0

Kapitel 12

Fehlerrechnung

1

Für das Studium dieses Kapitels „Fehlerrechnung“ ist es gut, das vorhergehende Kapitel „Wahrscheinlichkeitsverteilungen“ zu kennen. Daher eine kurze Wiederholung.

Nennen Sie mindestens 3 neue Begriffe aus dem Kapitel „Wahrscheinlichkeitsverteilungen“.

....

....

....

-------------------------------- ▷ 2

34

Verteilung 1, 3, 4, 2

....

Eine Festigung von Gedächtnisinhalten kann man durch interne innere Visualisierung erreichen. Diese Technik ist stark persönlichkeitsabhängig und besonders nützlich für Menschen, die ein gutes inneres Vorstellungsvermögen haben.

Möchte die Hinweise auf die Lerntechnik Visualisierung überschlagen -------------------------------- ▷ 39

Hinweise zur inneren Visualisierung -------------------------------- ▷ 35

67

$$\frac{\partial f}{\partial R_1} = \frac{(220)^2}{(150+220)^2} = 0{,}35\,\Omega$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_2} = \frac{(150)^2}{(150+220)^2} = 0{,}16\,\Omega$$

Jetzt setzen wir in die allgemeine Formel ein. Sie war:

$$\sigma_{MR} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial R_1}\right)^2 \sigma_{R_1}{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R_2}\right)^2 \cdot \sigma_{R_2}{}^2}$$

Mit $\sigma_{R_1} = 0{,}9\,\Omega$ und $\sigma_{R_2} = 1{,}1\,\Omega$ und den obigen Werten ergibt sich dann:

$\sigma_{MR} =$ ....

-------------------------------- ▷ 68

2

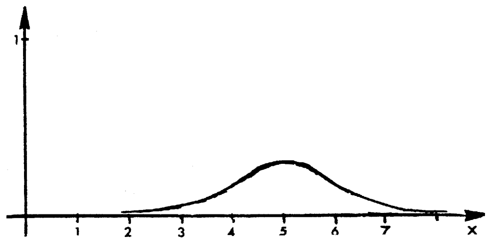
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung | Galton'sches Brett
Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung | Normalverteilung
Binomialverteilung | Mittelwert

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Die Skizze zeigt die Normalverteilung für $\sigma = 1$ und $\mu = 5$.

Skizzieren Sie den Verlauf für $\sigma = \frac{1}{2}$ und $\mu = 5$.



▷ 3

35

Die Regel ist einfach. Man macht sich zu verbal oder formal dargestellten Sachverhalten innere Bilder. Am günstigsten sind Bilder, die sich bewegen.

Beispiel: Bei der eben besprochenen Gaußverteilung kann man sich vorstellen, wie eine spitze Glockenkurve mit wachsendem σ immer breiter wird und das Maximum dabei immer mehr abnimmt. Auch den umgekehrten Vorgang kann man sich vorstellen. Dann wird eine flache Glockenkurve immer enger und höher. Die Fläche unter der Kurve muß ja konstant bleiben.

Versuchen Sie es einmal, sich diese Kurvenveränderung vorzustellen. Lehnen Sie sich ruhig zurück und konzentrieren Sie sich auf das innere Bild.

▷ 36

68

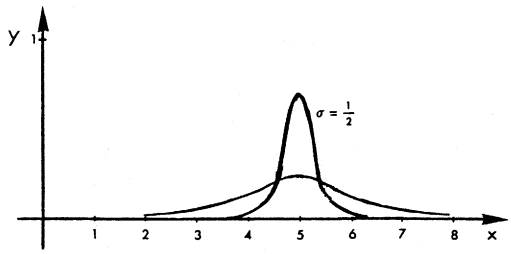
$\sigma_{MR} = 0{,}13152^2 = 0{,}36\,\Omega$ Das Endergebnis heißt also: $R = (89{,}19 \pm 0{,}36)\,\Omega$

Wie groß ist der Gesamtwiderstand R und die Standardabweichung σ_{RM}, wenn man die beiden Widerstände $R_1 = (150 \pm 0{,}9)\,\Omega$ und $R_2 = (220 \pm 1{,}1)\,\Omega$ hintereinander schaltet?

$$R = R_1 + R_2$$
$$R = \ldots\ldots\ldots\,\Omega$$
$$\sigma_{MR} = \ldots\ldots\ldots\,\Omega$$

▷ 69

3



Durch diese Übung wird deutlich: Die Streuung der Normalverteilung wird festgelegt durch den Parameter

....

Der Mittelwert der Normalverteilung wird festgelegt durch den Parameter

....

--------------------------------- ▷ 4

36

Vielen – nicht allen – wird es gelingen, sich ein inneres Bild der Kurve und ihrer Veränderung zu machen.

Wem es glückt, der kann damit rechnen, daß die Vergessenswahrscheinlichkeit für diesen inneren visualisierten Zusammenhang jetzt geringer geworden ist.

BOWER, ein amerikanischer Psychologe, hat anhand empirischer Untersuchungen gefunden, daß Sachverhalte ohne interne Visualisierung zu 30 bis 50% behalten wurden; Versuchspersonen mit interner Visualisierung behielten demgegenüber doppelt so viel, nämlich 50-80%. Der Gewinn lohnt eigentlich die Zusatzanstrengung.

Übung: Stellen Sie sich die Gaußverteilung vor, wie sie sich mit wachsendem μ nach rechts verschiebt.

--------------------------------- ▷ 37

69

$R = R_1 + R_2 = 370\,\Omega, \ \sigma_{MR} = 1{,}42$

$R = (370 \pm 1{,}42)\,\Omega$

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 71

Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 70

4

Streuung: σ

Mittelwert: μ

Und jetzt beginnt die Fehlerrechnung -------------------------------- ▷ 5

37

Bei der internen Visualisierung aktivieren Sie das Vorstellungsvermögen und Ihre Kreativität.

Man kann sich viele Sachverhalte visualisieren:

Alle – aber wirklich alle – Kurven, bei denen sich EIN Parameter verändert.

Für Zusammenhänge in der Physik kann man sich Bilder machen. So stelle man sich bei Kräften Vektoren bildhaft vor.

Nach etwas Übung kann dies zu einer nützlichen Gewohnheit werden.

-------------------------------- ▷ 38

70

Rechengang: $R_1 = (150 \pm 0{,}9)\,\Omega$, $R_2 = (220 \pm 1{,}1)\,\Omega$ $R = R_1 + R_2 = 370\,\Omega$

Jetzt muß noch der Fehler des Mittelwerts berechnet werden. $\frac{\partial R}{\partial R_1} = 1$ $\frac{\partial R}{\partial R_2} = 1$

$$\sigma_{MR} = \sqrt{(\frac{\partial R}{\partial R_1})^2 \cdot \sigma_{R_1} + (\frac{\partial R}{\partial R_1})^2} = \sqrt{1 \cdot 0{,}9^2 + 1 \cdot 1{,}1^2}$$

$$= \sqrt{(0{,}81 + 1{,}21)\,\Omega^2} = \sqrt{2{,}02\,\Omega^2}$$

$$\sigma_{MR} = 1{,}4\,\Omega$$

Endergebnis: $R = (370 \pm 1{,}4)\,\Omega$

-------------------------------- ▷ 71

5

Aufgabe der Fehlerrechnung

Mittelwert und Varianz

Der Arbeitsabschnitt ist diesmal etwas länger. Teilen Sie sich die Arbeit selbst in zwei Phasen ein. Dazwischen können Sie eine kurze oder längere Pause machen. Der wichtigste Abschnitt ist der Abschnitt „Fehler des Mittelwerts“ am Schluß. Diesen Begriff werden Sie in der Praxis oder im Labor oft benutzen. Der „Fehler des Mittelwertes“ gibt an, wie zuverlässig ein Mittelwert von Meßdaten ist.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 12.1 Aufgabe der Fehlerrechnung
12.2 Mittelwert und Varianz
Lehrbuch Seite 269-276

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 6

38

Oft hilft es, sich von Sachverhalten Bilder auf Papier zu skizzieren und diese erst dann intern zu visualisieren.

Begründung für die Wirksamkeit dieser Lerntechnik:

Gleiche Sachverhalte werden so in verschiedener Weise kodiert. Damit werden sie mehrfach im Gedächtnis eingespeichert. Darüber hinaus werden Sie zusammenhängend gespeichert.

Damit steigt die Assoziationswahrscheinlichkeit bei der späteren Reaktivierung der Gedächtnisinhalte.

-------------------------------- ▷ 39

71

Neue Aufgabe: Die Seiten eines Quaders seien:

$$x = (22 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$$
$$y = (16 \pm 0{,}8)\,\mathrm{mm}$$
$$z = (10 \pm 0{,}8)\,\mathrm{mm}$$

Wie groß ist das Volumen $V = x \cdot y \cdot z$ des Quaders und die Standardabweichung σ_M?

V = ...

σ_{MV} = ...

Endergebnis mit Fehlern angeben:

V = ...

-------------------------------- ▷ 72

6

Die Länge eines Zimmers wird mit Hilfe von Bandmaßen bestimmt. Dabei können *Zufallsfehler oder systematische Fehler* entstehen.

a) Ein Bandmaß ist durch vielfachen Gebrauch gedehnt und hat eine wahre Länge von 100,4 cm statt 100 cm. Es entsteht ein .... Fehler.

b) Die Messung wird mit einem Stahlbandmaß von 1,00 m durchgeführt. Das Bandmaß muß jedoch mehrmals angelegt werden. Die Stoßstellen werden auf dem Fußboden mit Bleistiftstrichen markiert. Durch Anlegen entstehen .... fehler.

c) An der Wand wird das Bandmaß geknickt. Dadurch kann nicht gut abgelesen werden. Dadurch entstehen .... fehler.

-------------------------------- ▷ 7

39

Versuchen Sie die nächste Frage ohne Hilfe des Lehrbuches beantworten. Im Zweifel aber doch nachsehen.

Bei der Normalverteilung liegen in den Intervallen

$\mu \pm \sigma \cdot$ .... % aller Meßwerte

$\mu \pm 2\sigma$ .... % aller Meßwerte

$\mu \pm 3\sigma \cdot$ .... % aller Meßwerte

-------------------------------- ▷ 40

72

$V = 3520\ \text{mm}^3 \quad \sigma_{MV} = 36{,}9\ \text{mm}^3 \qquad V = (3520 \pm 36{,}9)\,\text{mm}^3$

Rechengang: $x = (22 \pm 0{,}1)$ mm, $y = (16 \pm 0{,}08)$ mm, $z = (10 \pm 0{,}08)$ mm

$V = xyz = 3520\ \text{mm}^3$

Berechnung von σ_{MV}:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) = yz = 16 \cdot 10\ \text{mm}^2 = 160\ \text{mm}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x \cdot z = 220\ \text{m}^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = x \cdot y = 352\ \text{mm}^2$$

$$\sigma_{MV} = \sqrt{160^2\,\text{mm}^4 \cdot 0{,}1^2\,\text{mm}^2 + 220^2\,\text{mm}^4 \cdot 0{,}08^2\,\text{mm}^2 + 352^2\,\text{mm}^4 \cdot 0{,}08^2\,\text{mm}^2}$$

$$= \sqrt{256\ \text{mm}^6 + 4{,}84 \cdot 64\ \text{mm}^6 + 12{,}39 \cdot 64\ \text{mm}^6}$$

$$= \sqrt{(256 + 310 + 793)\ \text{mm}^6} = \sqrt{1359\ \text{mm}^6}$$

$\sigma_{MV} = 36{,}9\ \text{mm}^3$ Endergebnis: $V = (3520 \pm 36{,}9)\,\text{mm}^3$ -------------------- ▷ 73

7

a) systematischer Fehler
b) Zufallsfehler
c) Zufallsfehler

....

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 11
Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 8

40

68%
95%
99,7%

....

Im Intervall $\bar{x} \pm 2\sigma$, liegt der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von

.... %

Das Intervall heißt:

.... intervall oder
.... intervall.

--------------------------------- ▷ 41

73

Regressionsgerade, Ausgleichskurve

Bisher wurde gezeigt, daß der Mittelwert einer Meßreihe zuverlässiger ist als die Einzelmessung. Für den Mittelwert nimmt die Summe der Abweichungsquadrate ein Minimum an. In diesem Abschnitt wird dieser Grundgedanke auf Meßkurven übertragen. An die Stelle des Mittelwertes tritt die Ausgleichskurve. Die Berechnung der Ausgleichskurve führen wir für den Fall durch, daß die Ausgleichskurve eine Gerade ist.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 12.7 Regressionsgerade , Ausgleichskurve
Lehrbuch Seite 280-283

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 74

8

Machen wir uns noch einmal den Unterschied zwischen systematischen Fehlern und Zufallsfehlern klar!

Systematische Fehler entstehen durch unexakte Eichungen, Fehler der Meßgeräte oder fehlerhafte Meßverfahren. Beispiele: Wird der Durchmesser eines Gummischlauches mit Hilfe einer Schieblehre bestimmt, wird durch den Druck der Schieblehre der Schlauch immer deformiert und der Meßwert immer verfälscht. Ist ein Stoffmaßstab gedehnt, so fallen alle Meßergebnisse zu klein aus. *Systematische Fehler* verfälschen die einzelnen Messungen jeweils in eine einzige Richtung.

Das Charakteristikum von Zufallsfehlern ist demgegenüber, daß sie unkontrollierbaren statistischen Schwankungen unterworfen sind. Das Meßergebnis fällt einmal zu groß, ein anderes Mal zu klein aus.

-------------------------------- ▷ 9

41

95%, Konfidenzintervall Vertrauensintervall

Setzt man voraus, daß die Meßwerte um den Mittelwert gemäß einer Normalverteilung streuen, so läßt sich – allerdings nicht mit einfachen Mitteln – beweisen:

Auch die Mittelwerte von Meßreihen sind normal verteilt. Die Standardabweichung des Mittelwertes ist jedoch geringer. $\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Die Standardabweichung des Mittelwertes führt uns zur Bestimmung der Vertrauensintervalle. Der Durchmesser eines Drahtes sei gemessen:

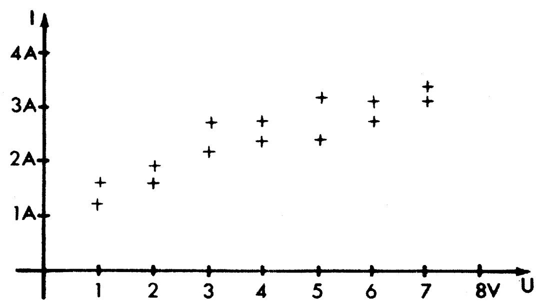
$d = 0{,}1420 \text{ mm} \pm 0{,}0006 \text{ mm}$

Innerhalb welcher Grenzen liegt der wahre Durchmesser mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%.

Obere Grenze: .... Untere Grenze: ....

----------------- ▷ 42

74



Die Abbildung zeigt Meßpunkte. An einer Glühlampe ist der Strom als Funktion der Spannung gemessen. Zeichnen Sie zunächst mit freier Hand und nach Augenmaß eine Ausgleichskurve.

-------------------------------- ▷ 75

9

Geben Sie die Fehlerklassen an:

a) Ein Meßinstrument wird nicht senkrecht von vorn, sondern immer schräg von der Seite abgelesen. Da der Zeiger sich vor der Skala befindet, entsteht hier der sogenannte *Parallaxenfehler*: ....

b) Die Einteilung der Skala eines Amperemeters hat breite Striche. Daher muß die genaue Anzeige geschätzt werden. Verschiedene Personen kommen bei gleicher Zeigerstellung zu verschiedenen Ergebnissen: ....

c) Die Temperatur einer kleinen Flüssigkeitsmenge wird mit einem Quecksilberthermometer gemessen. Das Thermometer nimmt Wärme von der Flüssigkeit auf. Flüssigkeitstemperatur sinkt: ....

d) Eine Waage ist nicht waagrecht aufgestellt: ....

e) Eine Waage kommt infolge der Beeinflussung durch Luftströmungen nicht immer an der gleichen Stelle zur Ruhe: ....

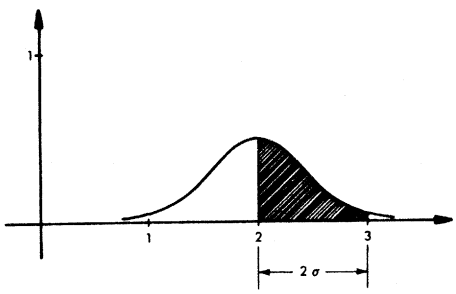
-------------------------------- ▷ 10

42

Obere Grenze: 0,1432 mm

Untere Grenze: 0,1408 mm

Bei Schwierigkeiten im Lehrbuch Abschnitt 12.4.2, Seite 298 nachlesen.

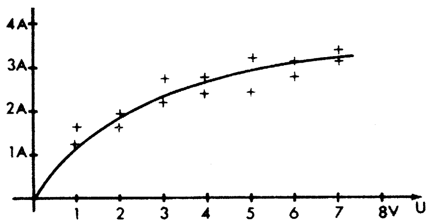


Bei einer Normalverteilung liegen im schraffierten Intervall rund .... % aller Meßwerte.

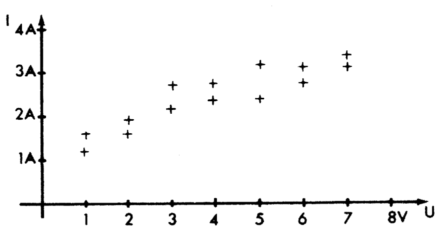
Aufpassen!

-------------------------------- ▷ 43

75



Es ist üblich, durch die Schar der Meßpunkte eine Ausgleichskurve nach Augenmaß zu legen. Wir betrachten diese Kurve gewissermaßen als Mittelwert der einzelnen Meßwerte.



Legen Sie jetzt nach Augenmaß eine Ausgleichsgerade durch die Meßpunkte.

Eine Ausgleichsgerade heißt auch ....

-------------------------------- ▷ 76

10

Parallaxenfehler, systematischer Fehler.
Schätzfehler bei grober Skala: Zufallsfehler.
Meßfehler bei Temperaturmessung durch Wärmeaufnahme des Thermometers: Systematischer Fehler.
Schiefe Waage: Systematischer Fehler.
Meßfehler durch Luftbewegung: Zufallsfehler.

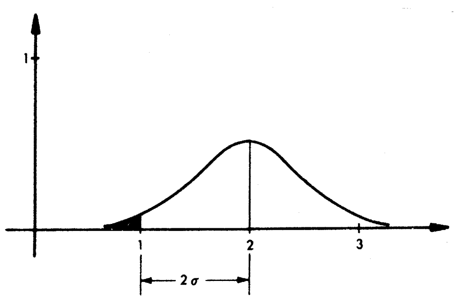
....

-------------------------------- ▷ 11

43

47,5%. Erläuterung: Die Gaußverteilung ist symmetrisch bezüglich des Mittelwertes μ. Da 95% aller Meßwerte im Bereich $[\mu - 2\sigma, \quad \mu + 2\sigma]$ liegen, liegen im halben Intervall – also im Bereich $[\ \mu + 2\sigma]$ – die Hälfte dieser Meßwerte.

....

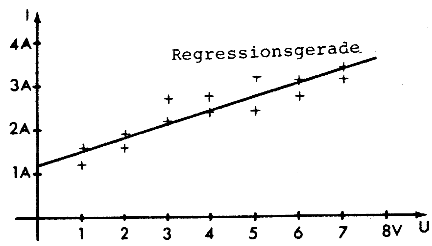


Wieviel Prozent der Meßwerte liegen im schraffierten Intervall?

.... aller Meßwerte

-------------------------------- ▷ 44

76



Hat man bereits Hypothesen über den Kurvenverlauf, nimmt man als Ausgleichskurve Parabeln, E-Funktionen, logarithmische Funktionen.

Oft hat man jedoch noch keine bestimmte Vorstellung vom Charakter der Kurve oder möchte eine Schar von Meßpunkten in einem bestimmten Intervall durch eine Gerade annähern. Das ist schließlich der einfachste Kurventyp.

In diesen Fällen berechnet man die Gleichung der Ausgleichsgeraden mit Hilfe der gegebenen Meßwerte. Anderer Name für Ausgleichsgerade: ....

-------------------------------- ▷ 77

11

Das Volumen einer Silberkette mit Anhänger soll bestimmt werden. Wir benutzen ein Überlaufgefäß. Das Überlaufgefäß ist mit Wasser gefüllt. die Kette wird vollständig eingetaucht. Die verdrängte Wassermenge fließt über eine Rinne in einen Meßzylinder.

Der Versuch wird 10mal wiederholt. Wir erhalten eine Meßreihe.

Meßwerte:	2,4 cm^3	2,6 cm^3
	2,7 cm^3	2,7 cm^3
	2,6 cm^3	2,6 cm^3
	2,5 cm^3	2,8 cm^3
	2,4 cm^3	2,7 cm^3

Berechnen Sie als erstes den Mittelwert. Taschenrechner benutzen.

$\bar{x}$ = ...

-------------------------------- ▷ 12

44

2,5%

Erläuterung: 5% aller Meßwerte liegen außerhalb der doppelten Standardabweichung vom Mittelwert. Gefragt war hier nach dem Anteil der Meßwerte, die auf dem linken Flügel der Normalverteilung außerhalb 2 σ liegen. Das ist davon genau die Hälfte.

-------------------------------- ▷ 45

77

Regressionsgerade

Haben Sie das Beispiel auf Seite 284 im Lehrbuch nachgerechnet und verstanden?

Ja -------------------------------- ▷ 85

Nein -------------------------------- ▷ 78

12

Mittelwert: $\bar{x} = 2{,}6\ \text{cm}^3$

Für die Berechnung von Varianz und Standardabweichung bilden wir die Abweichungen der einzelnen Meßwerte vom Mittelwert sowie deren Quadrate. Ergänzen Sie die Tabelle:

Meßwerte	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
$2{,}4\ \text{cm}^3$		
$2{,}7\ \text{cm}^3$		
$2{,}6\ \text{cm}^3$		
$2{,}5\ \text{cm}^3$		
$2{,}4\ \text{cm}^3$		
$2{,}6\ \text{cm}^3$		
$2{,}7\ \text{cm}^3$		
$2{,}6\ \text{cm}^3$		
$2{,}8\ \text{cm}^3$		
$2{,}7\ \text{cm}^3$		

-------------------------------- ▷ 13

45

Gewogenes Mittel

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 12.5 Gewogenes Mittel
Lehrbuch Seite 278 - 279

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 46

78

In jedem Fall ist es nützlich, ein kleines Beispiel schrittweise durchzurechnen. Folgende Strom- und Spannungswerte seien gemessen.

U	....	I	....
2 V		1,3 A	
3 V		1,7 A	
4 V		2,1 A	
5 V		2,4 A	
6 V		2,9 A	

Wir wollen die Funktionsgleichung der Regressionsgeraden berechnen. Erste Überlegung: Welche Produkte müssen berechnet und aufsummiert werden? Tragen Sie es oben in die Spalte ein. Hinweis: Überlegen Sie, welche Bedeutung U und welche Bedeutung I bei unserem Problem haben. Im Lehrbuch ist die Regressionsgerade für ein Koordinatenkreuz mit x-Achse und y-Achse berechnet. -------------------------------- ▷ 79

13

Meßwerte	$(x_i - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
2,4 cm³	- 0,2 cm³	0,04 cm⁶
2,7 cm³	0,1 cm³	0,01 cm⁶
2,6 cm³	0,0 cm³	0,00 cm⁶
2,5 cm³	- 0,1 cm³	0,01 cm⁶
2,4 cm³	- 0,2 cm³	0,04 cm⁶
2,6 cm³	0,0 cm³	0,00 cm⁶
2,7 cm³	0,1 cm³	0,01 cm⁶
2,6 cm³	0,0 cm³	0,00 cm⁶
2,8 cm³	0,2 cm³	0,04 cm⁶
2,7 cm³	0,1 cm³	0,01 cm⁶

Benutzen Sie diese Tabelle, um die Varianz der Stichprobe und die geschätzte Varianz der Grundgesamtheit zu berechnen.

Varianz der Stichprobe: $s^2 =$ ....

Schätzung der Varianz der Grundgesamtheit: $\sigma^2 =$ .... -------------- ▷ 14

46

Der elektrische Widerstand einer Spule sei von zwei Personen unabhängig voneinander bestimmt.

$R_1 = (10 \pm 1)\ \Omega$

$R_2 = (10{,}5 \pm 0{,}5)\ \Omega$

Fassen Sie beide Messungen zusammen und geben Sie die beste Schätzung für den Widerstand an.

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 50

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 47

79

U_i	U_i^2	I_i	$U \cdot I_i$
2 V		1,3 A	
3 V		1,7 A	
4 V		2,1 A	
5 V		2,4 A	
6 V		2,9 A	
$\sum$			

Bilden Sie jetzt die Produkte und Quadrate und berechnen Sie die Summen.

-------------------------------- ▷ 80

14

$s^2 = \frac{0{,}16}{10}\,\text{cm}^6 = 0{,}016\,\text{cm}^6$
$\sigma^2 = \frac{0{,}16}{9}\,\text{cm}^6 = 0{,}018\,\text{cm}^6$

....

Berechnen Sie schließlich die beste Schätzung der Standardabweichung der Meßwerte.

$\sigma =$ ....

Hinweis: Notfalls schätzen Sie die Wurzel, es kommt hier vor allem auf die Größenordnung an.

-------------------------------- ▷ 15

47

Gegeben sind zwei Messungen

$R_1 = (10 \pm 1)\,\Omega$

$R_2 = (10{,}5 \pm 0{,}5)\,\Omega$

Wir können beide Messungen zusammenfassen, müssen aber berücksichtigen, daß die zweite Messung genauer ist. Wir gewichten die Messungen. Die Gewichte sind:

$g_1 =$ ....

$g_2 =$ ....

-------------------------------- ▷ 48

80

U_i	U_i^2	I_i	$U_i \cdot I_i$
2 V	4 V^2	1,3 A	2,6 VA
3 V	9 V^2	1,7 A	5,1 VA
4 V	16 V^2	2,1 A	8,4 VA
5 V	25 V^2	2,4 A	12,0 VA
6 V	36 V^2	2,9 A	17,4 VA
Σ 20 V	90 V^2	10,4 A	45,5 VA

Jetzt können wir die Mittelwerte von Spannung und Strom ausrechnen:

$\overline{U} =$ .... $\overline{I} =$ .... ------------------------------ ▷ 81

15

$\sigma = 0{,}13\text{cm}^3$

....

Versuchen Sie die Bedeutung der Standardabweichung jetzt mit eigenen Worten in Stichworten darzustellen.

....
....
....
....

-------------------------------- ▷ 16

48

$g_1 = 1$ Hinweis: Das Gewicht wird bestimmt durch $g_i = \frac{1}{\sigma_M^2}$

$g_2 = 4$

....

Für den gewichteten Mittelwert gilt der allgemeine Ausdruck

$\bar{x} =$ ....

In unserem Fall

$\bar{R} =$ ....

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 50
Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 49

81

$\bar{U} = 4$ entspricht $\bar{x}$ $\bar{I} = 2{,}08$ entspricht $\bar{y}$

Hier noch einmal die Tabelle

U_i	U_i^2	I_i	$U_i \cdot I_i$
2 V	4 V^2	1,3 A	2,6 VA
3 V	9 V^2	1,7 A	5,1 VA
4 V	16 V^2	2,1 A	8,4 VA
5 V	25 V^2	2,4 A	12,0 VA
6 V	36 V^2	2,9 A	17,4 VA
Σ 20 V	90 V^2	10,4 A	45,5 VA

Wir setzen jetzt die erhaltenen Summen ein in die Formel $a = \frac{\sum x_i y_i - N \cdot \overline{xy}}{\sum x_i^2 - N \cdot \bar{x}^2}$

$a =$ ....

-------------------------------- ▷ 82

16

Sinngemäß könnte Ihre Darstellung so lauten: Die Meßwerte streuen um den Mittelwert. Dabei haben 68% der Meßwerte eine geringere Abweichung vom Mittelwert als $\pm\sigma$.

Etwa 32% der Meßwerte haben eine größere Abweichung vom Mittelwert als $\pm\sigma$.

Diese Zahlenangaben gelten für Zufallsfehler, die normal verteilt sind. Dies wird im Abschnitt 12.7 weiter ausgeführt.

Die Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung ist eine Routineaufgabe bei der Durchführung von Messungen. Aufpassen muß man bei den Einheiten. Es empfiehlt sich im übrigen, dabei immer das gleiche Rechenschema zu benutzen.

--------------------------------- ▷ 17

49

Es war $R_1 = (10 \pm 1)\Omega$

$R_2 = (10{,}5 \pm 0{,}5)\Omega$

Die Gewichte waren $g_1 = 1$ und $g_2 = 4$. Die Formel für den gewichteten Mittelwert war:

$$\bar{x} = \frac{g_1\bar{x}_1 + g_2\bar{x}_2}{g_1 + g_2}$$

Wir müssen nur einsetzen und erhalten

$$\bar{R} = \frac{10 \cdot 1 + 10{,}5 \cdot 4}{1+4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 50

82

$a = 0{,}39\,\frac{A}{V}$ $b = 0{,}52\ A$

Alles klar --------------------------------- ▷ 84

Noch eine Erläuterung erwünscht --------------------------------- ▷ 83

17

Der Durchmesser eine Drahtes werde 5mal bestimmt. Man erhält folgende Werte:

d_i in mm	$(d_i - \bar{d})$ in mm	$(d_i - \bar{d})^2$ in mm^2
$4 \cdot 10^{-2}$		
$3 \cdot 10^{-2}$		
$4 \cdot 10^{-2}$		
$5 \cdot 10^{-2}$		
$6 \cdot 10^{-2}$		

Berechnen Sie den Mittelwert des Durchmessers und die Schätzung der Standardabweichung der Meßwerte. $\bar{d}$ = ... σ = ...

--------------------------------- ▷ 18

50

$\bar{R} = 10{,}4\ \Omega$ Hinweis: Das Ergebnis wird stärker durch die genauere Messung bestimmt, aber die ungenauere wird auch gewertet.

Jetzt nehmen wir an, drei Meßreihen liegen vor mit den Ergebnissen:

$R_1 = (10 \pm 1)\ \Omega$
$R_2 = (10{,}5 \pm 0{,}5)\ \Omega$
$R_3 = (10{,}3 \pm 0{,}2)\ \Omega$

Bestimmen Sie wieder zuerst die Gewichte

g_1 = ...
g_2 = ...
g_3 = ...

--------------------------------- ▷ 51

83

Bei diesen Zahlenrechnungen muß man die Scheu vor Zahlen überwinden und manchmal über seinen eigenen Schatten springen.

Beim Übergang zum Rechnen mit physikalischen Größen kann leicht Verwirrung durch die Einheiten entstehen. In diesem Fall empfiehlt es sich, in der ganzen Rechnung U durch x zu ersetzen und I durch y.

Am Schluß der Rechnung muß man dann rücksubstituieren.

Die Substitution in die vertraute – oder zumindest halbwegs vertraute – Notation der Mathematik hilft, die Übersicht bei der Rechnung zu erhalten.

--------------------------------- ▷ 84

18

$d = 4{,}4 \cdot 10^{-2}$ mm $\sigma = 1{,}14 \cdot 10^{-2}$ mm

Hinweis: Hier folgt der Rechengang. Überschlagen Sie ihn, wenn Sie richtig rechneten.

d_i in mm	$(d_i - \bar{d})$ in mm	$(d_i - \bar{d})^2$ in mm²
$4 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}4 \cdot 10^{-2}$	$0{,}16 \cdot 10^{-4}$
$3 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}4 \cdot 10^{-2}$	$1{,}96 \cdot 10^{-4}$
$4 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}4 \cdot 10^{-2}$	$0{,}16 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$0{,}6 \cdot 10^{-2}$	$0{,}36 \cdot 10^{-4}$
$6 \cdot 10^{-2}$	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$2{,}56 \cdot 10^{-4}$
$22 \cdot 10^{-2}$	0	$5{,}20 \cdot 10^{-4}$

$\bar{d} = \frac{22 \cdot 10^{-2}\,\text{mm}}{5} = \underline{4{,}4 \cdot 10^{-2}\,\text{mm}}$

$\sigma^2 = \frac{1}{(5-1)} \cdot 5{,}20 \cdot 10^{-4} = \underline{1{,}30 \cdot 10^{-4}\,\text{mm}^2}$ $\underline{\sigma = 1{,}14 \cdot 10^{-2}\,\text{mm}}$ --------▷ 19

51

$g_1 = 1$ $g_2 = 4$ $g_3 = 25$

Die Rechnung folgte dem vorigen Beispiel. Im Zweifel zurückblättern und erneut nachlesen.

Gegeben war: $R_1 = (10 \pm 1)\,\Omega$ $R_2 = (10{,}5 \pm 0{,}5)\,\Omega$ $R_3 = (10{,}3 \pm 0{,}2)\,\Omega$

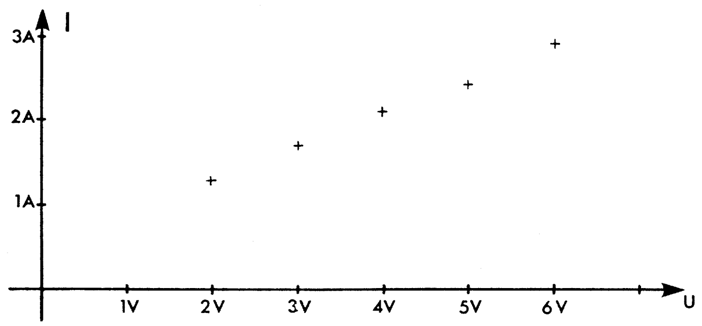
Jetzt setzen Sie ein in die Formel für den gewichteten Mittelwert: R = ...

--------------------------------▷ 52

84

Hier sind noch einmal die Meßpunkte eingetragen. Versuchen Sie zunächst die Ausgleichsgerade nach Augenmaß zu zeichnen.

Zeichnen Sie dann die Ausgleichsgerade aufgrund der Gleichung $I = 0{,}39 \frac{A}{V} \cdot U + 0{,}52\ A$



----------------▷ 85

19

Falls Sie Schwierigkeiten hatten, ist es angebracht, noch einmal im Lehrbuch den Abschnitt 12.2 (Seite 270-276) zu lesen und dabei das Beispiel zu rechnen. Hier halten wir nur fest:

1. Die Meßreihe ist eine Stichprobe aller möglichen Meßwerte.
2. Die Meßreihe hat einen Mittelwert, eine Varianz und eine Standardabweichung.
3. Die Grundgesamtheit aller möglichen Meßwerte hat ebenfalls einen Mittelwert, eine Varianz und eine Standardabweichung. Wir schätzen diese aufgrund der Werte der Stichprobe. Die geschätzten Werte sind größer als die Werte der Stichprobe.

-------------------------------- ▷ 20

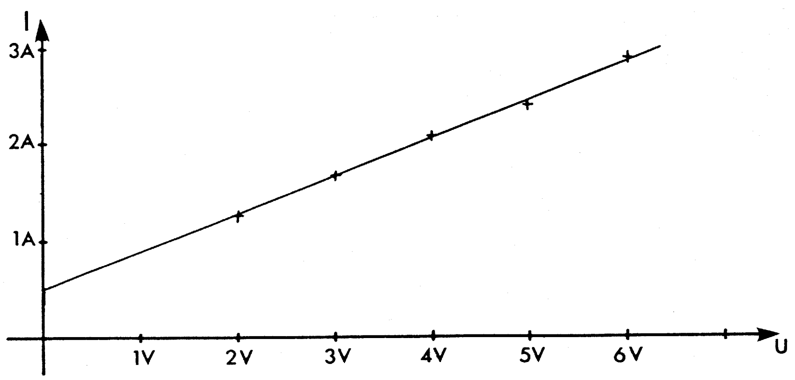
52

$R = (10{,}32 \pm 0{,}2)\,\Omega$

Beim letzten Beispiel wurde deutlich, daß das Ergebnis fast vollständig durch die genauere Messung bestimmt wird. Gewogene Mittel zu bilden ist vor allem dann vorteilhaft, wenn Messungen mit ähnlicher Genauigkeit zusammengefaßt werden.

-------------------------------- ▷ 53

85



-------------------------------- ▷ 86

20

Die ganzen, vielleicht mühselig erscheinenden, Überlegungen hatten das Ziel, den *mittleren Fehler des Mittelwertes* zu bestimmen.

Andere Bezeichnungen dafür sind

....

....

Diese Bezeichnungen sollten uns deshalb geläufig sein, weil sie häufig gleichbedeutend, also synonym, gebraucht werden.

Der mittlere Fehler des Mittelwertes einer Meßreihe ist umso geringer, je größer die Zahl der Messungen N ist.

Es gilt die Beziehung

$\sigma_M = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 21

53

Fehlerfortpflanzungsgesetz

Im Abschnitt 12.6 über Fehlerfortpflanzung wird ein Begriff benutzt, der erst im zweiten Band des Lehrbuches im Kapitel 14 „Partielle Ableitung".erläutert wird. Aus diesem Grund sollten Sie diesen Abschnitt erst dann studieren, wenn Ihnen partielle Ableitungen bekannt sind. Den Sachverhalte selbst allerdings können Sie qualitativ jetzt schon verstehen. Er ist wichtig und wird hier in den folgenden Lehrschritten erläutert.

--------------------------------- ▷ 54

86

In der Praxis berechnet man Regressionsgeraden ebenso wie Mittelwerte und Standardabweichungen des Mittelwertes mit Hilfe von Taschenrechnern oder mit dem PC. Dafür gibt es in allen Fälle Statistikprogramme. Wichtig ist es für Sie, ein einziges Mal die Rechnung „per Hand" durchgeführt zu haben, um zu sehen, was der Rechner eigentlich macht.

--------------------------------- ▷ 87

21

Standardabweichung des Mittelwertes
Stichprobenfehler des Mittelwertes
Mittlerer Fehler des Mittelwertes

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

....

Rechnen Sie hier noch einmal selbständig das Beispiel, das schon im Lehrbuch behandelt wurde. Gegeben sei eine Meßreihe von 11 Messungen (Dicke eines Drahtes).

Mittelwert $\bar{x} = 0{,}142$ mm

Schätzung der Varianz $\sigma^2 = 0{,}046 \cdot 10^{-4}\,\text{mm}^2$

Gesucht: Stichprobenwert des Mittelwertes

$\sigma_M = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 22

54

Wir gehen von einer einfachen Fragestellung aus. Das Gewicht einer sehr großen Steinkugel soll bestimmt werden.

Gegeben seien folgende Meßwerte mit ihren Fehlern.

Radius $R = (1 \pm 0{,}1)\,\text{dm}$ (1 dm = 0,1 m)

Dichte $\rho = (2 \pm 0{,}2)\dfrac{\text{kg}}{(\text{dm})^3}$ Volumen = $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$

Masse $M = V \cdot \rho$

Wie groß wird der Fehler bei der Angabe der Masse sein?

Die Fehler betragen jeweils .... % der Werte.

---------------------------------- ▷ 55

87

Korrelation und Korrelationskoeffizient

Mit den Begriffen „Korrelation" und „Korrelationskoeffizient" wird die „Stärke" des Zusammenhangs zwischen zwei Größen bestimmt, die nicht in einem eindeutigen Zusammenhang stehen, die aber auch nicht unabhängig voneinander sind. Mitrechnen und Umformungen kontrollieren!

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 12.7.2 Korrelation und Korrelationskoeffizient
Lehrbuch Seite 284 - 286

Hinweis: In der 10. Auflage des Lehrbuches ist ein Fehler. Die Formel auf Seite 284 muß lauten: $r^2 = \dfrac{\left(\sum x_i y_i - N\,\overline{xy}\right)^2}{\sum\left(x_1^2 - N\bar{x}^2\right)\sum\left(y_i^2 - N\bar{y}^2\right)}$

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ---------------------------------- ▷ 88

22

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{0{,}046 \cdot 10^{-4}\,\text{mm}^2}{11}} = 0{,}0006 \text{ mm}$$

Es ist sicher etwas mühselig, derartige Rechnungen durchzuführen. Hier hilft der Taschenrechner, der meist ein Statistikprogramm besitzt, mit dem alles viel leichter geht. Jetzt wäre es an der Zeit, die Rechnungen parallel mit dem Statistikprogramm Ihres Taschenrechners durchzuführen.

Als Ergebnis einer Meßreihe gibt man in der Praxis den Mittelwert und den Stichprobenfehler des Mittelwertes in der folgenden Form an:

Drahtdicke: $d = \mu \pm \sigma_M$

$d =$ ....

-------------------------------- ▷ 23

55

10% Hinweis: Der Radius war R = 1 dm. Der Fehler betrug 0,1 dm = 1 cm
Damit beträgt der Fehler 10% des Radius.

Relativer Fehler ist der Fehler bezogen auf den Wert. Relative Fehler werden meist in Prozent angegeben. Hier beträgt der relative Fehler in beiden Fällen 10%. Die Masse hängt von zwei Werten ab, dem Radius und der Dichte. Beide Werte sind fehlerhaft.

Wie wirken sich die Fehler auf den Fehler des Gewichtes aus?

Beide Fehler wirken sich gleich aus -------------------------------- ▷ 56

Der Fehler im Wert des Radius wirkt sich stärker aus -------------------------------- ▷ 57

Der Fehler im Wert der Dichte wirkt sich stärker aus -------------------------------- ▷ 58

88

Korrelationsrechnungen führt man mit dem Taschenrechner oder mit dem PC mit Hilfe von Statistikprogrammen aus. Dann braucht man nur die Ausgangsdaten einzugeben. Sonst sind sie sehr zeitaufwendig. Allerdings ist es notwendig, sich mit dem jeweiligen Statistikprogramm vertraut zu machen. Zur Übung empfiehlt es sich, die Daten der Abbildungen auf der Seite 285 im Lehrbuch abzuschreiben und die angegebenen Korrelationen zu überprüfen.

-------------------------------- ▷ 89

23

$d = (0{,}142 \pm 0{,}0006)\,\mathrm{mm}$

Der Stichprobenfehler des Mittelwertes sollte abgerundet werden.

Begründung: Der Stichprobenfehler des Mittelwertes ist das Ergebnis einer Abschätzung. Die Angabe zu vieler Stellen ist daher sinnlos.

Oft ist der Mittelwert noch zu ungenau. Wenn man den Stichprobenfehler des Mittelwertes halbieren will, muß man die Zahl der Messungen erhöhen und zwar um das .... fache.

-------------------------------- ▷ 24

56

Leider nicht richtig. Genau um dieses Problem geht es bei der Fehlerfortpflanzung. Bedenken Sie, daß die Masse gegeben ist durch

$$M = \tfrac{4\pi}{3} R^3 \cdot \rho$$

Fehlerbehaftet sind R und ρ.

Falls sich ρ um 10% vergrößert, vergrößert sich M um 10%. Falls sich R um 10% vergrößert, vergrößert sich R^3 um .... %. Denken Sie an das Kapitel Potenzreihen, Abschnitt 7.6.1 Polynome als Näherungsfunktionen.

-------------------------------- ▷ 59

89

Im Lehrbuch sind die allgemeinen Formeln für die Berechnung von Korrelation r^2 und Korrelationskoeffizient r angegeben. Abgeleitet wurde dort zum Schluß r^2 für den Sonderfall, daß die Daten im Schwerpunktsystem gegeben sind. Diese Ableitung erpart sehr viel Rechenaufwand und ist wesentlich leichter nachvollziehbar.

Wer diese Ableitung nachgerechnet hat, hat das Entscheidende verstanden. Mancher mag dann das Bedürfnis verspüren, noch die allgemeine Formel aus dem abgeleiteten Ausdruck zu gewinnen. Dafür ist hier die Umformung angegeben.

Möchte die Umrechnung kennenlernen -------------------------------- ▷ 90

Möchte auf die Umrechnung verzichten -------------------------------- ▷ 95

24

Vierfache

....

Rechnen wir noch die Standardabweichung des Mittelwertes für die Messung der Silberkette mit dem Überlaufgefäß. Zahl der Messungen N = 10.

Das Volumen der Kette hatten wir bestimmt zu $V = 2{,}60\ \mathrm{cm}^3$

Standardabweichung der Einzelmessungen: $\sigma = 0{,}13\ \mathrm{cm}^3$

Standardabweichung des Mittelwertes: $\sigma_M =$ ....

Wir geben das Ergebnis vollständig an: $V =$ ....

-------------------------------- ▷ 25

57

Vollkommen richtig.

Die Masse ist $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \rho$

Falls sich ρ um 10% verändert, verändert sich die Masse um 10%.

Falls sich R um 10% verändert, verändert sich die Masse um .... % .

SPRINGEN SIE AUF -------------------------------- ▷ 59

90

Die ursprünglichen Variablen seien x_i und y_i.

Im Schwerpunktsystem haben wir die Variablen $\hat{x}_i = x_i - \bar{x}$ und $\hat{y}_i = y_i - \bar{y}$

Im Schwerpunktsystem sind die Mittelwerte $\bar{x} =$ .... und $\bar{y} =$ ....

-------------------------------- ▷ 91

25

$\sigma_M = 0{,}04 \text{ cm}^3$

$V = (2{,}60 \pm 0{,}04)\text{cm}^3$

Wir können erwarten, daß der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% zwischen 2,56 cm^3 und 2,64 cm^3 liegt.

Das bedeutet, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von 32% der wahre Wert außerhalb dieses Intervalls liegen kann. Diese Unsicherheit ist oft zu groß.

Wieviele Messungen müßte man durchführen, wenn die Standardabweichung des Mittelwertes auf 0,02 cm^3 gesenkt werden soll?

N = ...

-------------------------------- ▷ 26

58

Leider nicht richtig. Genau um dieses Problem geht es bei der Fehlerfortpflanzung. Bedenken Sie, daß die Masse gegeben ist durch

$$M = \tfrac{4\pi}{3} R^3 \cdot \rho$$

Fehlerbehaftet sind R und ρ.

Falls sich ρ um 10% vergrößert, vergrößert sich M um 10%. Falls sich R um 10% vergrößert, vergrößert sich R^3 um .... %. Denken Sie an das Kapitel Potenzreihen, Abschnitt 7.6.1 Polynome als Näherungsfunktionen.

-------------------------------- ▷ 59

91

$\bar{x} = 0 \quad \bar{y} = 0$

....

Für das Schwerpunktsystem ist die Korrelation (Lehrbuch, Seite 287):

$$r^2 = \frac{\left(\sum \hat{x}_i \cdot \hat{y}_i\right)^2}{\sum \hat{x}_i^{\,2} \cdot \sum \hat{y}_i^{\,2}}$$

Schwerpunktsystem ($\hat{x}_i$, $\hat{y}_1$) und ursprüngliches System ($x_i \; y_i$) sind verknüpft durch die Transformationsgleichungen

$\hat{x}_i = x_i - \bar{x}$

$\hat{y}_i = x_i - \bar{x}$ Setzen Sie ein und berechnen Sie r^2 im ursprünglichen System r^2 = ...

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 94

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 92

26

40

Wir können die Genauigkeit der Schätzung des wahren Wertes erhöhen, wenn wir die Anzahl der Einzelmessungen vergrößern.

Gegeben seien N Einzelmessungen. Wie groß müßte bei sonst gleichen Bedingungen die Zahl der Messungen sein, damit die Standardabweichung des Mittelwertes reduziert wird auf:

a) die Hälfte $N_a = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) ein Drittel $N_b = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) ein Zehntel $N_c = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 27

59

30%

Erläuterung: Im Kapitel „Potenzreihenentwicklung" wurde folgende Näherung behandelt:

$$y = (x + \Delta x)^3 = x^3\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^3$$

Nun sei $\frac{\Delta x}{x} = 10\%$

$$y = x^3(1 + 0{,}1)^3 \approx x^3(1 + 3 \cdot 0{,}1) = x^3(1 + 0{,}3)$$

Wenn x um 10% zunimmt, nimmt x^3 näherungsweise um 30% zu. Daraus lernen wir, daß sich ein Fehler umso stärker auswirkt, je höher die Potenz ist, mit der diese Größe in dem Rechenausdruck steht.

Allgemeiner ausgedrückt: Ein Fehler einer Größe wirkt sich umso stärker aus, je empfindlicher der Rechenausdruck von dieser Größe abhängt.

▷ 60

92

Es war $r^2 = \dfrac{\left(\sum \hat{x}_i \cdot \hat{y}_i\right)^2}{\sum \hat{x}_i^2 \cdot \sum \hat{y}_i^2}$

Wir setzen ein $\hat{x}_i = x_i - \bar{x}$ $\hat{y}_i = y_i - \bar{y}$

$$r^2 = \frac{\left(\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}$$

Rechnen Sie jetzt die Klammern geduldig aus

$$r^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ 93

27

$N_a = 4 \cdot N$
$N_b = 9 \cdot N$
$N_c = 100 \cdot N$

....

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 31

Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 28

60

Das Fehlerfortpflanzungsgesetz sagt weiter – etwas vereinfacht: Wenn ein Wert aus mehreren Einzelwerten berechnet wird, ist die Güte des Endergebnisses durch die Güte der Einzelwerte bestimmt. Der am schlechtesten bestimmte Einzelwert begrenzt die Güte des Endergebnisses. Salopp ausgedrückt:

Ein Konvoi fährt niemals schneller als das langsamste Schiff.

--------------------------------- ▷ 61

93

$$r^2 = \frac{\left(\sum (x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \overline{xy})\right)^2}{\sum \left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) \sum \left(y_i^2 - 2y_i\bar{y} + \bar{y}^2\right)}$$

Wir können vereinfachen, wenn wir beachten, daß $\sum x_i = N \cdot \bar{x}$ und $\sum y_i = N\bar{y}$.

Vereinfachen Sie

$r^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 94

28

Ausgangspunkt der Überlegung war eine bestimmte Meßreihe. Sie enthält 10 Messungen. Daraus ergab sich die Standardabweichung des Mittelwertes.

Jetzt fragen wir uns, wieviele Messungen müssen wir durchführen, damit die Standardabweichung halbiert wird.

Die Antwort ist in folgender Formel enthalten:

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Vergrößern wir N, wird σ_M kleiner. Wollen wir den Nenner verdoppeln, muß N viermal so groß werden. Wollen wir den Nenner verdreifachen, muß N .... so groß werden.

-------------------------------- ▷ 29

61

Jetzt kennen Sie die Aussage des Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Das ist das wichtigste für die Praxis. Die Formel in Abschnitt 10.6, Seite 279 im Lehrbuch werden Sie erst benutzen können, wenn Sie das Kapitel „Partielle Ableitungen" bearbeitet haben.

Danach aber sollten Sie zu diesem Abschnitt des Leitprogramms zurückkehren und die Lehrschritte ab 62 bearbeiten. -------------------------------- ▷ 62

Im Moment SPRINGEN SIE VOR auf -------------------------------- ▷ 73

94

$$r^2 = \frac{(\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y} - N\bar{x}\bar{y} + N\bar{x}\bar{y})^2}{(\sum x_1^2 - N\bar{x}^2)(\sum y_i^2 - N\bar{y}^2)}$$

Dies ergibt, etwas weiter vereinfacht,das endgültige Ergebnis:

$$r^2 = \frac{(\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y})^2}{(\sum x_1^2 - N\bar{x}^2)(\sum y_i^2 - N\bar{y}^2)}$$

Hinweis: In der 10. Auflage des Lehrbuches ist in der Formel eine Klammer verrutscht. Das hier angegebene Ergebnis ist richtig!

-------------------------------- ▷ 95

29

Neunmal

....

Eine Erhöhung der Zahl der Messungen reduziert die Standardabweichung des Mittelwertes. Das bedeutet, daß dann die Abweichung zwischen dem Mittelwert und dem „wahren Wert" wahrscheinlich geringer ist.

Wieviele Messungen wären nötig, um den Stichprobenfehler des Mittelwertes von 0,04 cm^3 auf 0,01 cm^3 herabzudrücken.

Ursprünglich hatten wir $N = 10$ Messungen.

Nun brauchen wir $N =$ .... Messungen.

-------------------------------- ▷ 30

62

Sie kennen inzwischen den Begriff der partiellen Ableitung.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 12.6 Fehlerfortpflanzungsgesetz
Lehrbuch, Seite 279-280

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 63

95

1. Mit Hilfe der Fehlerrechnung kann man die Größe von .... -Fehlern abschätzen.
2. Die Maßgröße für die Streuung der Einzelmeßwerte um den Mittelwert heißt: ....
3. Die Wurzel aus der Varianz ist ebenfalls ein Maß für die Streuung. Sie heißt: ....
4. Mittelwerte streuen weniger als Einzelwerte. Mittelwerte sind zuverlässiger. Die Standardabweichung des Mittelwertes aus N Einzelwerten ist ....

-------------------------------- ▷ 96

30

160

....

In der Praxis ist es oft die billigste und einfachste Lösung, Messungen zu wiederholen, um die Genauigkeit eines Mittelwertes zu erhöhen.

Voraussetzung ist allerdings, daß systematische Fehler ausgeschlossen sind.

-------------------------------- ▷ 31

63

Zwei elektrische Widerstände R_1 und R_2, die jeweils mehrmals gemessen wurden, haben die Werte:

$R_1 = (150 \pm 0{,}9)\ \Omega$
$R_2 = (220 \pm 1{,}1)\ \Omega$

a) Wie groß ist der Gesamtwiderstand R bei Parallelschaltung von R_1 und R_2.

b) Wie groß ist der mittlere Fehler (Standardabweichung) von R?

Zunächst berechnen wir den Gesamtwiderstand R der Parallelschaltung. Hier gilt die Formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{R} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$R =$ ....

-------------------------------- ▷ 64

96

Zufallsfehler

Varianz

Standardabweichung

Standardabweichung des Mittelwertes $\sigma_N = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Ein Wert werde aus verschiedenen Werten berechnet. Die verschiedenen Werte haben auch verschiedene Meßfehler. Dann ergibt sich der Fehler des zusammengesetzten Wertes durch das ....

Das Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate führt uns zu einem vertieften Verständnis von Ausgleichskurven. Berechnet wurde der einfachste Fall der Ausgleichsgeraden. Sie heißt in der Literatur oft ....

-------------------------------- ▷ 97

31

Mittelwert und Varianz kontinuierlicher Verteilungen

Normalverteilung

Im Abschnitt 12.3 werden die anhand diskreter Meßwerte gebildeten Begriffe „Mittelwert" und „Varianz" auf kontinuierliche Verteilungen übertragen.

Der Abschnitt 12.4 schließt an die Überlegungen in Kapitel 11 an, in der die Normalverteilung als Grenzverteilung der Binomialverteilung dargestellt wurde.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 12.3 Mittelwert und Varianz bei kontinuierlichen Verteilungen
12.4 Normalverteilung
Lehrbuch, Seite 275 - 278

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 32

64

$R = 89{,}19\ \Omega$

Jetzt bestimmen wir nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz den mittleren Fehler. Wir gehen aus von dem Ausdruck für den Gesamtwiderstand R

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Dies entspricht auf S.191 des Lehrbuches dem Ausdruck $g = f(x, y)$. Dann berechnen wir

$\sigma_{MR} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Falls Schwierigkeiten oder wenn Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 65
Kann Aufgabe lösen --------------------------------- ▷ 68

97

Fehlerfortpflanzungsgesetz

Regressionsgerade

--------------------------------- ▷ 98

32

Die Beurteilung der Genauigkeit einer Meßreihe und des aus ihr gewonnen Mittelwertes mit Hilfe der Fehlerrechnung beruht auf der Annahme, daß die Meßwerte um den Mittelwert wie eine Normalverteilung streuen.

Diese Annahme scheint zunächst sehr willkürlich.

Dennoch wird diese Annahme durch die Beobachtung bestätigt.

Macht man eine sehr große Zahl von Messungen unter sonst gleichen Bedingungen und trägt man die Meßergebnise graphisch auf, so erhält man durchweg Verteilungen, die einer Gauß'schen Glockenkurve entsprechen.

-------------------------------- ▷ 33

65

Der Widerstand R entspricht im Lehrbuch der Größe g. Der Widerstand R_1 entspricht x, der Widerstand R_1 entspricht y.

Die einander entsprechenden Funktionsgleichungen sind:

$$g = f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x + y} \qquad \text{(Lehrbuch)}$$

$$R = f(R_1, R_2) = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{(Aufgabe)}$$

Die Formel für das Fehlerfortpflanzungsgesetz lautet:

$$\sigma_{Mg} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{dxy}\right)^2 \sigma_y^2}$$

Mit den Bezeichnungen für die Widerstände wird daraus

$\sigma_{MR} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

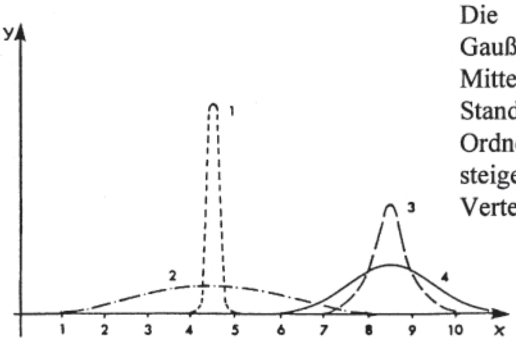
-------------------------------- ▷ 66

98

Sie haben sich nun den ersten Band der „Mathematik für Physiker“ anhand der Leitprogramme erarbeitet. Damit haben Sie sich eine gute Grundlage für Ihr weiteres Studium geschaffen. Die Arbeit mag Ihnen manchmal Mühe bereitet haben, aber es darf Ihnen auch Befriedigung verschaffen, daß Sie bis hierher durchgehalten haben. Sie haben Arbeitstechniken kennengelernt und praktiziert, die Ihnen helfen werden, auch die Aufgaben zu bewältigen, die noch vor Ihnen liegen. Das kann und soll Ihnen Mut machen. Mit Geduld und Arbeit werden Sie auch die noch kommenden Aufgaben bewältigen.

-------------------------------- ▷ 99

33



Die Abbildung zeigt vier verschiedene Gaußverteilungen, die sich durch die Lage des Mittelwertes und die Größe der Standardabweichung unterscheiden.
Ordnen Sie die Verteilungen 1, 2, 3, 4 nach steigender Größe von σ.

Verteilung: .... (kleinstes σ)
....
....
....
.... (größtes σ)

-------------------------------- ▷ 34

66

$$\sigma_{MR} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial R_1}\right)^2 \sigma_{R_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R_2}\right)^2 \sigma_{R_2}^2}$$

Bekannt sind uns $\sigma_{R_1} = 0{,}9\ \Omega$ und $\sigma_{R_2} = 1{,}1\ \Omega$. Wir können die partielle Ableitung bilden und erhalten

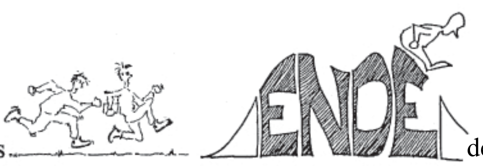
$$\frac{\partial f}{\partial R_1} = \frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2} = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_2} = \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2} = \ldots\ldots\ldots$$

Hinweis: Hier brauchen jetzt nur die bekannten Werte von R_1 und R_2 eingesetzt zu werden.

-------------------------------- ▷ 67

99

Sie haben das  des ersten Bandes erreicht.