =$ ....

Schließlich $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x} = \arctan$ ....

---------------------------------- ▷ 45

75

Die Rückmeldung hat zwei Funktionen:

- Identifizierung von Lerndefiziten
- Bestätigung und Bekräftigung erfolgreichen Lernverhaltens

Das Lernen ist umso wirksamer, je weniger Zeit zwischen Lernvorgang und Rückmeldung liegt.

Die Rückmeldung über die Richtigkeit einer Aufgabenlösung kann über *Fremdkontrolle* oder *Selbstkontrolle* erfolgen.

---------------------------------- ▷ 76

14

Hier ist ein Teil des Rechenganges.

a) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-8}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{-8}=\sqrt{2}\cdot i\cdot\sqrt{8}\cdot i+\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot i=\sqrt{16}\cdot(-1)+\sqrt{16}\cdot i=$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}=\dfrac{i\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=$ ....

c) $\dfrac{1}{(-i)^3}=\dfrac{1}{(-1)^3\cdot i^3}=\dfrac{1}{(-1)(-1)\cdot i}=\dfrac{1}{i}$

Jetzt erweitern wir

$\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{i}{i}=$ ....

-------------------------------- ▷ 15

45

$r=\sqrt{a^4+(b+c)^2}$ $\tan\varphi=\frac{b+c}{a^2}$ $\varphi=\arctan\frac{b+c}{a^2}$

....

Gegeben sei $z = 1 + i$

Bringen Sie z in die Form

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$z=$ ....

Schaffen Sie es auf Anhieb -------------------------------- ▷ 47

Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 46

76

Die *Selbstkontrolle* erfolgt hier so:

1. Phase Rechnung selbständig mit möglichst wenig Hilfe durchführen.

2. Phase Vergleich mit vorgegebener Lösung.

3. Phase Ist das Ergebnis richtig, so kann der Erfolg sich positiv auf die Lernmotivation auswirken. Ist das Ergebnis falsch, so beginnt die Suche nach
   a) Flüchtigkeitsfehlern,
   b) systematischen Fehlern.

4. Phase Ist ein systematischer Fehler gefunden, Ursache beseitigen. Das heißt in den meisten Fällen einen Lehrbuchabschnitt mit den dazugehörenden Aufgaben wiederholen.

Es ist also daher nicht einmal abwegig festzustellen, daß wir durch Fehler besonders wirksam lernen. Vorausgesetzt, wir haben sie *identifiziert*, *analysiert* und die *Ursachen beseitigt*.

-------------------------------- ▷ 77

15

a) $-4 + 4i$

b) $\sqrt{2}i$

c) $-i$

....

Die allgemeine Form einer *komplexen Zahl* ist: $z = x + iy$

Dann heißt: x: ....

Dann heißt: y: ....

--------------------------------- ▷ 16

46

Gegeben: $z = 1 + i$

Also ist: $x = 1$ und $y = 1$

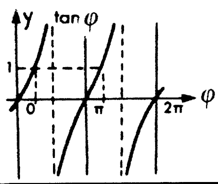
Gesucht: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Wir müssen r und φ aus x und y bestimmen.

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$ und $\tan\varphi = \frac{y}{x} = 1$

$\varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{5\pi}{4}$

Wenn wir φ von 0 bis 2π laufen lassen,
hat der Tangens zweimal den Wert 1.
Welchen Wert nehmen wir? $\varphi =$ ....



------------- ▷ 47

77

Wir wollen den Ausdruck $4e^{i\pi}$ vereinfachen.
Zeichnen Sie zunächst den Punkt $z = 4e^{i\pi}$ in die Gaußschen Zahlenebene ein.
Ermitteln Sie dann seinen Real- und Imaginärteil und schreiben Sie z in der Form $x + iy$.

$z =$ ....

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 79

Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 78

16

x = Realteil

y = Imaginärteil

Gegeben sei jetzt eine komplexe Zahl $z = i\,(a^2 + b^2) - xt$

x, t, a^2 und b^2 seien reell.

Was ist hier der Imaginärteil?

☐ $a^2 + b^2$

☐ $i\,(a^2 + b^2)$

▷ 17

47

$\varphi = \frac{\pi}{4}$

Richtig?

Schreiben Sie jetzt hin, wie die komplexe Zahl in der Schreibweise mit Winkelfunktionen aussieht; wir haben jetzt

$r = \sqrt{2}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ $z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Weitere Erläuerung ▷ 49

Hilfe erwünscht ▷ 48

78

Betrachten wir: $z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Bekannt ist damit: Betrag $r = 2$ Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

In der Gaußschen Zahlenebene ist z eingezeichnet.

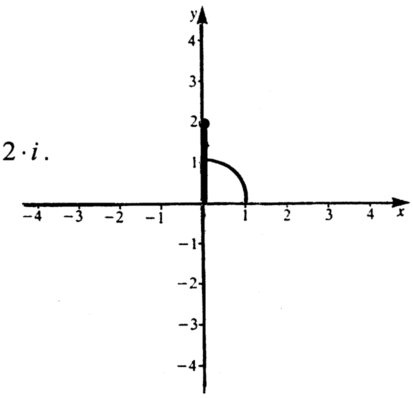
In der Darstellung $z = x + iy$ erhalten wir dafür $z = 0 + 2 \cdot i$.

Zeichnen Sie nun ein

$z = 4 \cdot e^{i\pi}$

Geben Sie z an in der Form $z = x + iy$

$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



▷ 79

17

$a^2 + b^2$

Viele Anfänger lassen sich durch den Namen „Imaginärteil“ verwirren. Der Imaginärteil ist der Vorfaktor, auch „Koeffizient“ genannt, der bei i steht.

Der Imaginärteil ist eine reelle Zahl – obwohl der Name das Gegenteil suggeriert.

Die imaginäre Zahl entsteht erst durch das Produkt

$$(a^2 + b^2)\, i$$

Was ist der Imaginärteil der komplexen Zahl $z = 25i + \sqrt{2}i + 2$

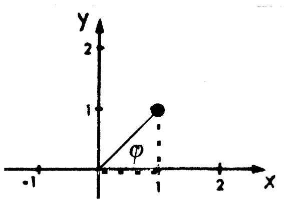
Imaginärteil: ....

---------------------------------- ▷ 18

48

Die Gleichung $\varphi = \arctan 1$ hat zwei Lösungen – nämlich: $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Das Problem ist, den richtigen Winkel zu bestimmen. Das tun wir, indem wir $z = 1 + i$ in der Gaußschen Zahlenebene zeichnen. Dann ergibt sich φ automatisch.



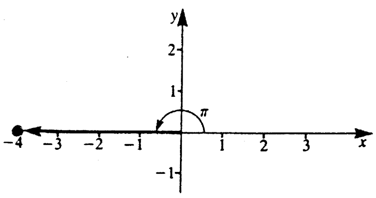
$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Dementsprechend: $z = \sqrt{2}$ (...........)

---------------------------------- ▷ 49

79

$z = 4 \cdot e^{i\pi} = -4$



Gegeben sei $z = 4 \cdot e^{i\pi}$

Rechnen Sie z^3 aus!

$z^3 =$ ....

---------------------------------- ▷ 80

18

$(25+\sqrt{2})$

Jetzt sei eine komplexe Zahl gegeben

$k = 3 + 4i$

Wie heißt die dazu *konjugiert-komplexe* Zahl?

$k^* =$ ....

--------------------------------- ▷ 19

49

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Noch ein Beispiel: Gegeben sei

$z = -1 + i$

Dies ist auf die folgende Form zu bringen:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r =$ ....

$\varphi =$ ....

$z =$ ....

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 51
Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 50

80

$z^3 = 64e^{i3\pi}$

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 83

Fehler gemacht oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 81

19

$k^* = 3 - 4i$

Hinweis: Aus einer komplexen Zahl erhält man die *konjugiert komplexe*, indem man i durch $-i$ ersetzt.

Berechnen Sie die Summe aus 2 komplexen Zahlen:

$$z_1 = 1 + i$$
$$z_2 = -3 - i$$
$$z_1 + z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 21

Erläuterung erwünscht --------------------------------- ▷ 20

50

1. Schritt: $z = -1 + i$
Gegeben: $x = -1$, $y = +1$
Gesucht: r, φ

2. Schritt: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$

$\tan\varphi = \frac{y}{x} = -1$

$\varphi = \arctan -1 = \frac{3\pi}{4}$ oder $\frac{7\pi}{4}$

3. Schritt: Die Gaußsche Zahlenebene zeigt,
daß $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

4. Schritt: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 51

81

Die Aufgabe war:

Gegeben: $z = 4 \cdot e^{i\pi}$ Gesucht: $z^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Hier ist der Rechengang:

$$z = 4 \cdot e^{i\pi}$$
$$z^2 = 4 \cdot 4 \cdot e^{i(\pi+\pi)}$$
$$z^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot e^{i(\pi+\pi+\pi)}$$
$$z^3 = 64 \cdot e^{i3\pi}$$

--------------------------------- ▷ 82

20

Hier ist der Rechengang: $z_1 = 1 + i$

$z_2 = -3 - i$

Realteil und Imaginärteil werden für sich addiert:

$$z_1 + z_2 = (1-3) + (1-1)i = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 21

51

$r = \sqrt{2}$

$\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4})$

....

Die Umrechnung einer komplexen Zahl z von der Form $x + iy$ auf die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist im Prinzip einfach. Die einzige Schwierigkeit ist die Bestimmung von φ, weil die Gleichung $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ zwei Lösungen hat. Hier hilft ein Blick auf die Gaußsche Zahlenebene.

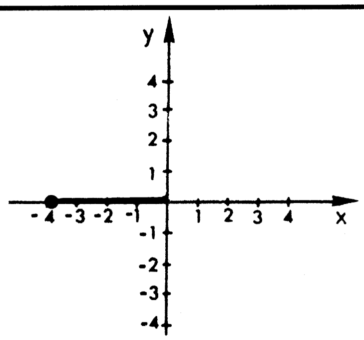
--------------------------------- ▷ 52

82

Ziehen Sie die Quadratwurzel aus

$z = 4 \cdot e^{i\pi}$

$\sqrt{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots$



Tragen Sie die Wurzel in der Gaußschen Zahlenebene ein.

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 84

Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 83

21

$z = -2$

Subtrahieren Sie und ordnen Sie nach Real- und Imaginärteil

$$z_1 = 3 + 5i$$
$$z_2 = 1 + 3i$$
$$z_1 - z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 22

52

Die Exponentialform einer komplexen Zahl

In diesem Abschnitt brauchen wir die Taylorreihe für die Funktion e^x . Sicher wissen Sie noch aus dem vorigen Kapitel, wie sie aussieht. Schreiben Sie die Taylorreihe auf einen Zettel und legen Sie ihn neben das Lehrbuch, damit Sie die Formel während des Lesens zur Hand haben.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

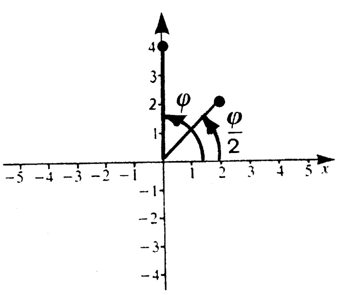
8.3.1 Eulersche Formel
8.3.2 Umkehrformeln zur Eulerschen Formel
8.3.3 Komplexe Zahlen als Exponenten
Lehrbuch Seite 189 - 193

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 53

83

Gegeben sei $z_1 = 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

Man zieht die Wurzel aus einer komplexen Zahl, indem man aus dem Betrag die Wurzel zieht und den Winkel durch den Wurzelexponenten – er ist hier 2 – teilt.



$$\sqrt[2]{z_1} = \sqrt[2]{4} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(i\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$= 2 \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}$$

Das ist links in der Gaußschen Zahlenebene demonstriert.

Tragen Sie jetzt ein $z = 4 \cdot e^{i\pi}$ und ziehen Sie die Wurzel

$\sqrt[2]{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 84

22

$2 + 2i$

Multiplizieren Sie zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = 3 + 5i$$
$$z_2 = 2 + 4i$$
$$z_1 \cdot z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 24

Erläuterung erwünscht --------------------------------- ▷ 23

53

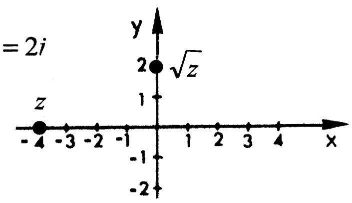
Schreiben Sie eine allgemeine komplexe Zahl z in der Exponentialform:

$$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 54

84

$\sqrt{z} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$



Hinweis: Die Aufgabe ließ sich auch einfacher lösen:

$z = 4 \cdot e^{i\pi} = -4$ $\sqrt{z} = 2i$

Gegeben sei eine komplexe Zahl in der Form $z = x + iy$, und zwar sei $z = 1 + i$.

Gesucht ist z in Exponentialschreibweise.

$$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 86

Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 85

23

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen wird gelöst wie die Multiplikation zweier Klammerausdrücke $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Beispiel:

$$z_1 = (2+i)$$
$$z_2 = (1-2i)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (2+i) \cdot (1-2i) = 2 - 4i + i + 2 = 4 - 3i$$

Nun lösen Sie die alte Aufgabe

$$z_1 = (3+5i)$$
$$z_2 = (2+4i)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (3+5i) \cdot (2+4i) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 24

54

$z = r \cdot e^{i\varphi}$

....

Zwischen der Exponentialfunktion $e^{i\varphi}$ und den Winkelfunktionen Sinus und Kosinus bestehen mathematische Beziehungen. Diese brauchen Sie nicht auswendig zu wissen; Sie müssen aber wissen, daß es sie gibt und wo man sie findet.

Suchen Sie die *Eulersche Formel* aus der Formelzusammenstellung oder dem Lehrbuch heraus!

Die Eulersche Formel lautet: ....

-------------------------------- ▷ 55

85

1. $z = 1 + i$.

   Damit ist $x = 1$

   $y = 1$

2. Nach den Umrechnungsgleichungen erhalten wir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = 1$$
$$\varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{5\pi}{4}$$

3. Darstellung von z in der Gaußschen Zahlenebene ergibt $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

4. Die komplexe Zahl heißt jetzt in Exponentialschreibweise $z = \ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 86

24

$-14+22i$

Nun wird es mühsamer, aber nicht wirklich schwieriger

$z_1 = 1+i$ $z_2 = 2+3i$ $z_3 = 1-4i$

Berechnen Sie das Produkt

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 =$ ....

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 26

Erläuterung erwünscht --------------------------------- ▷ 25

55

Eulersche Formel: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Die beiden Umkehrformeln sind:

$\cos\varphi =$ ....

$\sin\varphi =$ ....

--------------------------------- ▷ 56

86

$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Bringen Sie in die Exponentialform

$z = 1 - i$

$z = r \cdot e^{i\varphi} =$ ....

--------------------------------- ▷ 87

25

Da wir drei Faktoren haben, gehen wir schrittweise vor und multiplizieren zunächst zwei Faktoren und dann das Ergebnis mit dem dritten Faktor.
Beispiel:

$$z_1 = (2+i) \qquad z_2 = (1-2i) \qquad z_3 = (1+2i)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= (2+i)\cdot(1-2i)\cdot z_3 \\ &= (4-3i)\cdot z_3 = (4-3i)\cdot(1+2i) \\ &= 10+5i \end{aligned}$$

Multiplizieren Sie jetzt: $z_1 = 1+i$ $\qquad z_2 = 2+3i$ $\qquad z_3 = 1-4i$

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 26

56

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

Eine wichtige Eigenschaft der Umkehrformeln zu den Eulerschen Formeln ist die folgende:
Links stehen reelle Winkelfunktionen.

Rechts dagegenn stehen die komplexen Funktionen $e^{\pm\varphi}$.

Man kann also aus der Summe oder der Differenz von $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ reelle Funktionen bilden.
Diese Tatsache wird in der mathematischen Behandlung von Schwingungen (Kapitel 9) von größter Bedeutung sein.

---------------------------------- ▷ 57

87

$$z = \sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

....

Wir betrachten $z(\varphi) = re^{i\varphi}$ als Funktion von φ, wie es in der Schreibweise z (φ) angedeutet ist.

Welche Periode hat z (φ)?

....

---------------------------------- ▷ 88

26

$19 + 9i$

Multiplizieren Sie eine komplexe Zahl mit ihrer konjugiert-komplexen $z \cdot z^*$

$$z = 4 + 2i$$

$$z^* = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z \cdot z^* = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lösung gefunden ---------------------------------- ▷ 28

Erläuterung erwünscht ---------------------------------- ▷ 27

57

Gegeben sei $z = r \cdot e^{i\varphi}$.
Wie heißt die konjugiert-komplexe Zahl z^*?

$$z^* = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lösung gefunden ---------------------------------- ▷ 59

Hilfe erwünscht ---------------------------------- ▷ 58

88

$z(\varphi) = re^{i\varphi}$ hat die Periode 2π.

Allgemein gilt: $re^{i\varphi} = re^{i(\varphi \pm 2k\pi)}$

$$k = 1, 2, 3 \cdots$$

Es sei $z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$.
Berechnen Sie z^6

$$z^6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---------------------------------- ▷ 89

27

z^* ist die zu z konjugiert-komplexe Zahl. Es sei $z = 1 + 2\,i$. Dann ist $z^* = 1 - 2\,i$

Das Produkt: $z \cdot z^* = (1+2i)\,(1-2i) = 1 + 4 = 5$

Rechnen Sie nun

$$z = 4 + 2i$$

$$z^* = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z \cdot z^* = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 28

58

Sie erhalten die konjugiert-komplexe Zahl aus der komplexen, indem Sie i durch $-i$ ersetzen.

1. Beispiel $z = a + ib$ $z^* = a - ib$

2. Beispiel $z = r \cdot e^{i\varphi}$ $z^* = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Machen Sie sich dies in der Gaußschen Zahlenebene klar.

--------------------------------- ▷ 59

89

$z^6 = 64 \cdot e^{i2\pi} = 64$

Geben Sie das Produkt und den Quotienten der zwei komplexen Zahlen an.

$$z_1 = 3 \cdot e^{i\pi}$$

$$z_2 = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 90

28

$$z = 4 + 2i$$
$$z^* = 4 - 2i$$
$$z \cdot z^* = 32$$

Hinweis: Das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl ist immer eine Reelle Zahl.

Gegeben sei $z_1 = 27 + \sqrt{3}i$ und $z_2 = 3 \cdot \sqrt{3}$.

Was ergibt die Division $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lösung gefunden ---------------------------------- ▷ 30

Hilfe erwünscht ---------------------------------- ▷ 29

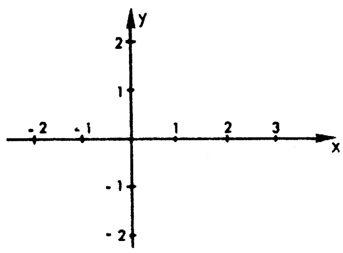
59

$$z^* = re^{-i\varphi}$$

Gegeben $z = 3 + 2i$. Zeichnen Sie z und die konjugiert-komplexe Zahl z^* in die Gaußsche Zahlenebene ein.

Zeichnen Sie dann auch die folgende Darstellung ein:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$
$$z^* = r \cdot e^{-i\varphi}$$



---------------------------------- ▷ 60

90

$$z_1 \cdot z_2 = 15 \cdot e^{i \cdot \frac{5}{4}\pi}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5} \cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Obwohl Sie jetzt Grundkenntnisse auf dem Gebiet der komplexen Zahlen haben, kann es sein, daß Sie mehr über komplexe Zahlen wissen wollen oder müssen.
Angenommen Sie suchen ein weiterführendes Buch. Sie gehen in eine Bücherei (Seminarbücherei, Universitätsbücherei). Sie werden vielleicht anfangen, die Bücherrücken zu studieren. Schließlich werden Sie jemanden um Rat fragen. Dann wird man Sie auf die sogenannte *Kartei* verweisen. Die gebräuchlichsten Formen einer Kartei sind die Autorenkartei und die Sachkartei.
Wissen Sie, wie man mit solchen Karteien umgeht?

Ja ---------------------------------- ▷ 94

Nein ---------------------------------- ▷ 91

29

Hier ist der Beginn des Rechengangs. Gesucht: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{27+\sqrt{3}i}{3\cdot\sqrt{3}}$.

Erste Umformung: Wir trennen Realteil und Imaginärteil

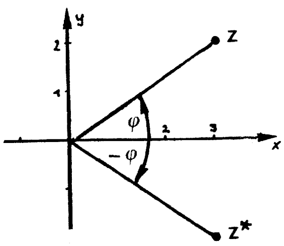
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{27}{3\cdot\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}i}{3\cdot\sqrt{3}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jetzt können Sie die Lösung sicher angeben:

$$\frac{z_1}{z_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 30

60



$z = 3 + 2i$

$z^* = 3 - 2i$

Gegeben sei der Ausdruck $z = a + ib$

$w = e^z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 61

91

Es gibt zwei Karteien: Autorenkartei und Sachkartei.

In der *Autorenkartei* sind die Karten oder Computereinträge nach den Autoren geordnet, und zwar in alphabetischer Reihenfolge. Dabei ist für jedes Buch ein besonderes Kärtchen oder Eintrag reserviert.

Die *Sachkartei* enthält ebenfalls die Karten oder Computereinträge aller Bücher, aber in einer anderen Ordnung. Die Sachkartei ist in die Sachgebiete unterteilt. Innerhalb dieser Sachgebiete – Mathematik, Chemie, Zahlenheorie, Differential- und Integralrechnung ...– sind die Einträge meist alphabetisch nach Autoren geordnet.

Angenommen, sie wollen mehr über komplexe Zahlen wissen. Nehmen wir weiter an, Sie stünden vor einer Sachkartei, in der u.a. folgende Stichworte zu finden sind:

> Grundlagen der Mathematik, Geometrie, Zahlentheorie, Funktionentheorie, Analysis, Mengenlehre, Lehrbücher der Mathematik, Mathematik für Naturwissenschaftler, Nachschlagewerke und Lexika.

-------------------------------- ▷ 92

30

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{9}{\sqrt{3}} + \frac{i}{3} = 3\sqrt{3} + \frac{i}{3}$$

Dividieren Sie $\frac{4-\sqrt{3}i}{2i} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Hilfe erwünscht ---------------------------------- ▷ 31
Lösung gefunden ---------------------------------- ▷ 32

61

$$w = e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$$

Gegeben sei $z = x + iy$

$w = e^z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Gegeben sei $z = (a + ib) \cdot t$

$\overline{w} = e^z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 62

92

Für eine kurze Übersicht empfiehlt sich das Stichwort „Nachschlagewerke und Lexika".

Naturwissenschaftler schauen auch unter dem Stichwort „Mathematik für Naturwissenschaftler" nach.

Grundlegende Erörterungen, findet man unter dem Stichwort „Lehrbücher der Mathematik".

Auf den Karten oder Computereinträgen ist meist oben rechts eine *Signatur* zu sehen. Die Signatur ist eine Buchstaben- und Zahlenkombination, z.B. Ma 31, die auch auf dem Rücken oder auf der Vorderseite des betreffenden Buches steht. Sie brauchen in den Regalen also jetzt nur nach dieser Signatur zu suchen.

---------------------------------- ▷ 93

31

Wir formen um, um einen reellen Nenner zu erhalten

$$\frac{(4-\sqrt{3}i)}{2i} = \frac{(4-\sqrt{3}i)}{2i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{(4-\sqrt{3}i)\cdot i}{-2}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Der Rest dürfte Ihnen keine Schwierigkeiten gemacht haben.

---------------------------------- ▷ 32

62

$w = e^x \cdot e^{iy}$

$\overline{w} = e^{at} \cdot e^{ibt}$

....

Gegeben sei der Ausdruck $z = (\gamma + i\omega)t = \gamma t + i\omega t$.

Diese Form wird bei der Beschreibung von Schwingungen viel benutzt

$$w = e^z = \ldots\ldots\ldots$$

Formen Sie unter Benutzung der Eulerschen Formel weiter um

$$w = e^{\gamma t} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

---------------------------------- ▷ 63

93

Sie haben das

des Kapitels erreicht.