0

Kapitel 9

Differentialgleichungen

1

Differentialgleichungen bauen auf der Differential und Integralrechnung auf. Sie setzen Kenntnisse über komplexe Zahlen voraus. Schwierigkeiten beim Studium können zwei Ursachen haben:

a) Schwierigkeiten, weil die die Sache schwer zu verstehen ist,

b) Schwierigkeiten, weil Voraussetzungen fehlen.

Der Fall b) ist häufig und er ist vermeidbar. Daher kontrollieren wir zunächst die Voraussetzungen für dieses Kapitel.

Bei der Lösung der folgenden Aufgaben können und sollen sie ihre Exzerpte benutzen.

--------------------------------- ▷ 2

58

Auch bei homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung können wir mit Hilfe des Exponentialansatzes die gesuchte Funktion bestimmen. Die Differentialgleichung sei:

$$a_1 y' + a_0 y = 0$$

Der Ansatz ist: $y = C \cdot e^{rx}$.

Dann lautet die charakteristische Gleichung:

$$a_1 \cdot r + a_0 = 0$$

Sie hat die Lösung:

$r = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 59

115

$A = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $B = 0$

$x_{inh} = \frac{3}{4} t \cdot \sin 2t$

....

Dieses Kapitel erfordert den doppelten Zeitaufwand wie ein übliches. Wenn Sie, wie es empfehlenswert ist, jede Woche ein Kapitel bearbeiten, dann haben Sie jetzt längst ein Wochenpensum geschafft.

--------------------------------- ▷ 116

2

Gegeben sei

$z = 3 + 4i$

Bilden Sie dazu die konjugiert komplexe Zahl z^*.

$z^* = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 3

59

$r = -\frac{a_0}{a_1}$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung erster Ordnung besitzt also die Form:

$$y = Ce^{rx} = Ce^{-\frac{a_0}{a_1}x}$$

Wir bestimmen nun den Faktor $r = -\frac{a_0}{a_1}$ für die gegebene Differentialgleichung: $2y' = 3y$.

Wir formen um: $2y' - 3y = 0$.

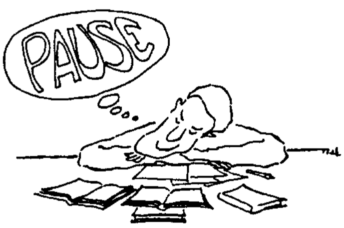
In diesem Fall ist $a_1 = 2$ und $a_0 = -3$.

Damit können Sie die Lösung angeben: $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 60

116

Der zweite Teil dieses Kapitels handelt vor allem von der Lösung physikalischer Probleme mit Hilfe von Differentialgleichungen. Hier zahlt sich die investierte Mühe für den Physiker aus.



--------------------------------- ▷ 117

3

$z^* = 3 - 4i$

Die Eulersche Formel verknüpft die komplexe Exponentialfunktion mit den reellen Funktionen $\cos x$ und $\sin x$:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Formen Sie entsprechend der Eulerschen Formel um:

$$e^{i6x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 4

60

$y = C\, e^{\frac{3}{2}x}$

Abschließend fassen wir das Lösungsschema zusammen. Die allgemeine Gleichung heißt:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Die Lösung erfolgt in drei Schritten:

1. Schritt: Aufstellen der charakteristischen Gleichung:
   - y'' ersetzen durch r^2
   - y' ersetzen durch r
   - y erstzen durch 1
2. Schritt: Berechnung der Lösungen r_1 und r_2 der quadratischen Gleichung.

-------------------------------- ▷ 61

117

Variation der Konstanten

Dieser Abschnitt gehört nicht zum Pflichtlehrstoff. Er kann später bearbeitet werden, weil er mehr von theoretischem Interesse als von praktischem Nutzen ist.

Ich möchte den Abschnitt jetzt *nicht* durcharbeiten und weitergehen------------------ ▷ 123

Ich möchte den Abschnitt bearbeiten.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch
9.3.1 Variation der Konstanten für den Fall einer Doppelwurzel
9.3.2 Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
Lehrbuch Seite 217 - 220

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 118

4

$e^{i6x} = \cos 6x + i \sin 6x$

....

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexe Zahl e^z mit $z = 2 + 3i$

Realteil von e^z: ....

Imaginärteil von e^z: ....

-------------------------------- ▷ 5

61

3. Schritt: Bestimmung der allgemeinen Lösung nach den drei möglichen Fällen.

a) r_1, r_2 reell

b) r_1, r_2 komplex

c) $r_1 = r_2$ reell

Ein derartiges allgemeines Verfahren zur Lösung aller Aufgaben einer gegebenen Aufgabenklasse bezeichnet man als *Algorithmus.*

Ein Algorithmus ist eine Operationsfolge, die mit Sicherheit zur Lösung eines Problems führt.

-------------------------------- ▷ 62

118

Berechnen Sie eine spezielle Lösung y_{inh} der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - 4y = x$$

Benutzen Sie die Methode „Variation der Konstanten". Benutzen Sie das Rechenschema, das im Lehrbuch angegeben ist.

y_{inh} = ...

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 121

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 119

5

Realteil von e^{2+3i}: $e^2 \cos 3$

Imaginärteil von 2^{2+3i}: $e^2 \sin 3$

Bilden Sie die Ableitung

$$\frac{d}{dx}x^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 6

62

Bei der Abarbeitung von Algorithmen treten oft Entscheidungsprozesse auf. In unserem Beispiel kann die Lösung der quadratischen Gleichung auf drei mögliche Typen führen, die jeweils andere Lösungen ergeben.

Der Begriff des Algorithmus läßt sich sinngemäß auch auf menschliche Verhaltensweisen übertragen.

Beispiele dafür sind die hier häufig erwähnten Arbeitstechniken, die man als Regeln zur zweckmäßigen Aufnahme, Verarbeitung, Speicherung und Wiedergabe von Information ansehen kann.

--------------------------------- ▷ 63

119

Die inhomogene Differentialgleichung ist: $y'' - 4y = x$.

Die homogene Differentialgleichung ist: $y'' - 4y = 0$. Sie hat die Lösungen

$y_1 = e^{-2x}$ und $y_2 = e^{2x}$

Ihre Ableitungen sind $y_1' = -2e^{-2x}$ und $y_2' = 2e^{-2x}$

Diese werden eingesetzt in die Gleichungen (siehe Lehrbuch)

$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$ Das liefert die Beziehung $v_1'e^{-2x} + v_2'e^{2x} = 0$ (I)

$v_1'y_1' + v_2'y_2' = f(x)$ Das liefert die Beziehung $-2v_1'e^{-2x} + 2v_2'e^{2x} = x$ (II)

Wir lösen I nach v_1' auf: $v_1' = -v_2'e^{4x}$ und setzen das Ergebnis in II ein und es folgt:

$v_2' = \frac{xe^{-2x}}{4}$ (III) und analog $v_1' = -\frac{xe^{2x}}{4}$ (IV)

--------------------------------- ▷ 120

6

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4\,x^3$$

Bilden Sie die 1. Ableitung:

$$\frac{d}{dx}\sin(\omega x - \varphi) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d}{dx}\cos(\omega x - \varphi) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 7

63

Beim Rechnen von Übungsaufgaben sind beispielsweise folgende Handlungsregeln möglich:

Regel 1: Freiwillige Übungsaufgaben werden nicht gerechnet.
Regel 2: Freiwillige Übungsaufgaben werden immer gerechnet.
Regel 3: Freiwillige Übungsaufgaben werden so lange gerechnet, bis man zwei Aufgaben eines Typs nacheinander ohne Fehler gelöst hat. Dann wird abgebrochen.

Unter dem Gesichtspunkt der Lern- und Zeitökonomie kann man diese drei Regeln miteinander vergleichen:

Regel 1 kann lernökonomisch ungünstig und zeitökonomisch kurzfristig optimal sein;
Regel 2 kann lernökonomisch günstig, aber wenig zeitökonomisch sein;
Regel 3 kann sowohl lern- wie auch zeitökonomisch sein.

Entscheiden Sie selbst, nach welchen Regeln Sie arbeiten wollen.

-------------------------------- ▷ 64

120

Die Integrale der Funktion $v_1'(x)$ und $v_2'(x)$ schauen wir in einer Integraltabelle nach (z.B. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch) und erhalten:

$$v_1(x) = -\frac{e^{2x}}{16}(2x-1) \quad \text{(V)} \qquad \text{sowie} \qquad v_2(x) = \frac{e^{-2x}}{16}(-2x-1) \quad \text{(VI)}$$

Die Gleichungen V und VI eingesetzt in

$$u(x) = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2 \qquad \text{ergibt} \qquad u(x) = -\tfrac{x}{4}$$

Zur Probe verifizieren wir dieses Ergebnis:

$$\frac{d}{dx^2}(-\tfrac{x}{4}) - 4\,(-\tfrac{x}{4}) = 0 + x = x$$

-------------------------------- ▷ 121

7

$$\frac{d}{dx}\sin(\omega x-\varphi)=\omega\cos(\omega x-\varphi)$$

$$\frac{d}{dx}\cos(\omega x-\varphi)=-\omega\sin(\omega x-\varphi)$$

Bilden Sie die Ableitung

$$\frac{d}{dx}e^x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 8

64

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Der allgemeine Inhalt dieses Abschnitts ist einfach: Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung setzt sich zusammen aus der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und – zusätzlich – der bereits besprochenen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Schwieriger ist es, spezielle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung zu finden. Dafür gibt es keinen Algorithmus. Häufiger vorkommende Beispiele werden angegeben und sind bei Bedarf zu konsultieren.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 9.2.2 Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
Lehrbuch Seite 212 - 217

BEARBEITEN SIE DANACH -------------------------------- ▷ 65

121

$y_{inh}=-\frac{x}{4}$ ist eine spezielle Lösung von $y''-4y=x$

Hinweis: Das Verfahren ist sehr rechenaufwendig und schwierig. Bedenken Sie, wie rasch wir das gleiche Ergebnis mit dem bereits bekannten Verfahren erhalten hätten.

-------------------------------- ▷ 122

8

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---------------------------------- ▷ 9

65

Gegeben sei eine inhomogene Differentialgleichung:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Die homogene Differentialgleichung habe die Lösung y_h. Die inhomogene habe die Lösung y_{inh}. Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---------------------------------- ▷ 66

122

Randwertprobleme

Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 1. Ordnung

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 9.4.1 Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 1. Ordnung
Lehrbuch, Seite 220 - 221

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ---------------------------------- ▷ 123

9

$a \cdot e^{ax}$

Nachdem Sie das Differenzieren von Potenz-, sin-, cos- und e-Funktion wiederholt haben, werden wir diese Funktionen nun integrieren.

$\int x^n dx =$ ....

---------------------------------- ▷ 10

66

$y = y_h + y_{inh}$

Die *allgemeine* Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe der Lösungen der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung.

Die Regel gilt allgemein für inhomogene Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Wir werden Sie aber in dem Kapitel nur auf Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung anwenden.

Diese Regel ist im Lehrbuch bewiesen auf Seite 214.

---------------------------------- ▷ 67

123

Die Differentialgleichung $y' - 4y = 0$ besitzt die allgemeine Lösung

$y = C \cdot e^{4x}$

Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung, deren Kurve durch folgenden Punkt geht.

$x = \frac{1}{4}; \quad y = 2e$

y = ...

Lösung gefunden ---------------------------------- ▷ 125

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ---------------------------------- ▷ 124

10

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ für $n \neq -1$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral der Funktion

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3$$

$\int f(x)\, dx =$ ....

-------------------------------- ▷ 11

67

Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung $y'' + 3y' = x + \frac{1}{3}$

Dann ist die homogene Differentialgleichung $y'' + 3y' = 0$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist:

$$y_h = C_1 + C_2 e^{-3x}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist

$y_{inh} = \frac{x^2}{6}$ (Bitte überprüfen)

Allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung

$y =$ ....

-------------------------------- ▷ 68

124

Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C \cdot e^{4x}$. Um die gesuchte spezielle Lösung zu erhalten, setzen wir die gegebenen Randbedingungen ein – nämlich die Koordinaten des Punktes $x = \frac{1}{4}$, $y = 2e$

$$y(\tfrac{1}{4}) = 2e = C \cdot e^{4 \cdot \frac{1}{4}} = C \cdot e$$

C wird so bestimmt, daß die Kurve durch den Punkt geht.

$C = 2$.

Die gesuchte spezielle Lösung ist daher

$y(x) =$ ....

-------------------------------- ▷ 125

11

$$\int (x^3 + \frac{x^2}{2} + 3)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} + 3x + C$$

Falls Sie Schwierigkeiten hatten, lösen Sie die Aufgabe noch einmal mit Hilfe der Tabelle der Stammintegrale auf Seite 157 im Lehrbuch.

Berechnen Sie

$$\int \sin x\, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \cos x\, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Benutzen Sie bei Unsicherheit die Tabelle der Stammintegrale Seite 157 in Lehrbuch.

-------------------------------- ▷ 12

68

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{x^2}{6}$$

Suchen Sie eine spezielle Lösung y_{inh} der homogenen Differentialgleichung

$$y'' + 23y' + 15y = 6$$

$$y_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hinweis: Es handelt sich um den 1. Fall auf Seite 214 im Lehrbuch.

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 70
Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 69

125

$$y = 2e^{4x}$$

Die Differentialgleichung $\dot{v}(t) = -g$ hat die allgemeine Lösung

$$v(t) = -gt + C$$

Bestimmen Sie die Konstante C derart, daß $v(0) = v_0$ ist.

C = ...

v(t) = ...

-------------------------------- ▷ 126

12

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$$\int \sin(\omega t - \varphi)\, dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \cos(\omega t - \varphi)\, dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Beachten Sie, daß die Integrationsvariable hier nicht x, sondern t genannt ist. Falls Sie dadurch unsicher sind, substituieren Sie für t die gewohnte Variable x.

-------------------------------- ▷ 13

69

Wir zeigen einen einfachen Fall, der nach dem gleichen Schema gelöst wird, das im Lehrbuch auf Seite 215 steht.

$$3y'' + 7y = 2$$

Ansatz: $y_{inh} = K$ $\quad y'_{inh} = 0$ $\quad y''_{inh} = 0$

Dies setzen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten:

$7K = 2$ $\quad K = \frac{2}{7}$ $\quad y_{inh} = \frac{2}{7}$

Bestimmen Sie in gleicher Weise die spezielle Lösung für

$y'' + 23y' + 15y = 6$ $\quad y_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 70

126

$C = v_0$

$v(t) = -gt + v_0$

-------------------------------- ▷ 127

13

$$\int \sin(\omega t - \varphi)dt = \frac{-\cos(\omega t - \varphi)}{\omega} + C$$

$$\int \cos(\omega t - \varphi)dt = \frac{\sin(\omega t - \varphi)}{\omega} + C$$

Integrieren Sie:

$$\int e^{ax} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{a}{x} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ 14

70

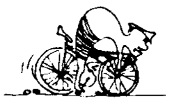
$$y_{inh} = \frac{6}{15}$$

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' = a$$

Es ist der 5. Fall auf Seite 218 und ein gut bekanntes Beispiel.

$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



▷ 71

127

Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 2. Ordnung

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

9.4.2 Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 2. Ordnung
9.4.3 Freier Fall
Lehrbuch, Seite 221 - 222

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ▷ 128

14

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

$\int \frac{a}{x} dx = a \ln x + C$

Hier haben Sie überprüft, ob Sie über die wichtigsten Voraussetzungen für das Studium der Differentialgleichungen verfügen. Im Zweifel lieber noch einige Übungaufgaben aus den Kapiteln 5, 6 und 8 lösen.

-------------------------------- ▷ 15

71

$y = \frac{1}{2} ax^2 + c_1 x + c_2$ Hinweis: Das Beispiel steht im Lehrbuch auf Seite 217.

Es folgt jetzt eine Serie von Übungen zu den verschiedenen Fällen, die im Lehrbuch angesprochen sind. Bei einem ersten Durchgang und bei Zeitdruck können sie übersprungen werden, später sollten sie bei Bedarf geübt werden. In diesem Fall Erinnerungszettel in das Leitprogramm legen.

Möchte die Übungen jetzt überspringen -------------------- ▷116
Übungen für den Fall: $f(x)$ ist ein *Polynom* -------------------- ▷ 72
Übungen für den Fall: $f(x)$ ist eine *Exponentialfunktion* -------------------- ▷ 89
Übungen für den Fall: $f(x)$ ist eine *trigonometrische Funktion* -------------------- ▷103

128

Die Differentialgleichung $\ddot{x} = -g$ hat die allgemeine Lösung

$$x(t) = -\frac{g}{2} t^2 + C_1 t + C_2$$

Bestimmen Sie diejenige spezielle Lösung, die folgende Bedingung erfüllt

a) $x(0) = 0$

b) $\dot{x}(0) = v_0$

$x(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 129

15

Begriff der Differentialgleichung
Einteilung der Differentialgleichungen

Nach einem einführenden Beispiel wird die Einteilung der Differentialgleichung behandelt. Wichtig ist, daß sie sich die zunächst trockene Klassifizierung einprägen. Dafür ist es sehr hilfreich, sich ein Exzerpt anzufertigen. Die Mühe lohnt sich immer. Hier lohnt sie sich ganz besonders.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 9.1 Begriff der Differentialgleichung
Lehrbuch Seite 201 - 205

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 16

72

Übungen für den 2. Fall: $f(x)$ ist ein Polynom.

Bei allen Übungen suchen wir die spezielle inhomogene Lösung. Die danach noch zu addierende Lösung der homogenen Differentialgleichung kann mittels des Exponentialansatzes bestimmt werden. Gegeben sei:

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

Lösungsansatz Lehrbuch Seite 215

$$y_{inh} = \dots\dots\dots\dots$$

-------------------------------- ▷ 73

129

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t$$

Lösungsweg: 1. Bedingung: $x(0) = C_2 = 0$

also $C_2 = 0$

2. Bedingung: $\dot{x}(0) = C_1 = v_0$

-------------------------------- ▷ 130

16

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = a \cdot x + b$$

Es handelt sich um den Fall, den Sie schon jetzt lösen können, weil er auf eine einfache Integration führt.

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 17

73

$y_{inh} = A + Bx + Cx^2$

....

Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 5y = 3x - 2$$

Suchen Sie die spezielle Lösung. Im Lehrbuch, Seite 214 ist der Lösungsweg angegeben.

$y_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 78

Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 74

130

Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = 0$

Sie hat die allgemeine Lösung $y(x) = C_1 \cdot e^{\frac{3}{2}x} + C_2 x \cdot e^{\frac{3}{2}x}$

Sie soll zwei Randbedingungen genügen:

1. Randbedingung: $x = \frac{2}{3}$ $y = 3e$

2- Randbedingung: $x = \frac{2}{3}$ $y' = \frac{15}{2}e$

Gesucht ist die spezielle Lösung, die beiden Randbedingungen genügt.

$C_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $C_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 133

Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 131

17

$y = \frac{a}{2}x^2 + b\,x + C$

Das hier benutzte Verfahren heißt

.... der Variablen oder

.... der Variablen

Trennen Sie die Variablen der Differentialgleichung $y'' + 4x + 2 = 0$

Lösen Sie nun die Differentialgleichung $\ldots = \ldots\ldots\ldots$

$y' = \ldots\ldots\ldots$

$y = \ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 18

74

Gegeben ist $y'' + 4y' + 5y = 3x - 2$ $f(x) = 3x - 2$ ist ein Polynom.

Der Lösungsansatz ist, das dürfte jetzt bekannt sein,

$y_{inh} = A + Bx$

Hinweis: x tritt in $f(x)$ nur in der 1. Potenz auf. Bilden Sie die Ableitungen:

$y'_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $y''_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 75

131

Hilfe: Die allgemeine Lösung war

$y(x) = C_1 \cdot e^{\frac{3}{2}x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\frac{3}{2}x}$

Wir haben zwei Integrationskonstante und zwei Randbedingungen

1. Randbedingung: $x = \frac{2}{3}$ $y = 3e$

2. Randbedingung: $x = \frac{2}{3}$ $y' = \frac{15}{2}e$

Die spezielle Lösung muß also durch den mit der ersten Randbedingung festgelegten Punkt gehen und in diesem Punkt die durch die 2. Randbedingung gegebene Steigung haben.

Wir setzen die erste Randbedingung ein und erhalten

$y(\frac{2}{3}) = 3e = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 132

18

Trennung der Variablen oder Separation der Variablen: $y'' = -4x - 2$

Lösung der Differentialgleichung $y' = -\frac{4}{2}x^2 - 2x + C_1$

$$y = -\frac{4}{2\cdot 3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 + C_1x + C_2 = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + C_1x + C_2$$

....

Auch im nächsten Beispiel ist es möglich, die Variablen zu trennen und die Differentialgleichung zu lösen

$$y' + y \cdot \frac{2}{x} = 0 \qquad y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 21
Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 19

75

$y'_{inh} = B$ $\qquad y''_{inh} = 0$ $\qquad$ (Erinnerung: $y = A + Bx$)

Setzen Sie die Ergebnisse ein in die inhomogene Differentialgleichung:

$$y'' + 4y' + 5y = 3x - 2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3x - 2$$

-------------------------------- ▷ 76

132

$$3_e = C_1 e + C_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot e \qquad \text{(I)}$$

Um die 2. Randbedingung einzusetzen müssen wir die Differentialgleichung differenzieren:

$$y'(x) = \frac{3}{2}C_1 e^{\frac{3}{2}x} + C_2 e^{\frac{3}{2}x} + \frac{3}{2}C_2\ x\, e^{\frac{3}{2}x}$$

Wir setzen ein $x = \frac{2}{3}$, $y' = \frac{15}{2}e$

$$y'(\tfrac{2}{3}) = \frac{15}{2}e = \frac{3}{2}C_1 e + C_2 e + \frac{3}{2}C_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot e \qquad \text{(II)}$$

Aus den Bestimmungsgleichungen (I) und (II) erhalten wir – nachdem wir durch e kürzen –

$C_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad C_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Die spezielle Lösung ist dann $\qquad y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 133

19

Gegeben ist $y' + y \cdot \frac{2}{x} = 0$.

Daraus folgt zunächst $y' = -2 \cdot \frac{y}{x}$

Jetzt kann man durch y dividieren und dann stehen links nur die Variable y und rechts nur die Variable x – bis auf dx.

$$\frac{y'}{y} = -2\frac{1}{x} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}$$

Führen Sie die Trennung der Variablen vollständig durch

$$\frac{dy}{y} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 20

76

$4B + 5A + 5Bx = 3x - 2$

Um A und B zu bestimmen, müssen wir umordnen und nach Potenzen von x sortieren.

$$x(\ldots\ldots) + (\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0$$

Dann müssen die Klammern je für sich gleich 0 sein. Aus der ersten Klammer können Sie B bestimmen und aus der zweiten Klammer können sie A bestimmen.

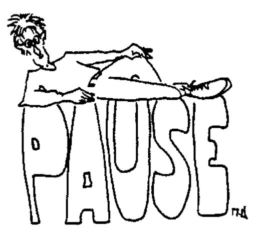
$B = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $A = \ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 77

133

$C_1 = 1, \quad C_2 = 3, \qquad d.h. \qquad y = e^{\frac{3}{2}x} + 3xe^{\frac{3}{2}x}$

Hinweis: Diese Aufgabe war wirklich nicht ganz einfach. Glückwunsch, wenn Sie sie geschafft haben.



-------------------------------- ▷ 134

20

$$\frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}$$

Jetzt können Sie auf beiden Seiten integrieren und erhalten

$$\int \frac{dy}{y} = -\int 2\frac{dx}{x}$$

.... = ...

Lösen Sie das Ergebnis nach y auf

$y =$ ....

-------------------------------- ▷ 21

77

$x\,(5B-3)+(4B+5A+2)=0$

Aus $(5B-3)=0$ folgt $B=\frac{3}{5}$

Aus $(4B+5A+2)=0$ folgt $A=-\frac{22}{25}$

Damit wird die spezielle Lösung

$y_{inh} =$ ....

-------------------------------- ▷ 78

134

Anwendungen
Der radioaktive Zerfall

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 9.5.1 Der radioaktive Zerfall
Lehrbuch, Seite 223

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 135

21

$\ln y = -2\ln x + C$ nach y aufgelöst

$$y = \frac{1}{x^2} \cdot e^C$$

Wenn es möglich ist, die Variablen zu trennen, ist die Differentialgleichung praktisch gelöst. Dann bleiben nur noch Integrationen. Leider ist das nicht immer der Fall.

Welche der folgenden Gleichungen sind Differentialgleichungen?

a) $x^n = y^3$

b) $f(x) = 4x^{-1} + 3$

c) $f(x) = f'(x)$

d) $y = (y'')^3 + 2xy + 17$

-------------------------------- ▷ 22

78

$y_{inh} = \frac{1}{25}(15x - 22)$

....

Suchen Sie die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - 5y' + 6y = x^2$$

$y_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 84

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 79

135

Die Differentialgleichung für den radioaktiven Zerfall ist eine der wenigen wichtigen Differentialgleichungen 1. Ordnung in den Naturwissenschaften. Sie gilt auch für Wachstumsprozesse. Wir nehmen jetzt als Beispiel ein Problem aus der Biologie.

Geben Sie die Differentialgleichung für das Wachstum einer Virenkultur an, bei welcher die Wachstumsgeschwindigkeit proportional zum jeweiligen Bestand $N(t)$ ist. Der Proportionalitätsfaktor heiße α.

....

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 137

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 136

22

Differentialgleichungen sind c) und d)

Welche der Gleichungen sind Differentialgleichungen?

a) $y' + C = y'' + y^3$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$

c) $y'' = (y')^5 + (y'')^2$

d) $y^3 = 2\,xy$

e) $y'' = y'$

f) $y = y^2$

--------------------------------- ▷ 23

79

Gegeben: $y'' - 5y' + 6y = x^2$

Der Ansatz ist $y_{inh} = A + Bx + Cx^2$

Hinweis: Obwohl in $f(x)$ nur x^2 steht, darf keine Potenz im Ansatz ausgelassen werden.

Geben Sie die Ableitungen an

$y'_{inh} =$ ....

$y''_{inh} =$ ....

--------------------------------- ▷ 80

136

Der Bestand N der Virenkultur ist eine Funktion der Zeit t, also $N = N(t)$. Die Wachstumsgeschwindigkeit, ist die zeitliche Änderung von $N(t)$

$$\frac{d}{dt} N(t) = \dot{N}(t)$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit soll dem jeweiligen Bestand proportional sein:

$$\dot{N}(t) \cong N(t)$$

Der Proportionalitätsfaktor sei α. Wir erhalten daher die Differentialgleichung

$\dot{N}(t) =$ ....

--------------------------------- ▷ 137

23

Differentialgleichungen sind a), c) und e)

Welche der folgenden Differentialgleichungen sind von zweiter Ordnung ?

a) $(y'')^3 + (y')^4 + y^5 = C$

b) $y^2 + (y')^2 = x$

c) $y'' = 0$

d) $y''' + y'' = 0$

▷ 24

80

$y'_{inh} = B + 2Cx$

$y''_{inh} = 2C$ (Erinnerung $y = A + Bx + Cx^2$)

Setzen Sie nun ein in die Differentialgleichung

$$y'' - 5y' + 6y = x^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots = x^2$$

▷ 81

137

$\dot{N}(t) = \alpha\, N(t)$

Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dot{N}(t) = \alpha\, N(t)$ an

$N(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden ▷ 139

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ▷ 138

24

a) und c)

....

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 27

Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 25

81

$2C - 5B - 10Cx + 6A + 6Bx + 6Cx^2 = x^2$

Berechnen Sie nun A, B und C so, daß die Gleichung oben erfüllt ist

$C = ...$

$B = ...$

$A = ...$

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 83

Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 82

138

Gegeben ist $\dot{N}(t) = \alpha\, N(t)$

Mit dem Exponentialansatz erhalten wir die charakteristische Gleichung

$r - \alpha = 0$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet also

$N(t) = ...$

Hinweis: Die Gleichung ist identisch mit $y' = \alpha \cdot y$

--------------------------------- ▷ 139

25

Eine Differentialgleichung heißt von 2. Ordnung, wenn die höchste Ableitung der gesuchten Funktion, die in der Differentialgleichung auftritt, die zweite Ableitung ist.

Kreuzen Sie die Differentialgleichungen zweiter Ordnung an:

a) $y'' + y''' = 0$

b) $y'' + C = y^3$

c) $y' = 2xy + y^2$

d) $0 = y' - y''$

--------------------------------- ▷ 26

82

Gegeben: $2C - 5B - 10Cx + 6A + 6Bx + 6Cx^2 = x^2$

Wir formen um und ordnen nach Potenzen von x

$$x^2(6C - 1) + x(6B - 10C) + (2C - 5B + 6A) = 0$$

Alle Klammern müssen für sich gleich 0 sein. Aus der ersten Klammer kann C bestimmt werden.

$6C - 1 = 0$ $\qquad C = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Mit diesem Ergebnis kann aus der 2. Klammer B bestimmt werden.

$6B - \frac{10}{6} = 0$ $\qquad B = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Schließlich kann mit B und C aus der letzten Klammer jetzt A bestimmt werden.

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 83

139

$\dot{N}(t) = C \cdot e^{\alpha t}$

....

Zum Zeitpunkt $t = 0$ seien 100 Bakterien vorhanden. Das ist eine Randbedingung. Wie lautet mit dieser Randbedingung die Gleichung, die den Bestand der Virenkultur angibt?

$N(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 140

26

Differentialgleichungen 2. Ordnung sind: b) und d)

Einteilungen zu üben ist mühselig. Die Arbeit wird sich aber später auszahlen, weil es dann weniger Mißverständnisse gibt – und am Ende sparen Sie sogar Zeit.

▷ 27

83

$C = \frac{1}{6}$ $B = \frac{5}{18}$ $A = \frac{19}{108}$

Damit ist die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gefunden.

$y_{inh} = A + Bx + Cx^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 84

140

$N(t) = 100\, e^{\alpha t}$ (Lösung: $N(0) = C \cdot e^0 = C = 100$)

Es wurde die Zerfallskurve von Radium untersucht. Zu Beginn der Messung sei ein Grammol Radium vorhanden. Ein Mol eines bestimmen Stoffes enthält ca. $6{,}023 \cdot 10^{23}$ Moleküle. N sei die Zahl der Moleküle.

Für den Zerfall gilt die Differentialgleichung $\dot{N}(t) = -\lambda \cdot N(t)$.

Sie hat die Lösung $N = C \cdot e^{-\lambda t}$.

Geben Sie die spezielle Lösung an $N(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden ▷ 142

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ▷ 141

27

Welche der folgenden Differentialgleichungen sind linear?

a) $c_2 y'' + c_1 y' + c_0 y = f(x)$

b) $xy'' + x^2 y' = y$

c) $(y'')^2 + y' = y + C$

d) $y' = y^3$

---------------------------------- ▷ 28

84

$y_{inh} = \frac{19}{108} + \frac{5}{18}x + \frac{1}{6}x^2$ umgeformt $y_{inh} = \frac{1}{108}(18x^2 + 30x + 19)$

Suchen Sie die spezielle Lösung für die inhomogene Differentialgleichung

$$y''' - y'' - 6y = x^2 - 3x - 2$$

$y_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden ---------------------------------- ▷ 88
Erläuterung oder Hilfe erwünscht ---------------------------------- ▷ 85

141

Die allgemeine Lösung: $N = C \cdot e^{-\lambda t}$

Die Randbedingung lautet: Zum Zeitpunkt $t = 0$ (Beginn der Messung) ist ein Mol, das sind $6{,}023 \cdot 10^{23}$ Moleküle, Radium vorhanden: Das setzen wir ein:

$$N(0) = 6{,}023 \cdot 10^{23} = C \cdot e^0 = C \cdot 1$$

Wir erhalten:

$$C = 6{,}023 \cdot 10^{23}$$

$N = \ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 142

28

a, b

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 31

Hilfe und Erläuterung erwünscht --------------------------------- ▷ 29

85

Gegeben: $y''' - y'' - 6y = x^2 - 3x - 2$

Neu ist an diesem Beispiel nur, daß y''' auftritt. Die Lösung folgt ganz und gar den bisherigen Beispielen.

Ansatz: $y_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$y'_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$y''_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$y'''_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------- ▷ 86

142

$N(t) = 6{,}023 \cdot 10^{23} \cdot e^{-\lambda t}$

Das Ziel dieses Leitprogramms ist es

Mathematisches Wissen für Anwendungen zu vermitteln.

Die *Fähigkeit* zum *selbständigen Lernen* anhand schriftlicher Unterlagen zu fördern.

Das ist aus folgenden Gründen notwendig:

Das *Selbststudium* zur Vertiefung angebotener Sachverhalte und zur Erschließung neuer Sachverhalte ist ein Bestandteil des Studiums.

Die Fähigkeit und Bereitschaft zum Selbststudium erhöht die Unabhängigkeit vom notwendig begrenzten Angebot der Universität.

Der Lernprozeß dauert heute während des gesamten Berufslebens an und muß dann selbständig durchgeführt werden.

--------------------------------- ▷ 143

29

Eine Differentialgleichung ist nach Definition linear, wenn ihre Ableitungen $y' + y'', \dots$ und die Funktion y selbst nur in der ersten Potenz vorkommen.
Geben Sie an, welche der untenstehenden Differentialgleichungen linear sind:

a) $y' + y'' + y^2 = 0$

b) $y'' + 3xy + C = 0$

c) $y' = C + x^2$

d) $y' + y'' = 2xy + 5$

-------------------------------- ▷ 30

86

Ansatz: $y_{inh} = A + Bx + Cx^2$ Hinweis: Ansatz richtet sich nach höchster Potenz in $f(x)$

$y'_{inh} = 2Cx + B$ $y''_{inh} = 2C$ $y'''_{inh} = 0$

Wir setzen ein in die inhomogene Differentialgleichung

$$y''' - y'' - 6y = x^2 - 3x - 2$$

$$\dots\dots\dots\dots = x^2 - 3x - 2$$

Ordnen Sie um und fassen Sie wieder nach Potenzen von x zusammen.

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0$$

-------------------------------- ▷ 87

143

Eine grobe Gliederung der Tätigkeiten beim Studium sind:

Informationsaufnahme

Informationsverarbeitung

Informationsspeicherung

Diese Prozesse stehen in einem wechselseitigen Zusammenhang.

-------------------------------- ▷ 144

30

Linear sind die Differentialgleichungen: b), c), d)

Den Mut nur nicht verlieren – und ihre Exzerpte benutzen. Die haben Sie doch angefertigt – oder?

-------------------------------- ▷ 31

87

$$0-2C-6A-6Bx-6Cx^2=x^2-3x-2$$

$$x^2(-6C-1)+x(3-6B)+(-2C-6A+2)=0$$

Berechnen Sie nun C, B und A

C = ... B = ... A = ...

Damit erhalten Sie

$y_{inh}=A+Bx+Cx^2=$ ....

-------------------------------- ▷ 88

144

Informationsaufnahme erfolgt in Vorlesungen, Seminaren, Tutorien, Praktika. Hier im Leitprogramm steht die Informationsaufnahme anhand von Literatur im Vordergrund. Techniken sind: *intensives Lesen* und *selektives Lesen.*

Intensives Lesen: Zusammenhängende Abschnitte werden im Zusammenhang studiert. Neue Begriffe und Regeln werden stichwortartig exzerpiert. Rechnungen werden mitvollzogen.

Motivation, Interesse und positive Einstellungen zum Studium erhöhen die Informationsaufnahme bei gleichem Zeitaufwand.

Eingeschobene Pausen erhöhen im allgemeinen Lerneffektivität und Konzentrationsfähigkeit. In den – zeitlich begrenzten – Pausen sollte man eine andersartige Tätigkeit ausüben, um Interferenzen zu vermeiden.

-------------------------------- ▷ 145

31

Welche der folgenden Differentialgleichungen sind homogen?

a) $y'' + y + C = 0$

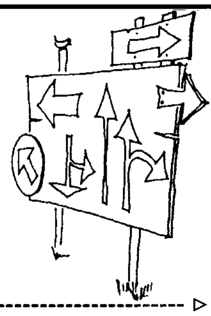
b) $y'' + y = x^3$

c) $y'' + f(x) = 0$

d) $y' + y = 0$

---------------------------------- ▷ 32

88



$y_{inh} = \frac{7}{18} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2$

$C = -\frac{1}{6}$ $B = \frac{1}{2}$ $A = \frac{7}{18}$

Übungen für den 3. Fall: $f(x)$ ist eine Exponentialfunktion ---------------------------------- ▷ 89
Übungen für den 4. Fall: $f(x)$ ist eine trigonometrische Funktion ---------------------- ▷103
Abschnitt 9.3 Variation der Konstanten ---------------------------------- ▷116

145

Selektives Lesen: Aus einem Text sind bestimmte Informationen herauszufinden. Hier geht es vor allem um die Unterscheidung zwischen relevanter und irrelevanter Information.

Die Informationsaufnahme über intensives und selektives Lesen erfordert entgegengesetzte Studiertechniken. Beide Techniken müssen geübt sein. Beim intensiven Lesen soll die Information vollständig aufgenommen werden. Beim selektiven Lesen soll die relevante Information – es ist der geringere Teil – erkannt und bevorzugt wahrgenommen werden. Die Gefahr beim selektiven Lesen ist, sich von der Suche nach der gewünschten Information ablenken zu lassen. Das kostet Zeit.

---------------------------------- ▷ 146

32

Differentialgleichung d) ist homogen

....

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 35

Hilfe oder weitere Übung erwünscht --------------------------------- ▷ 33

89

Übungen für den 3. Fall: $f(x)$ ist eine Exponentialfunktion.
Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = C \cdot e^{\lambda x}$$

Geben Sie den allgemeinen Ansatz für die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an. Lehrbuch Seite 216

$y_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 90

146

Informationsspeicherung

Die Verfügbarkeit über Gedächtnisinhalte hängt von der Form des Einlernens und der Strukturierung des Lernmaterials ab.

Lernen im Zusammenhang

Sachverhalte, die einsichtig und im Zusammenhang gelernt sind, bleiben länger verfügbar.

Aktives und Passives Lernen

Wiedererkennen eines bekannten Lerninhalts täuscht subjektiv einen höheren Kenntnisstand vor. Wiederkennen gewährleistet noch nicht die Fähigkeit zur Reproduktion. Die Fähigkeit zur Reproduktion gewährleistet noch nicht die Fähigkeit zu Anwendung. Die Informationsspeicherung muß daher kontrolliert werden. Eine automatische Kontrolle besteht in aktiver Reproduktion.

--------------------------------- ▷ 147

33

Benutzen Sie die Definitionen für eine homogene Differentialgleichung im Lehrbuch.
Welche der folgenden Differentialgleichungen sind homogen?

a) $y'' + x = C$

b) $xy' = 0$

c) $xy' = x$

d) $y'' + y' = 2xy^2$

--------------------------------- ▷ 34

90

$y_{inh} = C \cdot e^{\lambda x}$

Suchen Sie – gegebenfalls anhand des Lehrbuchs Seite 215 – die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' + 5y' - 14y = 2e^x$$

$$y_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 92

Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 91

147

Jetzt geht es aber weiter mit dem fachlichen Studium. In den nächsten Abschnitten dieses Leitprogramms wird die Anwendung der Methoden der Differentialgleichungen auf Schwingungsprobleme erläutert. Die Mathematik ist besonders dann hilfreich, wenn die Verwendung anderer als der gewählten und ständig benutzten Symbole keine Schwierigkeiten macht. In diesen Fällen erleichtert die Substitution unbekannter Symbole durch vertraute Symbole häufig den Überblick.

--------------------------------- ▷ 148

34

Die Differentialgleichungen b) und d) sind homogen.

▷ 35

91

Gegeben $y'' + 5y' - 14y = 2e^x$

Lösungsansatz: $y_{inh} = C \cdot e^x$

Wir bilden die Ableitungen:

$y'_{inh} = \dots\dots\dots\dots$ $y''_{inh} = \dots\dots\dots\dots$

Wir setzen ein in die inhomogene Differentialgleichung und erhalten

$$C \cdot e^x + 5C \cdot e^x - 14C \cdot e^x = 2 \cdot e^x$$

Teilen Sie durch e^x und rechnen Sie C aus.

$C = \dots\dots\dots\dots$

Setzen Sie ein $y_{inh} = C \cdot e^x = \dots\dots\dots\dots$

▷ 92

148

Der harmonische Oszillator

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 9.5.2 Der freie ungedämpfte harmonische Oszillator
Lehrbuch, Seite 223 - 225

▷ 149

35

Im Kapitel 9.1. wurde gezeigt, daß die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung noch unbestimmte Integrationskonstanten enthält.

Wieviele unbestimmte Integrationskonstanten enthält die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung?

....

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 37

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 36

92

$y_{inh} = -\frac{1}{4}e^x$

....

Suchen Sie die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$2y'' + 7y' - 15y = 3e^{2x}$$

$y_{inh} =$ ....

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 94

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 93

149

Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung des ungedämpften, freien harmonischen Oszillators ?

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t)$$

mit

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

$x(t) =$ ....

-------------------------------- ▷ 150

36

Anschaulich können wir die Zahl der Integrationskonstanten gleich der Anzahl der Integrationen setzen, die notwendig sind, um von der Ableitung höchsten Grades auf die gesuchte Funktion zu kommen.

Bei einer Differentialgleichung n-ter Ordnung sind dies n Integrationen. Dann erhalten wir also n Integrationskonstanten.

Wieviele Integrationskonstante enthält die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung?

....

-------------------------------- ▷ 37

93

Gegeben $2y'' + 7y' - 15y = 3 \cdot e^{2x}$

Lösungsansatz $y_{inh} = C \cdot e^{2x}$

Wir bilden die Ableitungen: $y'_{inh} =$ .... $y''_{inh} =$ ....

Dies wird eingesetzt in die Differentialgleichung

$$e^{2x} \cdot C(8 + 14 - 15) = 3 \cdot e^{2x}$$

Daraus ergibt sich $C =$ ....

$y_{inh} = C \cdot e^{2x} =$ ....

-------------------------------- ▷ 94

150

$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$ oder $x(t) = C \cos(\omega_0 t - \varphi)$

....

Aufgabe richtig gelöst -------------------------------- ▷ 152

Aufgabe falsch gelöst -------------------------------- ▷ 151

37

Zwei Integrationskonstante

Wieviele Randbedingungen sind notwendig, um aus der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung eine spezielle Lösung zu bestimmen? ....

Die spezielle Lösung heißt auch .... Lösung.

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 39

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 38

94

$y'_{inh} = 2C \cdot e^{2x}$ $\quad y''_{inh} = 4C \cdot e^{2x}$

$C = \frac{3}{7}$ $\quad y_{inh} = \frac{3}{7} \cdot e^{2x}$

....

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = A \cdot e^{\lambda x}$$

Bisher hatten wir Erfolg mit dem Ansatz

$$y_{inh} = C \cdot e^{\lambda x}$$

Dieser Ansatz führt *immer* zum Erfolg -------------------------------- ▷ 95

Dieser Ansatz führt *nicht immer* zum Erfolg -------------------------------- ▷ 96

151

Rechnen Sie noch einmal die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe des Exponentialansatzes aus, oder verifizieren Sie die angegebene Lösung.

Falls Sie Schwierigkeiten mit dem Exponentialansatz haben, lösen Sie die Aufgabe anhand des Lehrbuches.

DANACH -------------------------------- ▷ 152

38

Um bei einer Differentialgleichung n-ter Ordnung alle n Integrationskonstanten zu bestimmen, sind genau n sinnvolle Randbedingungen notwendig.

Um eine Integrationskonstante zu bestimmen, genügt eine Randbedingung.

Wieviele Randbedingungen sind notwendig, um aus der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung eine spezielle Lösung zu bestimmen? ....

Eine spezielle Lösung heißt auch par .... Lösung.

-------------------------------- ▷ 39

95

Leider haben Sie NICHT recht. Dieser Ansatz, das ist im Lehrbuch gezeigt, *versagt,* wenn λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung für die homogene Differentialgleichung ist. Das sei hier gezeigt. Gegeben:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = A \cdot e^{\lambda x}$$

Charakterische Gleichung der homogenen Differentialgleichung:

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \text{. Eine Lösung sei } r = \lambda \text{.}$$

Dann führt unser Ansatz $y_{inh} = C \cdot e^{\lambda x}$ zur Bestimmungsgleichung:

$$C = \frac{A}{a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0} = \frac{A}{0}$$ Das bedeutet, A ist nicht definierbar.

-------------------------------- ▷ 96

152

Die letzte Aufgabe hatte zwei gleichwertige Lösungen:

$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$ oder $x(t) = C \cos(\omega_0 t - \varphi)$

Die Umrechnung der beiden Lösungen geschieht mit Hilfe des Additionstheorems.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

Mit $\alpha = \omega_0 t$ und $\beta = \varphi$ wird

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \varphi) = C \cos\omega_0 t \cos\varphi + C \sin\omega_0 t \sin\varphi$$
$$= C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$$

mit $C_1 = C\cos\varphi$ und $C_2 = C\sin\varphi$

Welche Bedeutung haben die Konstanten

1) C .... 2) ω_0 .... 3) φ ....

-------------------------------- ▷ 153

39

2 Randbedingungen
partikuläre Lösung.

....

-------------------------------- ▷ 40

96

NEIN ist die richtige Antwort.

Unser Ansatz $y_{inh} = C \cdot e^{\lambda x}$ versagt, wenn λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung für die inhomogene Differentialgleichung ist.
Suchen Sie im Lehrbuch Seite 216 den Lösungsansatz für den Fall, daß λ bereits eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Gegeben: $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = A \cdot e^{\lambda x}$

y_{inh} = ...

------------------------------ ▷ 97

153

1) C: Amplitude der Funktion.

2) ω_0: Kreisfrequenz der Schwingung. Es gilt $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; T: Schwingungsdauer

3) φ Phasenwinkel, d.h. Maß für die Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ (Anfangszustand)

Hinweis: Im Kapitel 3 sind die trigonometrischen Funktionen behandelt. Notfalls wiederholen.

-------------------------------- ▷ 154

40

Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung 1. und 2. Ordnung

Lösung homogener linearer Differentialgleichungen, der Exponentialansatz

Hier handelt es sich um einen größeren Arbeitsabschnitt. Teilen Sie sich die Arbeit in zwei oder drei Abschnitte ein, nach denen Sie jeweils kurz rekapitulieren. Auch wenn es gelegentlich schwer fällt, rechnen sie die Umformungen mit.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

9.2 Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

9.2.1 Lösung homogener linearer Differentialgleichungen, der Exponentialansatz

Lehrbuch Seite 205 - 212

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 41

97

$y_{inh} = Cx \cdot e^{\lambda x}$

Suchen Sie die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y'' + 2y' - 3y = 4 \cdot e^x$$

$$y_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 99

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 98

154

Die Lösung der Differentialgleichung $m\ddot{x} + Dx = 0$ eines freien, ungedämpften harmonischen Oszillators war

$$x(t) = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t$$
$$= C \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Abkürzung: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Bestimmen Sie die Konstanten C und φ für folgende Randbedingungen:

1. Die maximale Auslenkung sei x_{max}.
2. Der Betrag der Geschwindigkeit ist zu Beginn der Bewegung gleich der halben Maximalgeschwindigkeit $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Bemerkung: Es gilt die Beziehung $\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 156

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 155

41

Welches ist die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung

$y'' + 2y' - y = 0$?

Benutzen Sie den Exponentialansatz

$y = Ce^{rx}$

Charakteristische Gleichung: ....

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 43

Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 42

98

Gegeben sei: $y'' + 2y' - 3y = 4 \cdot e^x$

Charakteristische Gleichung der homogenen Differentialgleichung

$r^2 + 2r - 3 = 0 \qquad r_1 = 1 \qquad r_2 = -3$

$r_1 = 1$ ist hier identisch mit $\lambda = 1$. In diesem Fall hilft nur der Ansatz

$$y_{inh} = C \cdot x \cdot e^{\lambda x} = C \cdot x \cdot e^x$$

Ableitungen: $y'_{inh} = C \cdot x \cdot e^x + C \cdot e^x \qquad y''_{inh} = C \cdot x \cdot e^x + 2C \cdot e^x$

Eingesetzt erhalten wir $C \cdot e^x (x + 2 + 2x + 2 - 3x) = 4 \cdot e^x$. Daraus folgt: $C =$ ....

$y_{inh} =$ ....

--------------------------------- ▷ 99

155

Zu Bedingung 1: Die maximale Amplitude liegt vor, wenn die cos-Funktion den Wert 1 erreicht.

$x_{\max} = C$

$C = x_{\max}$

Zu Bedingung 2: Die Geschwindigkeit ist gleich $\frac{d}{dt} x(t)$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 \cdot C \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Die Maximalgeschwindigkeit ist also

$\dot{x}_{\max} = \omega_0 C$

Für $t = 0$ sei der Betrag der Geschwindigkeit gleich der halben Maximalgeschwindigkeit:

$\omega_0 \cdot C \cdot \sin\varphi = \omega_0 \cdot \frac{C}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2} \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}$

--------------------------------- ▷ 156

42

Hier ist ein Beispiel: Gegeben sei $y'' - 2y' - 3y = 0$

Exponentialansatz $y = Ce^{rx}$

1. Ableitung $y' = Cre^{rx}$

2. Ableitung $y'' = Cr^2e^{rx}$

Dies setzen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten $C \cdot e^{rx} \cdot (r^2 - 2r - 3) = 0$

Die charakteristische Gleichung lautet also: $(r^2 - 2r - 3) = 0$

Ermitteln Sie in gleicher Weise die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung

$y'' + 2y' - y = 0$

.... $= 0$

---------------------------------- ▷ 43

99

$y_{inh} = x \cdot e^x$ $\quad (C = 1)$

Die folgende Differentialgleichung tritt bei erzwungenen Schwingungen mit Dämpfung in Mechanik und Nachrichtentechnik auf. Die Notierung ist gewechselt.

$$\ddot{x} + \gamma \cdot \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = F \cdot e^{i\omega t}$$

Suchen Sie die spezielle Lösung (γ, ω_0 und ω sind Konstante. t ist die Zeit, $\ddot{x}$ ist die zweite Ableitung nach der Zeit.)

$x_{inh} =$ ....

Amplitude = ...

Lösung gefunden ---------------------------------- ▷ 102

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ---------------------------------- ▷ 100

156

$x(t) = x_{max} \cdot \cos(\omega_0 + \frac{\pi}{6})$ d.h. $C = x_{max}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$

---------------------------------- ▷ 157

43

$r^2 + 2r - 1 = 0$

Geben Sie die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung an

$3y'' + 2y' - 2y = 0$

Charakteristische Gleichung: ....

Lösen Sie diese quadratische Gleichung

Lösungen: $r_1 =$ ....

$r_2 =$ ....

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 45
Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 44

100

Gegeben: $\ddot{x} + \gamma\omega_0\, \dot{x} + \omega_0^2 x = F \cdot e^{i\omega t}$

Die Notierung ist neu. Die Gleichung ist von dem Typ, den wir bereits behandelten. $F \cdot e^{i\omega t}$ entspricht $A \cdot e^{\lambda x}$ mit $F = A$ und $\lambda x = i\omega t$.

Bei Schwierigkeiten substituieren Sie und arbeiten Sie in der vertrauten Notierung.

Ansatz: $x_{inh} = A \cdot e^{i\omega t}$

Ableitungen: $\dot{x}_{inh} = i\omega A \cdot e^{i\omega t}$ $\ddot{x}_{inh} = -\omega^2 A \cdot e^{i\omega t}$

Eingesetzt in die obige Gleichung:

.... $= F \cdot e^{i\omega t}$

--------------------------------- ▷ 101

157

Der gedämpfte harmonische Oszillator

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 9.5.2 Absatz: Der gedämpfte harmonische Oszillator
Lehrbuch, Seite 225 - 227

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 158

44

Beurteilen Sie Ihre Kenntnisse selbst. Entscheiden Sie, ob Sie die Abschnitte 9.2 und 9.2.1 nochmals durcharbeiten sollten. Lösen Sie anhand des Lehrbuchs die gegebene Differentialgleichung:

$$3y'' + 2y' - 2y = 0$$

Charakteristische Gleichung ....

Lösung der charakterischen Gleichung:

$r_1 =$ ....

$r_2 =$ ....

---------------------------------- ▷ 45

101

$A \cdot e^{i\omega t}(-\omega^2 + i\gamma\omega_0\omega + \omega_0^2) = F \cdot e^{i\omega t}$

Wir kürzen und stellen um

$$A = \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0\omega)}$$

Also $x_{inh} =$ ....

Der Bruch ist eine komplexe Zahl. Wir erhalten den Betrag dieser komplexen Zahl.

$|x_{inh}| =$ ....

Hinweis: $z = a + ib \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

---------------------------------- ▷ 102

158

Wie lautet die Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators?

....

---------------------------------- ▷ 159

45

$$3r^2 + 2r - 2 = 0$$

$$r_1 = -\tfrac{1}{3} + \sqrt{\tfrac{7}{9}}$$

$$r_2 = -\tfrac{1}{3} - \sqrt{\tfrac{7}{9}}$$

Geben Sie jetzt die allgemeine Lösung an für die Differentialgleichung $3y'' + 2y' - 2y = 0$

Charakteristische Gleichung und Lösungen stehen oben im Antwortfeld.

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 49

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 46

102

$$x_{inh} = \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega_0\omega} \cdot e^{i\omega t}$$

Amplitude $|x_{inh}| = \dfrac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega_0^2\omega^2}}$

Bei Schwierigkeiten zurückblättern auf Lehrschritt 100.

Übungen für den 4. Fall $f(x)$ ist eine trigonometrische Funktion -------------------- ▷ 103

Abschnitt 9.3 Variation der Konstanten -------------------------------- ▷ 116

159

$m\ddot{x} = -R\dot{x} - Dx$ bzw. $m\ddot{x} + R\dot{x} + Dx = 0$

Geben Sie eine qualitative Beschreibung der Lösungsfunktion des gedämpften harmonischen Oszillators an.

1. Fall: $\dfrac{R^2}{4m}2 - \dfrac{D}{m} > 0$,

es gibt zwei verschiedene reelle Lösungen. Diese Möglichkeit wird in der Physik als „Kriechfall“ bezeichnet.

Skizzieren Sie die Lösungsfunktion und vergleichen Sie mit der Abbildung im Lehrbuch.

-------------------------------- ▷ 160

46

Lösungen der quadratischen Gleichung $3r^2 + 2r - 2 = 0$:

$$r_1 = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{7}{9}} \qquad r_2 = -\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{7}{9}}$$

Wenn der Radikand, d.h. der Ausdruck innerhalb der Wurzel, reell ist, so ist die Lösung der zugrunde liegenden Differentialgleichung gegeben durch die Formel:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Können sie jetzt die Lösung angeben? y = ...

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 49

Erläuterung oder weitere Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 47

103

Übungen für den 4. Fall: $f(x)$ ist eine trigonometrische Funktion.

Lehrbuch Seite 217 und 218.

Die Ladung Q in einem elektrischen Kreis ist gegeben durch

$$\ddot{Q} + 2\dot{Q} + 2Q = 3\sin 2t$$

Suchen Sie die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Q_{inh} = ...

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 109

Hilfe, Erläuterung und Rechengang --------------------------------- ▷ 104

160

2. Fall: $\frac{R^2}{4m}2 - \frac{D}{m} < 0$, es gibt zwei konjugiert komplexe Lösungen.

Skizzieren Sie die Lösungsfunktion und vergleichen Sie sie mit der Abbildung im Lehrbuch.

Wie wird dieser Fall genannt? .... ------------------------- ▷ 161

47

Hier ist noch ein einfaches Beispiel. Gegeben ist die Differentialgleichung $4y'' - y = 0$

(1) Exponentialansatz: $y = Ce^{rx}$

(2) Charakteristische Gleichung $4r^2 - 1 = 0$

(3) Lösung der charakterischen Gleichung: $r_1 = +\frac{1}{2}$ $r_2 = -\frac{1}{2}$

(4) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist: $y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Einsetzen von r_1 und r_2 aus (3) ergibt:

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 48

104

Übersichtlicher und vertrauter wird die Differentialgleichung, wenn Sie substituieren und die vertraute Notierung herstellen.

Gegeben: $\ddot{Q} + 2\dot{Q} + 2Q = 3\sin 2t$ mit $y = Q$ und $x = t$ wird daraus

$y'' + 2y' + 2y = 3\sin 2x$

Wie im Lehrbuch – Seite 217 – setzen wir an

$y_{inh} = A\sin 2x + B\cos 2x$

Ableitungen: $y'_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y''_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

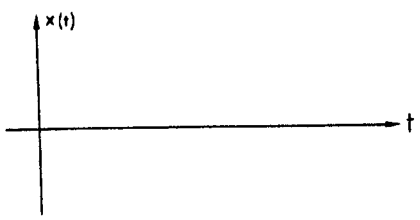
--------------------------------- ▷ 105

161

Schwingfall

3. Fall $\frac{R^2}{4m}2 = \frac{D}{m}$, es gibt eine reelle Doppelwurzel.

Dieser Fall wird aperiodischer Grenzfall genannt. Skizzieren Sie die Lösungsfunktion und vergleichen Sie mit der Abbildung im Lehrbuch.



--------------------------------- ▷ 162

48

$y = C_1 \cdot e^{\frac{x}{2}} + C_2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

Kehren wir zur ursprünglichen Aufgabe zurück:

Gegeben war: $3y'' + 2y' - 2y = 0$

Charakteristische Gleichung $3r^2 + 2r - 2 = 0$

Lösungen: $r_1 = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{7}{9}}$ $r_2 = -\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{7}{9}}$

Geben Sie nun nach dem Schema im vorhergehenden Lehrschritt die allgemeine Lösung an:

y = ...

---------------------------------- ▷ 49

105

$y'_{inh} = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$
$y''_{inh} = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$

Dies setzen wir ein in die Differentialgleichung. Hier geduldig und ruhig rechnen.

$y'' + 2y' + 2y = 3\sin 2x$
.... $= 3\sin 2x$

---------------------------------- ▷ 106

162

Der getriebene harmonische Oszillator

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 9.5.2 Abschnitt: Der getriebene harmonische Oszillator
Lehrbuch, Seite 227 - 231

---------------------------------- ▷ 163

49

$$y = C_1 e^{(-\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}})\,x} + C_2 e^{(-\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{7}{9}})\,x}$$

Die Differentialgleichung $16y'' - 8y' + 26y = 0$ hat die charakteristische Gleichung

$$16r^2 - 8r + 26 = 0$$

Diese Gleichung hat die beiden komplexen Lösungen

$$r_1 = \frac{1}{4} + i\frac{5}{4}$$

$$r_2 = \frac{1}{4} - i\frac{5}{4}$$

Geben Sie die reelle Lösung der Differentialgleichung an: y = ...

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 51
Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 50

106

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 2A\sin 2x + 2B\cos 2x = 3\sin 2x$$

Diese – etwas lange – Gleichung wird umgeordnet und sortiert nach Termen mit $\sin 2x$ und $\cos 2x$

.... = 0

Da sich $\sin 2x$ und $\cos 2x$ in unterschiedlicher Weise ändern, müssen die Terme zusammengefaßt je für sich die Gleichung erfüllen. Damit erhalten wir zwei Gleichungen:

$\sin 2x$ (..............................) = 0

$\cos 2x$ (..............................) = 0

-------------------------------- ▷ 107

163

Geben Sie die Bewegungsgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators an, auf den die periodische äußere Kraft F_A wirkt.

$$F_A = F_0 \cos(\omega_A t)$$

....

-------------------------------- ▷ 164

50

Differentialgleichung: $16y'' - 8y' + 26y = 0$

Charakterische Gleichung $16r^2 - 8r + 26 = 0$

Lösungen:

$$r_1 = \frac{1}{4} + i\frac{5}{4} \qquad r_2 = \frac{1}{4} - i\frac{5}{4}$$

Lösen Sie die Aufgabe jetzt schrittweise anhand des Lehrbuchs Seite 208. Es ist dort der 2. Fall.

Gesucht ist die reelle Lösung.

y = ...

-------------------------------- ▷ 51

107

$$\sin 2x(-4A - 4B + 2A - 3) + \cos 2x(-4B + 4A + 2B) = 0$$

$$\sin 2x(-4A - 4B + 2A - 3) = 0$$

$$\cos 2x(-4B + 4A + 2B) = 0$$

Die Klammern müssen gleich Null sein. Das ergibt Bestimmungsgleichungen für A und B.
Berechnen Sie zuerst aus der unteren Klammer

$4A =$ .... $A =$ ....

Dann setzen Sie A in die obere Klammer ein und berechnen aus der oberen Klammer B:

$B =$ .... $A =$ ....

-------------------------------- ▷ 108

164

$m\ddot{x} + R\dot{x} + Dx = F_0 \cos \omega_A t$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, welche die erzwungene Schwingung beschreibt, setzt sich zusammen aus

1. der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und
2. einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung

Die explizite Form dieser beiden Terme finden Sie im Abschnitt 9.5.2. Nach längerer Zeit („Einschwingzeit") beschreibt ausschließlich die spezielle Lösung den Bewegungsablauf.

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(D - m\,\omega_A^2)^2 + \omega_A^2 \cdot R^2}} \cdot \cos(\omega_A t - \varphi)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist eine gegen Null abfallende Exponentialfunktion. Die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung wird daher in der Physik als *stationäre Lösung* bezeichnet.

-------------------------------- ▷ 165

51

$y = e^{\frac{1}{4}x}(C_1 \cos\frac{5}{4}x + C_2 \sin\frac{5}{4}x)$

Welches ist die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung ?

$3y'' + 5y' + 4y = 0$

$y = \dots\dots\dots\dots\dots$

▷ 52

108

$4A = 2B$ $\qquad A = \frac{1}{2}B$

$B = -\frac{6}{10}$ $\qquad A = -\frac{3}{10}$

Jetzt können Sie einsetzen in

$y_{inh} = A\sin 2x + B\cos 2x$

$y_{inh} = \dots\dots\dots\dots\dots$

Mit $y = Q$ und $x = t$ geben Sie nun die Lösung an:

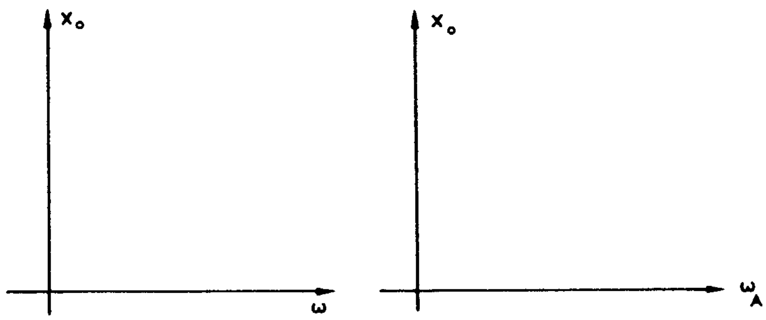
$Q_{inh} = \dots\dots\dots\dots\dots$

▷ 109

165

Skizzieren Sie die Amplitude der stationären Schwingung als Funktion der Erregerfrequenz ω_A

a) mit Dämpfung b) ohne Dämpfung



▷ 166

52

$$y = e^{-\frac{5}{6}x} \cdot \left(C_1 \cos\frac{\sqrt{23}}{6}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{23}}{6}x \right)$$

Hinweis: Die Lösungen der charakteristischen Gleichung waren komplex.

$$r_1 = -\tfrac{5}{6} + i\frac{\sqrt{23}}{6} \qquad r_2 = -\tfrac{5}{6} - i\frac{\sqrt{23}}{6}$$

Berechnen Sie die allgemeine, reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 53

109

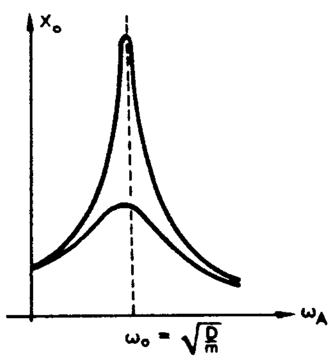
$$y_{inh} = -\tfrac{3}{10}\sin 2x - \tfrac{6}{10}\cos 2x$$
$$Q_{inh} = -\tfrac{3}{10}\sin 2t - \tfrac{6}{10}\cos 2t$$

Jetzt soll der Strom I bestimmt werden

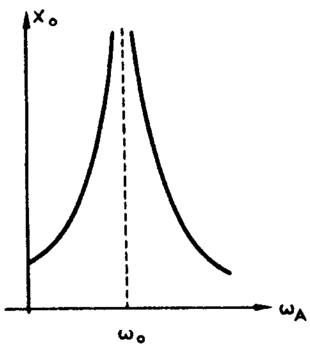
$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 110

166



a) Amplitude der gedämpften erzwungenen Schwingung (R > 0)



b) Amplitude der ungedämpften erzwungenen Schwingung (R = 0)

--------------------------------- ▷ 167

53

$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

Rechengang: Charakteristische Gleichung: $r^2 + 2r + 5 = 0$

Lösungen: $r_1 = -1 + 2i$ $r_2 = -1 - 2i$

Im Lehrbuch ist gezeigt – Seite 208-209, 2. Fall – daß die allgemeine reelle Lösung in der folgenden Form angegeben werden kann.

$$y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Das ist gleichwertig zu der oben angegebenen Form.

--------------------------------- ▷ 54

110

$I = \dot{Q} = \frac{6}{5}\sin 2t - \frac{3}{5}\cos 2t$

Hinweis: Die beiden trigonometrischen Funktionen lassen sich zusammenfassen. Das ist im Lehrbuch – Seite 75 – gezeigt. Sie können verifizieren, daß gilt:

$$I = \dot{Q} = \frac{\sqrt{45}}{5} \cdot \sin(2t + \varphi_0) \qquad \tan\varphi_0 = -2$$

Weiter sei darauf hingewiesen, daß die allgemeine Lösung sich zusammensetzt aus der speziellen Lösung für die inhomogene Differentialgleichung und der speziellen Lösung für die homogene Differentialgleichung. Hier ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung eine gedämpfte Schwingung.

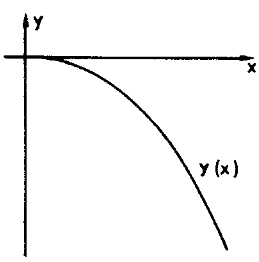
--------------------------------- ▷ 111

167

Zum Abschluß noch eine physikalische Aufgabe.

Ein Körper der Masse m wird in horizontaler Richtung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 geworfen. Zur Abwurfzeit $t = 0$ befinde er sich am Punkt $x = 0, y = 0$. Auf den Körper wirkt nur die Schwerkraft. Darum lauten hier die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die x- und die y-Komponente

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = -mg$$



Lösen Sie diese beiden Differentialgleichungen mit den angegebenen Randbedingungen. Geben Sie die Bahnkurve $y(x)$ an.

--------------------------------- ▷ 168

54

Suchen Sie die Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{3}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{24}y = 0$$

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 55

111

Als letztes Beispiel sei gegeben

$$\ddot{x} + 4x = 3\cos 2t$$

In diesem Beispiel versagt der im Lehrbuch gegebene Ansatz

$$x_{inh} = A\sin(2t) + B\cos(2t)$$

Der Grund: 2 ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung der homogenen Differentialgleichung. Hier hilft der Ansatz

$$x_{inh} = A \cdot t\sin(2t) + B \cdot t \cdot \cos(2t)$$

$x_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden ---------------------------------- ▷ 115

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ---------------------------------- ▷ 112

168

$x(t) = v_0 \cdot t$

$y(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2$ Bahnkurve: $y(x) = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2}$

Lösungsweg: Beide Differentialgleichungen lassen sich elementar integrieren:

$x(t) = C_1 t + C_2$ $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_3 t + C_4$

Randbedingungen: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$,

$y(0) = 0$ $\dot{y}(0) = 0$

Daraus folgen die Lösungen:

$x(t) = v_0 t$ und $y(t) = -\frac{g}{2}t^2$

Durch Eliminieren von t erhalten wir die Bahnkurve $y(x) = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$

---------------------------------- ▷ 169

55

$y = c_1 \cdot e^{-\frac{x}{6}} + c_2 \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{6}}$

....

Lösung gefunden --------------------------------- ⊳ 58

Fehler gemacht oder Erläuterung erwünscht --------------------------------- ⊳ 56

112

Zwei Schwierigkeiten kommen hier zusammen:

- Der Wechsel der Notierung (x statt y; t statt x).
- Der neue Ansatz.

Wir rechnen schrittweise

Ansatz: $x_{inh} = A \cdot t \cdot \sin 2t + B \cdot t \cdot \cos 2t$

$\dot{x}_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ddot{x}_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ⊳ 113

169

Rechnen Sie nun nach einem oder mehreren Tagen die Übungsaufgaben im Lehrbuch Seite 232.

Aufgabe 9.4 A a

Aufgabe 9.4 B a

Die Lösungen finden Sie ab Seite 233.

Falls Sie Fehler hatten, rechnen Sie jeweils noch eine weitere Aufgabe. Sie kennen inzwischen die Regel. Übungsaufgaben so lange rechnen, bis man mindestens eine Aufgabe sicher gerechnet hat. Besser ist es, zwei Aufgaben als Kriterium zu nehmen.

Benutzen Sie beim Rechnen Ihr Exzerpt.

--------------------------------- ⊳ 170

56

Die Differentialgleichung ist $\frac{3}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{24}y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{24} = 0$

Diese besitzt eine Doppelwurzel: $r_1 = r_2 = -\frac{1}{6}$

Nach Seite 211 des Lehrbuchs – 3. Fall – erhalten wir dann die Lösung

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{6}} + C_2 x\, e^{-\frac{x}{6}}$$

Lösen Sie nun nach dem gleichen Schema die Differentialgleichung

$y'' - 2y' + y = 0$

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 57

113

$x_{inh} = A \cdot t \cdot \sin 2t + B \cdot t \cdot \cos 2t$

$\dot{x}_{inh} = A \sin 2t + 2At \cos 2t + B \cos 2t - 2Bt \sin 2t$

$\ddot{x}_{inh} = 4A \cos 2t - 4B \sin 2t - 4At \sin 2t - 4Bt \cos 2t$

Dies müssen wir einsetzen in unsere Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + 4x = 3\cos 2t$$

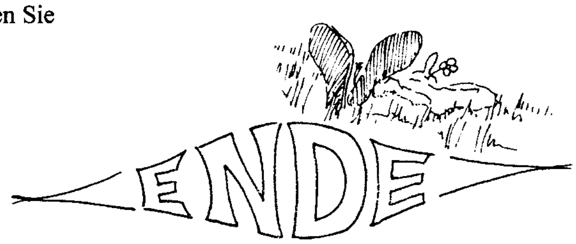
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3\cos 2t$$

--------------------------------- ▷ 114

170

Nun haben Sie

das



dieses langen Kapitels erreicht.

Allein durchgehalten zu haben, ist schon eine Leistung.

57

$y = C_1 e^x + C_2 x e^x$

Das Lösen von Differentialgleichungen mit Hilfe des Exponentialansatzes ist das wichtigste Thema dieses Kapitels. Damit können Sie einen großen Teil der in der Praxis auftretenden Differentialgleichungen lösen. Daher noch eine Aufgabe.

$2y' = 3y$

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden ▷ 60

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ▷ 58

114

$4A\cos 2t - 4B\sin 2t = 3\cos 2t$

Hier gilt wieder, daß die Terme mit $\sin 2t$ und mit $\cos 2t$ je für sich genommen die Gleichung erfüllen müssen. Das gibt zwei Bestimmungsgleichungen für A und B.

$4A\cos 2t = 3\cos 2t$

$-4B\sin 2t = 0$

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $B = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_{inh} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 115