0

Kapitel 5

Differentialrechnung

1

Folge und Grenzwert

Grenzwert einer Zahlenfolge

Auch in diesem Abschnitt handelt es sich um Sachverhalte, die vielen aus der Schule bekannt sein dürften. Sie müssen selbst entscheiden, ob Sie den Lehrbuchabschnitt kurz wiederholen oder gründlich studieren.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 5.5.1 Die Zahlenfolge
5.5.2 Grenzwert einer Zahlenfolge
Lehrbuch Seite 103 - 106

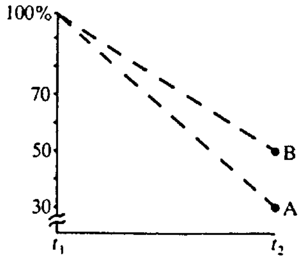
BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt -------------------------------- ▷ 2

57

Zwei Gruppen A und B schreiben ein Fremdwortdiktat zur Zeit t_1. Die Fehlerzahl ist in beiden Gruppen gleich.

Gruppe A: Das Diktat ist so korrigiert, daß Fehler mit Rotstift unterstrichen sind. Die richtige Schreibweise muß aus Wörterbüchern selbst ermittelt werden.

Gruppe B: Das Diktat ist so korrigiert, daß die richtige Schreibweise und Zeichensetzung eingesetzt ist. Nach 4 Wochen (t_2) wird ein zweites identisches Diktat geschrieben.



Aufgetragen ist die relative Fehlerzahl, die in Gruppe A wegen der aktiveren Lernform signifikant zurückgegangen ist.

(frei nach Löwe 1972) -------------------------------- ▷ 58

113

Bilden Sie noch die Ableitungen für:

a) $y = e^x$ $y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $y = x^4$ $y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $y = \cos x$ $y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $y = 5 \sin x$ $y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

e) $y = \ln x$ $y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

f) $y = 2\, e^x$ $y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 114

2

Der Ausdruck

$a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

heißt . . . .

a_n ist das . . . .

▷ 3

58

Exzerpieren ist aktives Lernen und erleichtert das Einprägen und Behalten.

Wenn Sie neue Begriffe, Definitionen oder Regeln später in einem anderen Zusammenhang anwenden wollen, müssen Sie sie im Gedächtnis haben.

Dazu dienen Auszüge. Die Technik, Auszüge anzufertigen, ist nicht schwer. Sie ist, wie alle wichtigen Techniken, sehr einfach.

Exzerpieren Sie jetzt – falls Sie das nicht bereits getan haben – zur Übung die wichtigsten Begriffe aus dem Lehrbuch Abschnitt 5.3.

▷ 59

114

a) $y' = e^x$

b) $y' = 4x^3$

c) $y' = -\sin x$

d) $y' = 5 \cos x$

e) $y' = \frac{1}{x}$

f) $y' = 2\,e^x$

Die Technik des Differenzierens muß man üben. Man muß die Ableitungen der einfachen Funktionen im Kopf haben.

Weitere Übungsaufgaben finden Sie auf Seite 131 des Lehrbuchs.

Wir wissen ja, Übungsaufgaben löst man, bis man die Technik beherrscht.

▷ 115

3

Zahlenfolge
allgemeine Glied

Geben Sie die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge an für

$$a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

---------------------------------- ▷ 4

59

Haben Sie die Begriffe herausgeschrieben?

Nein ich hatte keinen Zettel zur Hand ---------------------------------- ▷ 60

Nein, ich kenne alle Begriffe bereits aus der Schule ---------------------------------- ▷ 61

Ja ---------------------------------- ▷ 62

115

Die Differentiation komplizierter Funktionen

Bei zusammengesetzten Funktionen müssen zwei oder mehrere Regeln nacheinander oder gleichzeitig angewandt werden.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 3.5.3 Ableitung komplizierter Funktionen
Lehrbuch, Seite 123 - 125

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ---------------------------------- ▷ 116

4

$-\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{17}, \quad -\frac{1}{26} \quad \dots\dots\dots$

Die obige Zahlenfolge ist eine

☐ konvergente Zahlenfolge

☐ divergente Zahlenfolge

Hat die Zahlenfolge einen Grenzwert?

☐ Ja

☐ Nein

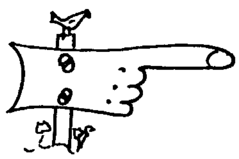
Wenn ja, welchen: ....

Die Folge ist eine ....

-------------------------------- ▷ 5

60

KEIN KOMMENTAR



-------------------------------- ▷ 64

116

Die Differentiationsregeln sind in einer Tabelle auf Seite 129 des Lehrbuchs zusammengestellt.
Benutzen Sie bei der Lösung der folgenden Aufgaben das Lehrbuch und die Tabelle, und geben Sie nicht auf, auch wenn es etwas dauert.

1. $y = 4x^3$ $y' = \dots\dots\dots\dots\dots$
2. $y = \frac{1}{2x}$ $y' = \dots\dots\dots\dots\dots$
3. $y = 3x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$ $y' = \dots\dots\dots\dots\dots$
4. $y = 7 \cdot \sin(ax)$ $y' = \dots\dots\dots\dots\dots$
5. $y = \frac{1}{2}\cos(6x)$ $y' = \dots\dots\dots\dots\dots$

-------------------------------- ▷ 117

5

Konvergente Folge

Ja: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = 0$

Nullfolge

Strebt das allgemeine Glied einer Zahlenfolge für n gegen Unendlich $(n \to \infty)$ gegen einen festen Wert, so heißt dieser

....

Rechnen Sie aus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+10} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 6

61

Ja, wenn Sie alle Begriffe des Abschnitts bereits aus der Schule genau kannten, ist diese Übung im Augenblick für Sie sinnlos.

Mit dem Exzerpieren sollten Sie anfangen, sobald für Sie Neues kommt. Dann aber sollten Sie es wirklich tun.

--------------------------------- ▷ 63

117

1. $y' = 12x^2$
2. $y' = \frac{-1}{2x^2}$
3. $y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
4. $y' = 7a \cdot \cos(ax)$
5. $y' = (-3)\sin(6x)$

Alle Aufgaben richtig --------------------------------- ▷ 122
Fehler bei Aufgabe 4 oder 5 --------------------------------- ▷ 118
Fehler bei Aufgabe 1 - 3 --------------------------------- ▷ 120

6

Grenzwert

0

Hatten Sie Schwierigkeiten mit den Begriffen, so ist es zweckmäßig, noch einmal den Abschnitt im Lehrbuch zu studieren. Schreiben Sie dabei auf einem Sonderblatt neue Begriffe und Definitionen mit stichpunktartigen Erklärungen heraus. Sie sollten die Definitionen anhand der Stichworte reproduzieren können.

Rechnen Sie jetzt

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$ .... $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}+3\right) =$ ....

▷ 7

62

Sehr gut. Herausgeschrieben haben könnten Sie:

- Zusammenhang zwischen Reihe und Folge;
- Anfangsglied, Endglied;
- unendliche Reihe/endliche Reihe;
- geometrische Reihe;
- Summe der geometrischen Reihe.

Sie werden diese Technik noch sehr oft brauchen.

▷ 63

118

Die Ableitung trigonometrischer Funktionen setzt voraus, daß man weiß:

$y = \sin(ax) \quad \to \quad y' = a \cdot \cos(ax)$

$y = \cos(ax) \quad \to \quad y' = -a \cdot \sin(ax)$

Diese Ableitung finden Sie im Lehrbuch, Seite 124 unter dem Stichwort *mittelbare Funktionen*. Rechnen Sie die Aufgaben noch einmal:

$y = 7\sin(cx)$ $y' =$ ....

$y = \frac{1}{2}\cos(6x)$ $y' =$ ....

▷ 119

7

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} + 3\right) = 3$

Rechnen Sie noch drei Aufgaben:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ = ...
2. $\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n^2}\right)$ = ...
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ = ...

------------------------------ ▷ 8

63

Von nun ab sollten Sie von jedem studierten Text einen kurzen Auszug machen. Das gilt nur für solche Texte, bei denen Sie beschlossen haben, sie intensiv zu studieren.

Die Auszüge können in einem Ringbuch, in einem Hefter oder in einer Kartei gesammelt und geordnet werden.

Es ist natürlich nur dann sinnvoll, Auszüge zu machen, wenn der Inhalt Ihnen neu ist.

------------------------------ ▷ 64

119

$y' = 7\,c\cos(cx)$

$y' = -\frac{6}{2}\sin(6x)$

Alles richtig ------------------------------ ▷ 122

Bei Fehlern: Lösen Sie die folgenden Aufgaben
anhand des Lehrbuchs Seite 124 Stichwort: *mittelbare Funktion*

$y = 3\sin(\frac{1}{3}x)$

$y = 4\cos(2x)$

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt ------------------------------ ▷ 120

8

0

3

0

....

Keine Fehler ------------------------------- ▷ 12

Fehler gemacht oder
weitere Erklärungen für die Berechnung von Grenzwerten erwünscht --------------- ▷ 9

64

Die Ableitung einer Funktion

Exzerpieren Sie und verfolgen Sie bei der Bearbeitung des Abschnitts die Rechnungen auf Konzeptpapier mit.

Wir verstehen und behalten eine mathematische Ableitung besser bei aktiver Mitarbeit. Mitrechnen ist zwar unbequem, aber nützlich.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 3.4 Ableitung einer Funktion
Lehrbuch Seite 112-177

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt ------------------------------- ▷ 65

120

Sie hatten noch Schwierigkeiten. Das ist verständlich. Wenn wir jetzt weitermachen, ohne die Schwierigkeiten zu beheben, sparen wir keine Zeit. Es werden dann künftig Verständnisschwierigkeiten entstehen, deren Ursache nicht genau lokalisiert ist und die Sie sehr aufhalten können. Rechnen Sie alle Beispiele noch einmal nach. Es war:

1. Potenz	$y = 4x^3$	$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Potenz oder Quotientenregel	$y = \frac{1}{2x}$	$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. Potenz	$y = 3x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$	$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$
4. Kettenregel	$y = 7\sin(ax)$	$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$
5. Kettenregel	$y = \frac{1}{2}\cos(6x)$	$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

------------------------------- ▷ 121

9

Folgendes Verfahren führt bei sehr vielen Grenzwertbestimmungen zum Ziel:
Man muß versuchen, Zähler und Nenner so umzuformen, daß ganzzahlige Potenzen von $\left(\frac{1}{n}\right)$ entstehen. Beim Grenzübergang $(n \to \infty)$ verschwinden diese Terme und der dann verbleibende Ausdruck ist der Grenzwert.

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n(\frac{3}{n}+1)} =$ ....

Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 10

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 11

65

Haben Sie sich ein Exzerpt des Abschnitts 5.4 hergestellt und sich Notizen gemacht?

☐ Ja -------------------------------- ▷ 66

☐ Nein -------------------------------- ▷ 68

121

1. $y' = 3 \cdot 4 \cdot x^2$
2. $y' = -\frac{1}{2x^2}$
3. $y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
4. $y' = 7 \cdot a \cdot \cos(ax)$
5. $y' = -\frac{6}{2}\sin(6x)$

....

Entscheiden Sie selbst:

Alles richtig -------------------------------- ▷ 122

Fehler: Versuchen Sie die Aufgaben anhand des Lehrbuches zu lösen.

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 122

10

Gesucht: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3+n}$

Rechengang: Wir formen mit dem Ziel um, Glieder der Form $\dfrac{1}{n}$ zu erzeugen.

Im Beispiel kann dann einmal durch n gekürzt werden.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3+n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{(\frac{3}{n}+1)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{3}{n}+1}\right) = \frac{1}{0+1} = 1$$

Die folgende Aufgabe ist nach dem gleichen Schema zu lösen: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n+4} = \ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 11

66

Das ist glänzend. Sie haben ein großes Lob verdient, weil Sie eine der wichtigen Studiertechniken jetzt anwenden.

Wie heißen die folgenden Symbole?

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$dy = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$df = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 67

122

Hier sind Beispiele, bei denen die Bezeichnungen gewechselt sind. Es sind durchweg einfache Aufgaben. Im Zweifelsfall substituieren Sie, d.h. ersetzen Sie die unvertrauten Ausdrücke durch die bekannten Symbole x und y.

$u = v^2$	$u' = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$E_{kin} = \frac{m}{2}v^2$	$\frac{d}{dv}(E_{kin}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$s = \frac{g}{2}t^2$	$\frac{ds}{dt} = v = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$p = \rho\cdot h$	$\frac{dp}{dh} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$A = A_0\sin(\omega t)$	$\frac{dA}{dt} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$S = A_0\cos(\omega t)$	$\frac{ds}{dt} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 123

11

1

Andere allgemeine Glieder von Zahlenfolgen, deren Grenzwert gegen 0 geht, sind:

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Auch hier wird der Nenner für $n \to \infty$ beliebig groß und im Grenzübergang verschwindet der Term.

Allgemein: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{c^n} = 0,$ wenn $c > 1$

Was ist der Grenzwert von $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 \cdot \frac{3^n}{(3+3^n)}\right) = \dots\dots\dots\dots$

▷ 12

67

$\frac{\Delta v}{\Delta x}$ = Differenzenquotient

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = Differentialquotient

$\frac{dy}{dx}$ = Differentialquotient

dx = unabhängiges Differential

dy = abhängiges Differential

$f'(x)$ = Differentialquotient, Ableitung

df = abhängiges Differential

Mit Hilfe Ihrer Aufzeichnungen müßte es Ihnen möglich gewesen sein, diese Begriffe hinzuschreiben.

SPRINGEN SIE AUF ▷ 70

123

$$u' = 2v$$

$$\frac{d\,E_{kin}}{dv} = mv$$

$$\frac{ds}{dt} = gt$$

$$\frac{dp}{dh} = \rho$$

$$\frac{dA}{dt} = A_0\,\omega\cos(\omega t)$$

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = -A_0\,\omega\sin(\omega t)$$

▷ 124

12

2

Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{2n+n^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ich wünsche noch einen Hinweis ---------------------------------- ▷ 13

Ergebnis gefunden ---------------------------------- ▷ 15

68

Sie haben kein Exzerpt angefertigt. Vielleicht kannten Sie den Inhalt bereits gut.

Exzerpte fertigt man an, wenn man neue Sachverhalte lernen muß.

Versuchen Sie jetzt aus dem Gedächtnis, dabei sollten Sie nicht mehr in das Lehrbuch schauen, die Namen folgender Symbole zu nennen.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad dy = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$df = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---------------------------------- ▷ 69

124

Jetzt müßten Sie ohne größere Schwierigkeiten die Übungsaufgaben 5.5. im Lehrbuch Seite 131 lösen können. Erst morgen oder später.

Wichtig ist, daß Sie die Produktregel, die Quotientenregel und die Kettenregel anwenden können.

Bei den Übungsaufgaben müssen Sie jetzt selbst entscheiden, wie viele Aufgaben Sie rechnen wollen. Vielleicht lösen Sie zunächst die ungeraden Aufgaben und falls Sie dabei keine Schwierigkeiten haben, können wir annehmen, daß alles verstanden ist.

---------------------------------- ▷ 125

13

Die Aufgabe war: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-2}{2n+n^2} =$

Wir versuchen, Zähler und Nenner so umzuformen, daß dort ganzzahlige Potenzen von $\dfrac{1}{n}$ auftreten. Bei solchen Ausdrücken wird immer die höchste Potenz von n ausgeklammert. Klammern Sie n^2 in Zähler und Nenner aus. Füllen Sie die Klammern aus.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\ldots)}{n^2(\ldots)}$$

---------------------------------- ▷ 14

69

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	=	Differenzenquotient	dx	=	unabhängiges Differential
$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	=	Differentialquotient	dy	=	abhängiges Differential
$\dfrac{dy}{dx}$	=	Differentialquotient	$f'(x)$	=	Differentialquotient, Ableitung
			df	=	abhängiges Differential

Diese Begriffe müssen eingelernt werden. Sie werden immer wieder gebraucht.

---------------------------------- ▷ 70

125

Höhere Ableitungen

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 5.6 Höhere Ableitungen
Lehrbuch, Seite 125 - 126

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ---------------------------------- ▷ 126

14

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{(3-\frac{2}{n^2})}{(\frac{2}{n}+1)} =$$

....

Falls Sie Schwierigkeiten hatten, übezeugen Sie sich durch Ausmultiplizieren der Klammern von der Richtigkeit.

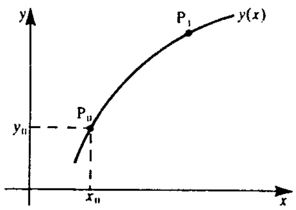
Jetzt können wir kürzen und den Grenzübergang ausführen.

$$\lim_{n\to\infty} \cdot \frac{(3-\frac{2}{n^2})}{(\frac{2}{n}+1)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Grenzwerte für Zähler und Nenner getrennt. Jeden einzelnen können Sie sicher bestimmen.

-------------------------------- ▷ 15

70



Die Ableitung einer Funktion $y(x)$ an der Stelle x_0 hat eine geometrische Bedeutung.

Suchen Sie die RICHTIGE Aussage.

Die Ableitung $y'(x_0)$ gibt die Steigung der *Sekante* durch $P_0(x_0,y_0)$ und einen Punkt P_1 der Kurve $y(x)$ an. -------------------------------- ▷ 71

Die Ableitung $y'(x_0)$ gibt die Steigung der *Tangente* an die Kurve $y(x)$ im Punkte $P_0(x_0,y_0)$ an. -------------------------------- ▷ 73

126

Hier sind Bezeichnungen gewechselt und in einem Fall ist die 2. Ableitung gesucht, im Fall b) die 4. Ableitung

a) $f(x) = \log x$ $\qquad f''(x) = \ldots\ldots\ldots$

b) $h(x) = x^5 + 2x^2$ $\qquad h^{(4)}(x) = \ldots\ldots\ldots$

c) $v(u) = u^2 \cdot e^u$ $\qquad v'(u) = \ldots\ldots\ldots$

d) $g(\varphi) = a\sin\varphi + tg\varphi$ $\qquad g'(\varphi) = \ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 127

15

3

Das Lösungsprinzip bei der Bestimmung der Grenzwerte ist immer das gleiche. Der Ausdruck ist so umzuformen, daß Ausdrücke entstehen, von denen wir wissen, daß sie beim Grenzübergang $n \to \infty$ verschwinden. Derartige Ausdrücke sind:

$\frac{1}{n}$; $\frac{1}{\sqrt{n}}$; c^{-n}; $\frac{1}{2^n}$ u.a.

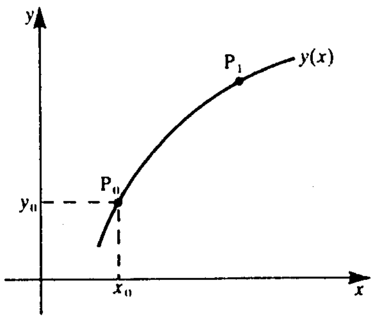
Üben Sie noch einmal:

$\lim\limits_{n\to\infty} \cdot \frac{n^2+2n+1}{5n^2+1} = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2+2^{-n}} = \ldots\ldots\ldots$

▷ 16

71

Leider falsch. Die Ableitung gibt die Steigung der *Tangente* im Punkt P_0 an.



Zeichnen Sie die *Sekante* durch P_0 und P_1 und die *Tangente* im Punkt P_0 ein.

▷ 72

127

a) $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$

b) $h^{(4)}(x) = 120x$

c) $v'(u) = e^u(2u + u^2)$

d) $g'(\varphi) = a \cdot \cos\varphi + \frac{1}{\cos^2\varphi}$

Alles richtig ▷ 128

Fehler oder Schwierigkeiten ▷ 129

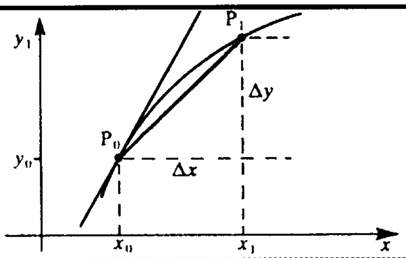
16

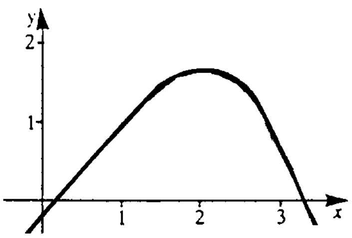
$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}$

Weitere Übungsaufgaben finden Sie auf Seite 130 im Lehrbuch. Üben Sie vor allem dann, wenn Sie hier noch Schwierigkeiten hatten. Üben Sie später bei Wiederholungen vor Klausuren und Prüfungen.

▷ 17

72





Geben Sie näherungsweise die Ableitungen für die Punkte an:

$f'(1) =$ ....

$f'(2) =$ ....

$f'(3) =$ ....

SPRINGEN SIE AUF ▷ 74

128

AUSGEZEICHNET!

SPRINGEN SIE AUF ▷ 131

17

Grenzwert einer Funktion

Stetigkeit

Wie immer gilt auch hier: Falls die Sachverhalte für Sie neu sind, gründlich studieren. Falls die Sachverhalte bereits bekannt sind, genügt eine rasche Wiederholung.

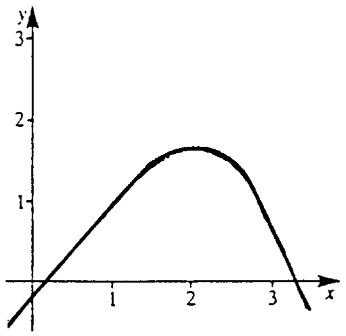
STUDIEREN SIE im Lehrbuch 5.1.3 Grenzwert einer Funktion
5.2 Stetigkeit
Lehrbuch, Seite 106-109

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ---------------------------------- ▷ 18

73

Richtig. Die Ableitung gibt die Steigung der Tangente an, die im Punkt P_0 an die Kurve $f(x)$ gelegt wird.

Geben Sie näherungsweise die Ableitungen für die einzelnen Punkte an



$f'(1) =$ ....

$f'(2) =$ ....

$f'(3) =$ ....

---------------------------------- ▷ 74

129

Die höheren Ableitungen berechnen sich wie folgt:

Gegeben sei die Funktion a) $y = \log$ Erste Ableitung $y' = \frac{1}{x}$

Zweite Ableitung: Die erste Ableitung $y' = \frac{1}{x}$ wird noch einmal nach x differenziert.

$$y''(x) = \frac{d}{dx} y'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

Das Entsprechende gilt für die Aufgabe b). Hier müssen Sie viermal nacheinander differenzieren.

$h(x) = x^5 + 2x^2$ $h'(x) = 5x^4 + 4x$ $h''(x) = 20x^3 + 4$

$h'''(x) = 60x^2$ $h^{(4)}(x) = 120x$

---------------------------------- ▷ 130

18

Der Grenzwertbegriff läßt sich von der Zahlenfolge auf die Funktion übertragen, wenn Grenzwerte betrachtet werden für $x \to \infty$.

Neu ist, daß auch Grenzwerte betrachtet werden für $x \to 0$ oder $x \to x_0$

Das bedeutet, es werden Grenzwerte für beliebige feste x-Werte berechnet. Jetzt hat es auch einen Sinn, daß unter dem Limeszeichen angegeben wird, für welches x der Grenzwert ausgerechnet werden soll.

--------------------------------- ▷ 19

74

$f'(1) = 1$

$f'(2) = 0$

$f'(3) = -2$

....

Im Lehrbuch, Seite 115 ist als Beispiel aus der Physik für eine Ableitung der Begriff der *Momentangeschwindigkeit* dargestellt. Die *Momentangeschwindigkeit* muß von der *Durchschnittsgeschwindigkeit* scharf unterschieden werden. Im täglichen Leben werden die Begriffe meist unschärfer gebraucht.

Die Anzeige auf einem Tachometer gibt die .... Geschwindigkeit an.

Wenn von Reisegeschwindigkeit gesprochen wird, ist in der Regel die Rede von der .... Geschwindigkeit.

--------------------------------- ▷ 75

130

Fertigkeiten im Differenzieren erlangt man nur durch Übung und viel Geduld. Wenn Ihnen das Lösen der Aufgaben noch Schwierigkeiten macht, ist das ein Zeichen dafür, daß Sie den Lehrstoff noch nicht hinreichend gut beherrschen. Gerade dann ist es notwendig, daß man zum Training weitere Aufgaben rechnet. Glücklicherweise werden Sie später derartige Aufgaben mit Hilfe geeigneter Programme wie Mathematica, Derive, Maple u.a. mit dem Computer lösen können.

--------------------------------- ▷ 131

19

Gegeben sei $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Gesucht sei der Grenzwert

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x^2} =$

☐ 0 --------------------------------- ▷ 20

☐ $\frac{1}{2}$ --------------------------------- ▷ 21

☐ $\frac{1}{4}$ --------------------------------- ▷ 22

75

Tachometer-Anzeige: Momentangeschwindigkeit

Reisegeschwindigkeit: Durchschnittsgeschwindigkeit

....

Newton hat für Untersuchungen von Geschwindigkeiten und Bewegungen die Differentialrechnung erfunden. Er nannte sie Fluxionsrechnung. Leibniz hat sie zur gleichen Zeit aus mathematischen Problemen heraus entwickelt.

Auf Newton geht das in der Physik übliche Symbol für die Ableitung nach der Zeit zurück: der Punkt über der Variablen $\frac{ds}{st} = \dot{s}$

Dieser Grenzübergang $dt \to 0$ ist eine der fundamentalen mathematischen Abstraktionen der Physik.

--------------------------------- ▷ 76

131

Die zusammengesetzte Funktion $y(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x^3 + 5}$ soll differenziert werden. Dazu muß die Kettenregel herangezogen werden. Geben Sie zunächst die Kettenregel an:

$y = f(g(x))$ y' = ...

--------------------------------- ▷ 132

20

Leider falsch.

Gefragt war nach dem Grenzwert der Funktion für $x \to 2$, d.h. gesucht ist der Funktionswert für $x = 2$.

Ihr Fehler liegt darin, daß Sie den Grenzwert für $x \to \infty$ berechnet haben.

Bei Grenzwerten müssen wir ab jetzt immer aufpassen, für welchen Wert von x der Grenzwert bestimmt werden soll. Dies steht unter der Abkürzung für Limes.

Rechnen Sie neu aus.

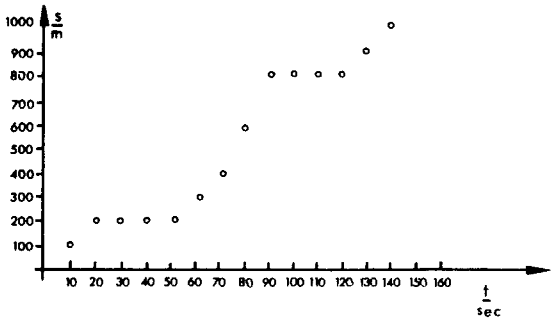
$\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x^2} =$

☐ $\frac{1}{2}$ ---------- ▷ 21

☐ $\frac{1}{4}$ ---------- ▷ 22

76

Ein Auto fahre auf einer geraden Hauptverkehrsstraße, auf der es viele Ampeln gibt. In Zeitabständen von 10 Sekunden wird der Ort des Fahrzeugs gemessen und in einer Grafik aufgetragen. Die Zeit wird auf der Abszisse, der zurückgelegte Weg auf der Ordinate abgetragen.



Das Fahrzeug hat ...... mal vor einer Ampel gestanden. Das Fahrzeug hat vor den Ampeln jeweils etwa ...... sec gestanden.

---------- ▷ 77

132

$y' = \frac{df}{dg} \cdot g'(x)$ oder $y' = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Gegeben war: $y(x) = \sqrt{2x^3 + 5}$

Setzen Sie $f(x) = \sqrt{g}$ und

$g(x) = 2x^3 + 5$

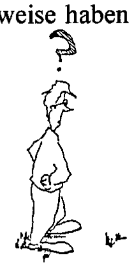
Berechnen Sie die Ableitung

y' = ...

---------- ▷ 133

21

Hier liegt ein Fehler vor, welcher ist nicht ganz klar. Möglicherweise haben Sie den Wert für $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x} \right)$ berechnet.



Gegeben ist aber die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$!

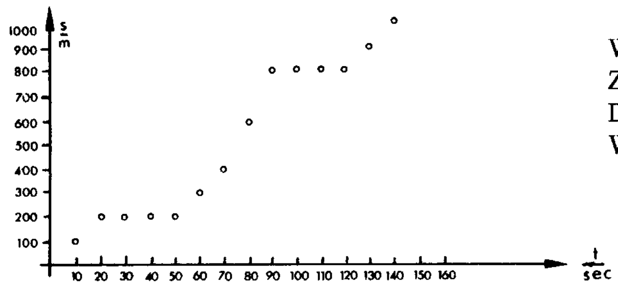
Rechnen Sie neu:

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x^2} =$ ☐ 0 zurück --------------------------------- ▷ 20

☐ $\frac{1}{4}$ --------------------------------- ▷ 22

77

Zweimal. Etwa 30 Sekunden.



Wenn das Auto steht, verfließt die Zeit, aber der Ort bleibt konstant. Die Punkte liegen dann auf der Waagrechten.

Zeichnen Sie die Wegzeitkurve ein. 100 Sekunden nach Fahrtbeginn beträgt in diesem Intervall die Durchschnittsgeschwindigkeit ....

--------------------------------- ▷ 78

133

$$y'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + 5}}$$

Alles richtig --------------------------------- ▷ 135

Anderes Ergebnis oder Schwierigkeiten --------------------------------- ▷ 134

22

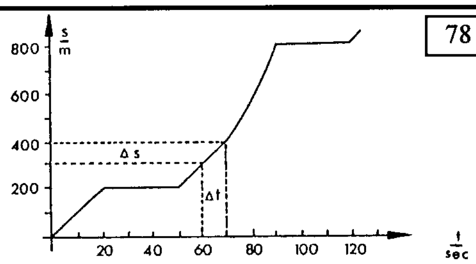
Richtig!

Es muß immer genau darauf geachtet werden, für welchen Wert von x der Grenzwert von $f(x)$ gesucht ist.

----------------------------------- ▷ 23

78

Durchschnittsgeschwindigkeit: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$



Die Ermittlung der Durchschnittsgeschwindigkeit ist geometrisch identisch mit der Ermittlung der Sekantensteigung an die Kurve. Die Ermittlung der Momentangeschwindigkeit ist geometrisch identisch mit der Ermittlung der Tangente an die Kurve. Newton fand, daß der Begriff des Differenzenquotienten nicht ausreicht, um die Momentangeschwindigkeit zu beschreiben. Er erfand, um aus diesem Dilemma herauszukommen, den *Begriff* des Differentialquotienten. Die *Namen* Differentialquotient und Differentialrechnung gehen auf Leibniz zurück. Differenzenquotient ist die Steigung der ....

Differentialquotient ist die Steigung der .... ---- ▷ 79

134

Die Funktion $y = f(g(x)) = \sqrt{2x^3 + 5}$ war zusammengesetzt aus den Funktionen: $g(x) = 2x^3 + 5$ und $f(g) = \sqrt{g}$.

Nach der Kettenregel sind die beiden Ableitungen $f' = (g) = \frac{df}{dg}$ („äußere Ableitung") und $g'(x) = \frac{dg}{dx}$ („innere Ableitung") miteinander zu multiplizieren.

Man muß diese Ableitungen bilden:

$g'(x) = \frac{d}{dx}(2x^3 + 5) = 6x^2$ und $f'(g) = \frac{df}{dg} = \frac{d}{dg}\sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}}$

Die Kettenregel war: $y' = f'(g) \cdot g'(x)$.

Nun setzen wir ein: $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot 6x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{g}}$.

Mit $g(x) = 2x^3 + 5$ erhält man $= y'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3+5}}$ ------------------------ ▷ 135

23

Berechnen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + 6x}{2x} \right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 24

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 25

79

Sekante

Tangente

....

Für Sie ist es im Abschnitt 5.4 vor allem wichtig, den Grundgedanken zu verstehen, der zur Lösung des Tangentenproblems führt.

Habe den Grundgedanken verstanden -------------------------------- ▷ 87

Habe einiges noch nicht ganz verstanden, möchte zusätzliche Erläuterungen ------- ▷ 80

135

Berechnen Sie folgende Ableitungen:

$y = (3x^2 + 2)^2$ $\qquad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y = a \sin(bx + c)$ $\qquad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y = e^{(2x^3 - 4)}$ $\qquad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 136

24

Gesucht ist $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 6x}{2x} \right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Hinweis: Bei dem Term gehen für $x \to 0$ sowohl Zähler wie Nenner gegen 0. Das ergibt einen unbestimmten Ausdruck $\dfrac{0}{0}$.

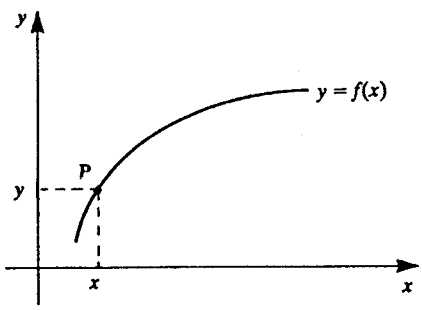
Wir müssen versuchen, den unbestimmten Ausdruck in einen bestimmten Ausdruck zu überführen. Ein Weg ist, in Zähler und Nenner x auszuklammern und dann zu kürzen. Übrig bleibt dann ein Term, dessen Grenzwert bestimmbar ist.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + 6x}{2x} \right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---------------------------------- ▷ 25

80

Die Lösung des Tangentenproblems wird noch einmal mit anderen Worten erklärt:



Das Problem ist: Die Steigung der Tangente ist für eine beliebige Kurve an einem beliebigen Punkt zu bestimmen.

Koordinaten des Punktes $P = (x, y)$

$P = (x, f(x))$

Der Wert von y ist gegeben durch x und die Funktionsgleichung.

---------------------------------- ▷ 81

136

$y' = 12x(3x^2 + 2)$

$y' = a \cdot b \cdot \cos(bx + c)$

$y' = 6x^2 \cdot e^{(2x^3 - 4)}$

Rechnen Sie später im Lehrbuch, Seite 131 die Aufgaben 5.6.

Inzwischen werden Sie das Prinzip der Übungsaufgaben und Lösungen beherrschen. Hinfort wird nicht mehr gesagt, wo die Lösungen im Lehrbuch stehen. Wir wissen, sie stehen eine oder zwei Seiten weiter.

Benutzen Sie bei Übungsaufgaben die Tabelle auf Seite 130.

---------------------------------- ▷ 137

25

3 Rechengang: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 6x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x+6)}{x \cdot 2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x+6}{2} = 3$

Alles richtig -------------------------------- ▷ 27

Ausführliche Herleitung -------------------------------- ▷ 26

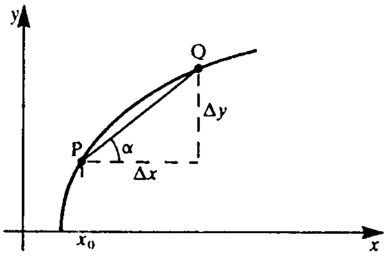
81

Wir zeichnen eine Sekante, indem wir P mit einem beliebigen Punkt Q auf der Kurve verbinden. Je nach Lage von Q gibt es unterschiedliche Sekanten.

Koordinaten von Q: $Q = (x_1, y_1)$ oder $Q = (x_1, f(y_1))$

Δx ist die Differenz der x-Koordinaten : $\Delta x = x_1 - x_0$

Δy ist die Differenz der y-Koordinaten: $\Delta y = y_1 - y_0$



Können Sie die Koordinaten von Q allein durch x_0 und Δx ausdrücken?

$Q = (\ldots\ldots\ldots , \ldots\ldots\ldots)$

-------------------------------- ▷ 82

137

Maxima und Minima

Es gibt zwei Strategien um den graphischen Verlauf einer Funktion $y = f(x)$ zu bestimmen. Das ist in Kapitel 3 besprochen.

- Man macht eine Wertetabelle. Das Verfahren ist mühselig und kostet Zeit – es sei man benutzt Computer.
- Man sucht die charakteristischen Stellen einer Kurve und erhält damit eine Übersicht über den qualitativen Verlauf des Graphen.

Maxima und Minima sind wichtige charakteristische Punkte.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 5.7 Maxima und Minima
Lehrbuch, Seite 126-129

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 138

26

Zu berechnen war: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + 6x}{2x} \right)$

Bei diesem Term streben für $x \to 0$ sowohl Zähler wie Nenner gegen 0. Der Ausdruck ist unbestimmt. Man klammert deshalb x aus und kürzt.

$$\frac{x^2 + 6x}{2x} = \frac{x(x+6)}{x \cdot 2} = \frac{x+6}{2} = \frac{x}{2} + 3$$

Da gilt: $\lim\limits_{x \to 0} = \frac{x}{2} = 0$, ergibt sich:

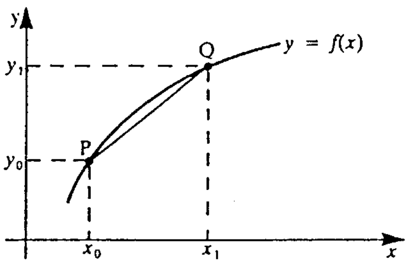
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 6x}{2x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{2} + 3 \right) = 3$$

▷ 27

82

$Q = (x_0 + \Delta x,\ f(x_0 + \Delta x))$

Jetzt drücken wir noch Δy durch x_0 und Δx aus: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Der Zähler gibt die Differenzen der y-Werte.
Der Nenner gibt die Differenzen der x-Werte. Wenn wir Q immer dichter an P heranrücken lassen, werden die Steigungen von Sekante und Tangente immer ähnlicher.

Zeichnen Sie die Tangente ein.

▷ 83

138

1. Wie nennt man die Schnittpunkte der Kurve $y(x)$ mit der x-Achse?

....

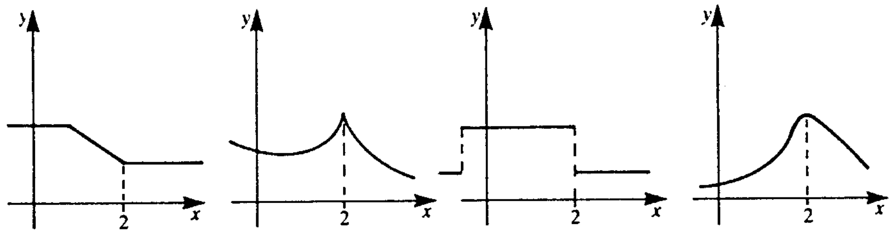
2. Wie nennt man die Stelle x_0, für deren Umgebung die Gleichung gilt $f(x) > f(x_0)$

....

▷ 139

27

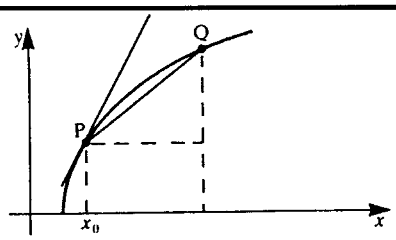
Welche der gezeichneten Funktionen ist an der Stelle $x = 2$ nicht stetig?



☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

------------------------------- ▷ 28

83



Der geometrische Übergang von der Sekante zur Tangente ist leicht zu verstehen. Für den rechnerischen Übergang müssen wir einen Grenzübergang durchführen. Dafür haben wir Grenzübergänge zu Beginn des Kapitels so oft geübt.

Im Lehrbuch ist dies auf Seite 113 gezeigt für die Funktion $y = f(x) = x^2$. Hier werden wir es zeigen für die Funktion $y = f(x) = x^2 + 2$

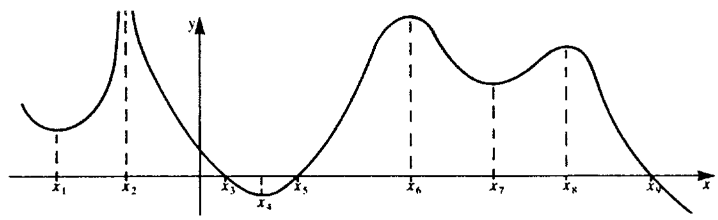
Geben Sie an: $f(x + \Delta x) =$ ....

------------------------------- ▷ 84

139

1. Nullstellen
2. Relatives Minimum

....



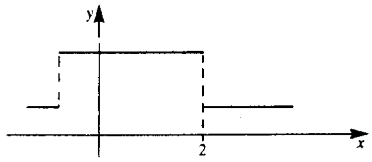
Hier ist eine komplizierte Kurve gezeichnet. Geben Sie sie x-Werte an für

Nullstellen .... relatives Maximum ....

relatives Minimum .... Polstellen ....

------------------------------- ▷ 140

28



Die Funktion C ist an der Stelle $x = 2$ unstetig.

Unstetige Funktionen „springen" an der Unstetigkeitsstelle. D.h. von rechts nähern sie sich einem anderen Grenzwert als von links.

Darf eine *stetige* Funktion einen Knick haben?

☐ Ja ☐ Nein

▷ 29

84

$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 + 2$

Hinweis: $f(x+\Delta x)$ ist der Funktionswert an der Stelle $(x+\Delta x)$. Wir können auch schreiben $y + \Delta y = f(x+\Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2$

Wenn Δx eine willkürlich gewählte Änderung des x-Wertes ist, so ist die entsprechende Änderung des y-Wertes Δy:

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

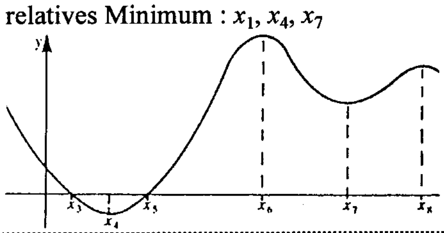
Für $f(x) = x^2 + 2$ gilt Δy = ...

▷ 85

140

Nullstellen : x_3, x_5, x_9

relatives Minimum : x_1, x_4, x_7



relatives Maximum: x_6, x_8

Polstelle : x_2

Wir unterscheiden *relative* und *absolute* Maxima und Minima. Zwischen x_3 und x_9 liegt an der Stelle x_4 ein absolutes Minimum.

Alles richtig ▷ 146

Nullstellen falsch ▷ 141

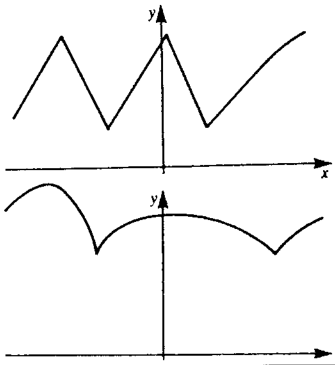
Extremwerte falsch ▷ 143

Polstelle falsch ▷ 145

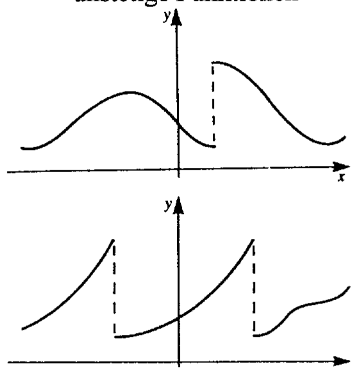
29

Ja

Beispiele für stetige Funktionen



Beispiele für unstetige Funktionen



----------------- ▷ 30

85

$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$

Nun können wir die Sekantensteigung bilden – es ist der Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

Bilden Sie nun den Diffentialquotienten, indem Sie den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durchführen.

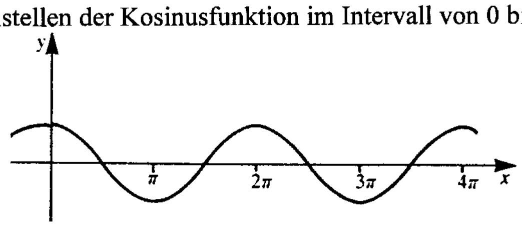
$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 86

141

Lesen Sie noch einmal die Definiton der Nullstellen im Lehrbuch Seite 61 und bestimmen Sie dabei alle Nullstellen der Kosinusfunktion im Intervall von 0 bis 4π.

$y = \cos(x)$



Nullstellen sind ....

-------------------------------- ▷ 142

30

Rechnen Sie vor einer kurzen Pause noch vier Aufgaben – vor allem zur Selbstkontrolle:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2+1}{x-1} \right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2+10x}{2x} \right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x} \right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 31

86

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Für eine Reihe von Funktionen wird dieser Grenzübergang noch durchgeführt werden. Um Δy zu gewinnen, bilden wir immer die Differenz $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Dann wird der Differenzenquotient gebildet. Und schließlich versucht man, den Differenzenquotienten so umzuformen, daß der Grenzübergang ausführbar wird.

---------------------------------- ▷ 87

142

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$

Ist der Graph gegeben, ist die Bestimmung der Nullstellen einfach: Es sind die Schnittstellen der Kurve mit der x-Achse, das kann man leicht abzählen.

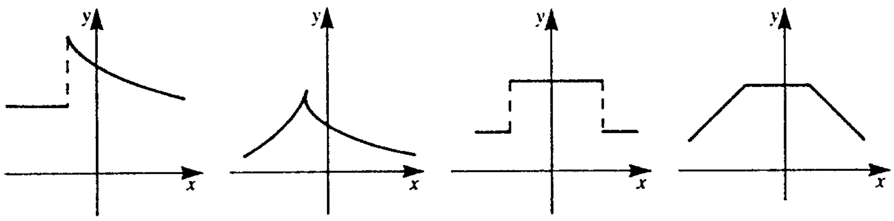
Sonst alles richtig ---------------------------------- ▷ 146
Extremwerte falsch ---------------------------------- ▷ 143
Polstellen falsch ---------------------------------- ▷ 145

31

a) -1; b) 5;

c) $\frac{1}{2}$; d) 0

Welche Funktionen sind stetig?



☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

▷ 32

87

Führen wir weitere Grenzübergänge für Differenzenquotienten aus:

Gegeben $y = 3x$

Wir bilden den Differenzenquotienten

$$\Delta y = 3(x + \Delta x) - 3x$$

$$\Delta y = 3\Delta x$$

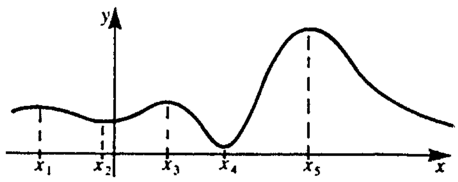
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

In diesem Fall ist der Grenzübergang einfach. $y' = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 88

143

Ist der Graph gegeben, erkennt man das *relative Maximum*. Es ist die Bergkuppe. Genauso erkennt man ein relatives Minimum, es ist der tiefste Punkt einer Talsohle. Relativ heißt ein Maximum oder Minimum deshalb, weil an einer anderen Stelle wieder Maxima oder Minima auftreten können, die sogar höhere Werte annehmen können. Ein Maximum ist nicht der absolut höchste Punkt einer Kurve, sondern ein Punkt, der gegenüber seiner Umgebung der höchste ist.

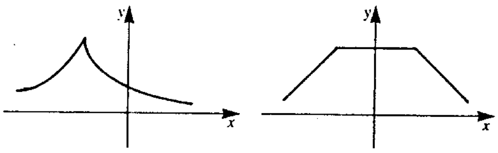


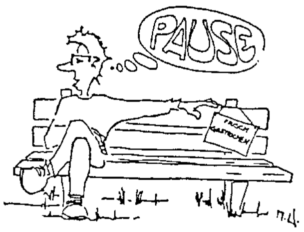
Relative Maxima ....
Relative Minima ....
Absolutes Maximum ....
Absolutes Minimum ....

▷ 144

32

Stetig sind B und D





---------------------------------- ▷ 33

88

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3 \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

Bilden Sie den Differenzenquotienten für

$$y = 2x^2 + 6$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Versuchen Sie den Grenzübergang zu bilden. $y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 89

144

Relative Maxima: x_1, x_3
Relative Minima: x_2
Absolutes Maximum: x_5
Absolutes Minimum: x_4

Sonst alles richtig ---------------------------------- ▷ 146

Polstelle falsch ---------------------------------- ▷ 145

33

Der Lernerfolg eines Lernprozesses hängt stark von der Aufmerksamkeit und der Konzentration auf den Lerngegenstand ab.

Individuell unterschiedlich wirken sich auf die Konzentration aus:

- Ermüdung
- Interesse am Lerngegenstand
- Einstellung zum Studium
- Planung des Arbeitsprozesses
- Außenstörungen

Der Einfluß dieser Faktoren auf die Konzentration liegt auf der Hand. Er kann experimentell nachgewiesen werden. Und – daher interessiert dies auch hier – die Faktoren können von Ihnen wenigstens in Grenzen verändert werden.

--------------------------------- ▷ 34

89

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x \qquad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x$$

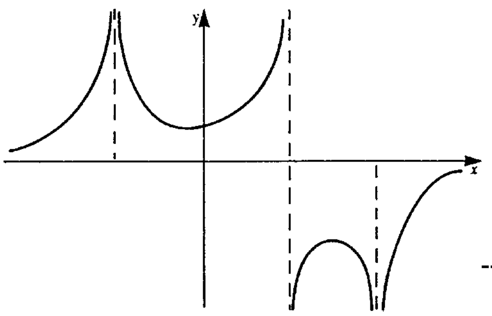
Hinweis: Um die *Differenz* des Funktionswertes zu bekommen, muß man ihn einmal für die Stelle x und dann für die Stelle $x + \Delta x$ berechnen und die Differenz bilden. Für den *Differentialquotienten* muß dann noch durch Δx geteilt werden. Anschließend wird der Grenzübergang durchgeführt. Beim Grenzübergang gehen die Differenzen gegen 0 und einige Glieder können gegenüber den verbleibenden Gliedern vernachlässigt werden. An dieser Stelle wird deutlich, wie die Überlegungen zu Grenzwerten mit der Differentialrechnung zusammenhängen.

--------------------------------- ▷ 90

145

An Polstellen geht der Funktionswert gegen ∞. Die diskutierte Funktion hatte *eine* Polstelle.

Die Funktion hier hat 3 Polstellen: An einer Polstelle geht der Funktionswert von beiden Seiten gegen ∞, an der anderen gegen $-\infty$ und an der dritten hängt es davon ab, von welcher Seite aus man sich dem Pol nähert.



------------------ ▷ 146

34

Der *Ermüdung* wirkt entgegen, nach definierten Arbeitsabschnitten begrenzte Pausen einzulegen.

Das *Interesse* am Lerngegenstand nimmt in der Regel mit den Lernfortschritten zu – und sinkt bei Mißerfolgen: Begrenzen Sie für eine Arbeitsphase die Lernaufgaben (den Abschnitt im Lehrbuch). Diesen Abschnitt dann aber auch fertig bearbeiten und sich dafür selbst auf die Schulter klopfen – oder sich eine selbst gesetzte Belohnung gönnen.

Außenstörungen werden oft als willkommene Ablenkung empfunden. Tun Sie das lieber nicht. Wer gerade konzentriert lernt, hat ein Recht, Störer freundlich aber entschieden zu verscheuchen.

---------------------------------- ▷ 35

90

Versuchen Sie, den Differentialquotienten für die Funktion $y = x^3$ zu bilden. Gehen Sie nach dem eben geübten Verfahren vor.

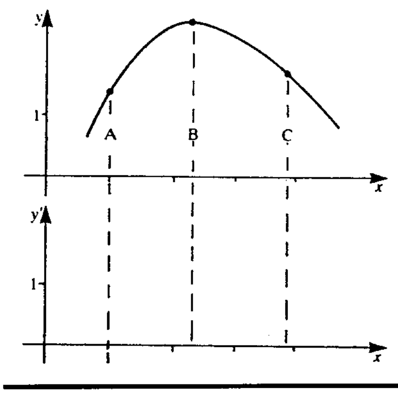
Hinweis: Wenn $\Delta x \to 0$ geht, geht auch $(\Delta x)^2 \to 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots\dots$$

---------------------------------- ▷ 91

146

Eine als Graph gegebene Kurve zu diskutieren ist einfach gegenüber der Frage, die Maxima und Minima einer Funktion durch Rechnung, also analytisch, zu bestimmen. Diese Bestimmung ist gerade eine der großen Leistungen der Differentialrechnung.



Die skizzierte Funktion hat ein Maximum. Zeichnen Sie jeweils in den Punkten A, B und C ein Stück der Tangente.

Tragen Sie in das nebenstehende Koordinatenkreuz für die Punkte A, B und C die Werte für die Steigung der Tangente ein und skizzieren Sie den Verlauf von y'.

---------------------------------- ▷ 147

35

Diese Bemerkung – kurz wie sie sind – haben folgenden Sinn:

> Die Aufnahme, die Verarbeitung und das Behalten von Lernstoff hängt stark von der Aufmerksamkeit und Konzentration ab.

Wenn Sie Störungen des Lernprozesses auf Konzentrationsschwächen zurückführen, so versuchen Sie, deren Ursachen festzustellen und sie soweit als möglich zu beeinflussen.

Häufig wirkt sich bereits eine Veränderung Ihrer Arbeitsplanung positiv aus. Kürzere Arbeitsabschnitte mit bewußt formulierten Zwischenzielen helfen Ihnen, Fortschritte zu machen, sie wahrzunehmen und sich darüber zu freuen.

-------------------------------- ▷ 36

91

Für $y = x^3$ ist $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

Hier noch zur Kontrolle der Rechengang:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3$$

$$= 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3$$

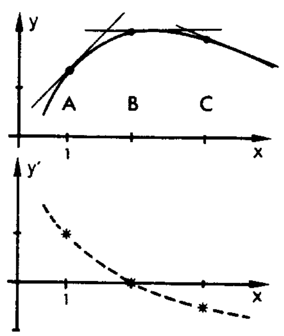
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$$

-------------------------------- ▷ 92

147

Rechts sehen Sie die Lösung.



Es kommt hier nicht so sehr auf eine maßstabgerechte Zeichnung an, sondern darauf, daß die Werte für die Steigung links von B positiv und rechts von B negativ sind.

Der Verlauf von y' zwischen den Punktwerten ist hier mitskizziert.

-------------------------------- ▷ 148

36

Reihe und Grenzwert

Geometrische Reihe

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 5.3.1 Reihe
5.3.2 Geometrische Reihe
Lehrbuch Seite 109 - 111

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt ------------------------------- ▷ 37

92

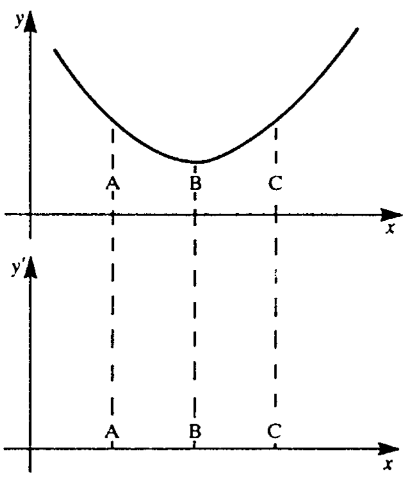
Hier noch eine Bemerkung zum Begriff *Differential*

Das Differential dy der Funktion $y = f(x)$ ist definiert als

$dy = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

------------------------------- ▷ 93

148



Führen wir dieselbe Aufgabe auch für ein Minimum durch. Zeichnen Sie an die gezeichnete Kurve in den Punkten A, B und C die Tangenten. Skizzieren Sie den Verlauf von y'.

------------------------------- ▷ 149

37

Die unendliche Reihe:

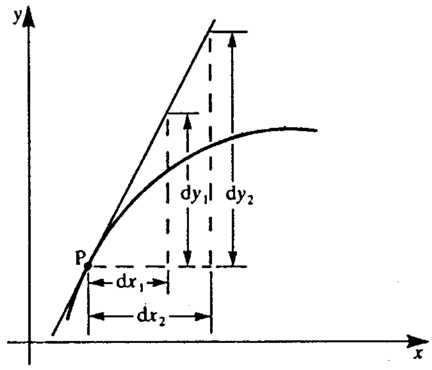
$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots\ldots\ldots$ kürzt man ab ....

Beispiel für eine allgemeine geometrische Reihe: ....

-------------------------------- ▷ 38

93

$dy = f'(x) \cdot dx$

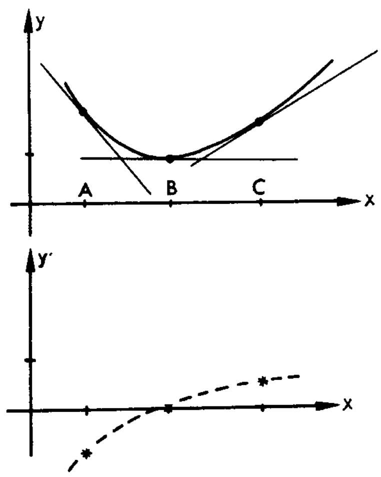


Hinweis: Die Steigung der Tangente ist durch einen Grenzübergang gewonnen und für „infinitesimal" kleine *dx* und *dy* definiert. Ist die Tangente aber erst einmal bestimmt, gilt die Steigung auch für größere *dy* und *dx*.

Wir können für jeden gewählten Wert *dx* den zugehörigen Wert *dy* der Tangente berechnen. *dx* und *dy* heißen *Differentiale*.

-------------------------------- ▷ 94

149



Die Tangenten zu zeichnen war sicher nicht schwer, die Werte der Steigung der Tangenten können nur geschätzt werden. Wichtig ist, daß die Steigung links von B negativ ist und rechts positiv.

Der Verlauf der Kurve für y' ist bei einem Minimum ein anderer. Die Kurve für y' steigt von links nach rechts an.

Beim Maximum fiel sie von links nach rechts.

-------------------------------- ▷ 150

38

Abkürzung: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ oder mit einer anderen Laufzahl: $\sum_{j=1}^{\infty} j^2$

$a + a\,q + a\,q^2 \ldots\ldots\ldots a\,q^{r-1}$ oder $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots x^n$

Gegeben sei die *Folge* der ungeraden Zahlen:

1, 3, 5, 7, ..., 19

Schreiben Sie die zugehörige *Reihe* hin.

....

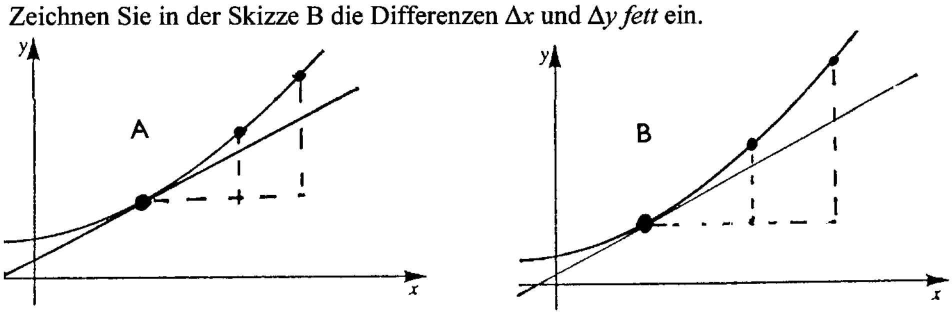
▷ 39

94

Die Begriffe *Differential* und *Differenz* muß man scharf unterscheiden. Differentiale beziehen sich auf die Tangente. Differenzen beziehen sich auf die Kurve.

Zeichnen Sie in der Skizze A die Differentiale *dx* und *dy fett* ein.

Zeichnen Sie in der Skizze B die Differenzen Δx und Δy *fett* ein.



▷ 95

150

Jetzt kennen wir die Bedingungen für die Bestimmung eines Minimums oder eines Maximums. Für beide gilt: *Tangente waagrecht.*

Mathematische Bedingung: $y' = 0$

Für ein Maximum gilt: Die Ableitungskurve fällt von links nach rechts

Mathematische Bedingung: $y'' < 0$

Für ein Minimum gilt: Die Ableitungskurve steigt von links nach rechts

Mathematische Bedingung: $y'' > 0$

▷ 151

39

1 + 3 + 5 + 7 + ... + 19 Hinweis: Die Reihe ist eine *Summe*.

Der Summenwert der Reihe sei s_r.

$s_r = 1+3+5+7+......+19$

Drücken Sie diese Reihe mit Hilfe des Summenzeichens aus!

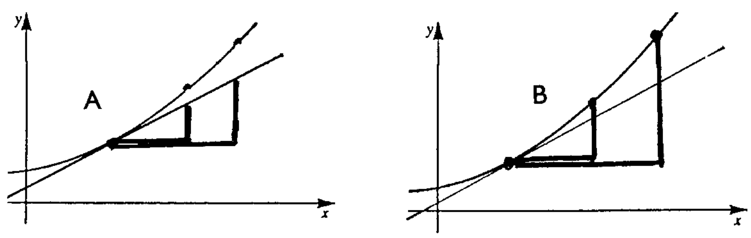
Als Laufzahl nehmen wir hier statt n einmal v.

Wir müssen lernen, mit unterschiedlichen Symbolen umzugehen.

$s_r =$ ....

▷ 40

95



Hinweis: Für die *unabhängige* Variable sind dx und Δx identisch.

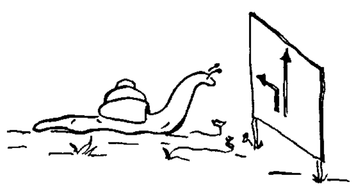
Für die *abhängige* Variable sind dy und Δy unterschiedlich.

Die Differentiale dx und dy beziehen sich auf die ....

Die Differenzen Δx und Δy beziehen sich auf die ....

▷ 96

151



Noch nicht alles verstanden ▷ 152

Beispiel gewünscht ▷ 156

40

$$s_r = \sum_{v=0}^{9}(2v+1) \qquad \text{oder} \qquad \sum_{v=1}^{10}(2v-1)$$

Alles richtig ▷ 44

Fehler oder Schwierigkeiten bei der Angabe der Grenzen ▷ 41

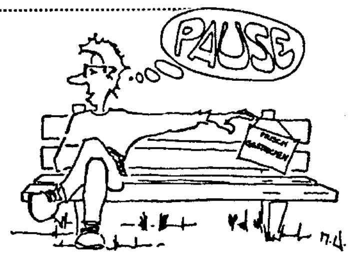
Fehler bei der Bestimmung des des allgemeinen Gliedes ▷ 43

96

Tangente

Funktion oder Kurve oder den Graph der Funktion.

Hier ist wieder einmal Zeit, wir machen eine

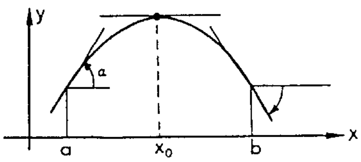


Und wie man die Pause macht, wissen wir. Wir rekapitulieren kurz den Inhalt des Abschnittes und tun dann etwas anderes,oder wir träumen nur.

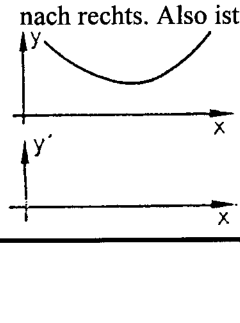
▷ 97

152

Wiederholen wir noch einmal den Gedankengang für das *Maximum*.



1. Im Punkt x_0 hat $y\ (x)$ eine waagrechte Tangente. An diesem Punkt ist die Steigung 0.
2. Im 1. Intervall $[a,\ x_0]$ ist die Steigung von $y\ (x)$ positiv. Die Tangente steigt an. In diesem Intervall ist also $y'\ (x)$ positiv.
3. Im 2. Intervall $[x_0,\ b]$ ist die Steigung der Kurve negativ. Die Tangente fällt von links nach rechts. Also ist hier $y'(x) < 0$.



Zeichnen Sie in die Abbildung den Verlauf der Kurve $y'(x)$ in der Umgebung eines relativen *Minimums* ein.

▷ 153

41

Gegeben war die Reihe 1 + 3 + 5, ... + 19

Die Reihe soll mit Hilfe des Summenzeichens geschrieben werden. Laufzahl: ν.

1. Lösung Das allgemeine Glied wird ausgedrückt durch: $a_\nu = 2\nu - 1$

für $\nu = 1$ wird $a_\nu = 1$ für $\nu = 2$ wird $a_\nu = 3$

für $\nu = 10$ wird $a_\nu = 19$

In diesem Fall läuft ν von 1 bis 10: $s_r = \sum_{\nu=1}^{10}(2\nu - 1)$

2. Lösung: Das allgemeine Glied wird ausgedrückt durch: $a_\nu = 2\nu + 1$

für $\nu = 0$ wird dann $a_\nu = 1$ für $\nu = 1$ wird $a_\nu = 3$

für $\nu = 9$ wird dann $\nu = 10$

In diesem Fall läuft ν von 0 - 9 $s_r = \sum_{\nu=0}^{9}(2\nu + 1)$ ---------------- ▷ 42

97

Praktische Berechnung des Differentialquotienten

Differentiationsregeln

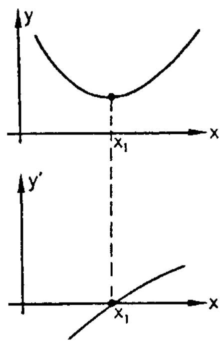
Ableitung einfacher Funktionen

Die praktische Beherrschung der Differentiationsregeln ist wichtiges Handwerkszeug für Ihr weiteres Studium und Ihren Beruf. Exzerpieren Sie und rechnen Sie die Umformungen mit – auch wenn dieser Abschnitt etwas mühselig ist. Teilen Sie sich die Arbeit in zwei oder drei Abschnitte ein.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 3.5.1 Differentiationsregeln
3.5.2 Ableitung einfacher Funktionen
Lehrbuch Seite 117 - 123

BEARBEITEN SIE danach Lehrschritt ---------------------------------- ▷ 98

153



In der Umgebung von x_1 gilt:

$y''(x_1)$ .... 0 (Setzen Sie ein: größer „ > „ oder kleiner „< „)

---------------------------------- ▷ 154

42

Geben Sie zur Übung die Grenzen an.

A) $3+7+11+\ldots\ldots+31 = \sum\limits_{\ldots\ldots}^{\ldots\ldots}(4v-1) = \sum\limits_{\ldots\ldots}^{\ldots\ldots}(4v+3)$

B) $5+5^2+5^3+\ldots\ldots+5^{11} = \sum\limits_{\ldots\ldots}^{\ldots\ldots}5v$

Hier sind die Lösungen zur Ihrer Selbstkontrolle:

A: $\sum\limits_{v=1}^{8}(4v-1) = \sum\limits_{v=0}^{7}(4v+3)$ B: $\sum\limits_{v=1}^{11}5^v$

Übung zur Bestimmung des allgemeinen Gliedes ---------------------------------- ▷ 43

Bestimmung des allgemeinen Gliedes verstanden ---------------------------------- ▷ 44

98

Im Abschnitt 5.5.1 sind folgende Regeln behandelt:

1. ....

2. ....

3. ....

4. ....

5. ....

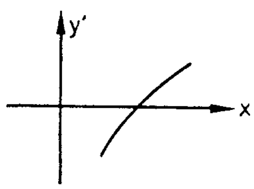
---------------------------------- ▷ 99

154

$y''(x_1) > 0$

Für die Bestimmung eines Maximums oder Minimums müssen wir zwei Dinge wissen:
1. Die Steigung ist an der Stelle des Extremwerts 0.
2. Ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt, können wir nur aus dem Verlauf der Steigung in der Umgebung schließen.

Denken Sie immer daran, bei einem *Maximum* ist die Steigung erst positiv, danach negativ.
Die Steigung nimmt ab. Ihre Ableitung ist negativ: $y'' < 0$.
Für ein *Minimum* gilt das Umgekehrte.
Rechts ist die *Steigung* einer Kurve gezeichnet.



Die Kurve hat ein ☐ Minimum
☐ Maximum

---------------------------------- ▷ 155

43

Wir betrachten das allgemeine Glied der Folge der positiven geraden Zahlen $2,4,6,8,\ldots,20$.
Diese Folge besitzt das allgemeine Glied $a_\nu = 2\nu$ (Laufzahl ν).

Nehmen wir, wie im Lehrbuch, als Laufzahl n, so erhalten wir die gleichwertige Form
$a_n = 2n$

Die Folge der positiven ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ..., 19 kann durch zwei Formen dargestellt werden: $a_\nu = 2\nu + 1$ oder $a_\nu = 2\nu - 1$

Verifizieren Sie die Richtigkeit, indem Sie Zahlen für ν einsetzen.

--------------------------------- ▷ 44

99

1. Multiplikative Konstante
2. Summenregel
3. Produktregel
4. Quotientenregel
5. Kettenregel

Konnten Sie alle Regeln aufzählen? Mit Hilfe Ihres Exzerptes müßte das auf jeden Fall möglich sein.

--------------------------------- ▷ 100

155

Minimum

--------------------------------- ▷ 156

44

Gegeben sei die folgende Reihe

$$s_r = 5\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{8}+\ldots\ldots\ldots$$
$$= 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ \ldots\ldots\ldots$$

Eine solche Reihe heißt: ....

--------------------------------- ▷ 45

100

Die Technik des Differenzierens setzt Übung voraus. Man braucht dazu zwei Dinge:

a) Kenntnis der Differenzierungsregeln,

b) Kenntnis der Ableitungen einfacher Funktionen.

Bilden Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

1. $y = 5$ $\qquad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $y = x^n$ $\qquad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $y = \dfrac{1}{x^n}$ $\qquad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $y = \sqrt{x}$ $\qquad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $y = x^{-\frac{5}{3}}$ $\qquad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 101

156

Für die Bestimmung von charakteristischen Kurvenpunkten haben wir folgende Bedingungen:

1. Nullstellen $\qquad y = 0$
2. relative Maxima $\qquad y' = 0, \quad y'' < 0$
3. relative Minima $\qquad y' = 0, \quad y'' > 0$

An welcher Stelle hat die Funktion $y = x^2 + 1$ einen Extremwert? Die Parabel kennen wir ja. Rechnen wir es formal aus:

1. $y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Gleichung auflösen

$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y' = 0 = \ldots\ldots \quad : \quad x_E = \ldots\ldots$

------------ ▷ 157

45

Geometrische Reihe

Berechnen Sie den Wert der unendlichen geometrischen Reihe unter Benutzung des Lehrbuches.

$$s = 5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$s = 5\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^v$$

$s = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 46

101

1. $y' = 0$
2. $y' = n\, x^{n-1}$
3. $y' = (-n)x^{-(n+1)} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
4. $y' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
5. $y' = \left(-\dfrac{5}{3}\right)x^{-\frac{8}{3}}$

Alles richtig ---------------------------------- ▷ 106
Fehler bei Aufgabe 1 ---------------------------------- ▷ 102
Fehler bei den Aufgaben 2-5 ---------------------------------- ▷ 103

157

$y' = 2\,x$

$y' = 0 = 2\,x$

$x_E = 0$

Handelt es sich um ein Minimum oder ein Maximum?

$y'' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

y'' …………… 0 (< oder > einsetzen)

☐ Minimum

☐ Maximum

---------------------------------- ▷ 158

46

$s = 5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 5 \cdot 2 = 10$

Haben Sie dieses Ergebnis?

Ja --------------------------------- ▷ 48

Nein --------------------------------- ▷ 47

102

Wir müssen unterscheiden zwischen der Ableitung einer additiven Konstanten und einer mulitplikativen Konstanten. Nur die Ableitung einer additiven Konstante ist 0.

Beispiele:

$y = a$	$y' = 0$
$y = a\,x$	$y' = a$
$y = c \cdot x^2$	$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$y = xc + x^2$	$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Kontrollieren Sie selbst anhand des Lehrbuches Seite 117 und 119.

☐ Fehler bei den Aufgaben 2-5 --------------------------------- ▷ 103

☐ Aufgaben 2-5 richtig --------------------------------- ▷ 106

158

$y'' = 2$
$y'' > 0$
Minimum

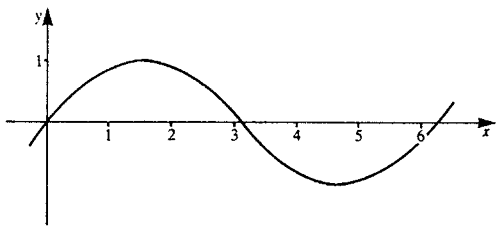
An welchen Stellen im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ hat die Funktion $y = \sin x$ Nullstellen?

....

Bilden Sie die Ableitung.
An welchen Stellen im Intervall $0 = x \leq 2\pi$ hat die Funktion $y = \sin x$

Maxima ....

Minima ....



--------------------------------- ▷ 159

47

Hier ist eine Hilfe: Gegeben sei die unendliche Reihe $a + aq + aq^2 + \cdots\cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} aq^{\nu}$

Die Reihe konvergiert für $|q| < 1$. 'Sie hat dann den Wert $s = a\dfrac{1}{1-q}$

(siehe S. 111 im Lehrbuch)

In unserem Beispiel lautete die Reihe $5 + 5\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\cdots$

Hier ist also $a = 5$ und $q = \frac{1}{2}$. Die Reihe konvergiert also und hat den Grenzwert

$$s = 5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 5 \cdot 2 = \underline{\underline{10}}$$

--------------------------------- ▷ 48

103

Bei allen Aufgaben ging es um die Ableitung einer Potenzfunktion: $y = x^r$
r kann jede beliebige rationale Zahl sein, r braucht nicht ganzzahlig zu sein.

Ableitung einer Potenz: $y = x^r \qquad y' = r \cdot x^{r-1}$

Diese Gleichung sollten Sie auswendig können. Lösen Sie jetzt:

$y = x^2 \qquad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$y = \sqrt[3]{x} \qquad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$y = x^{-2} \qquad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 104

159

Im Intervall $0 \le x \le 2\pi$: Nullstellen: $x = 0$; $x = \pi$; $x = 2\pi$

Maximum: $x = \frac{\pi}{2}$

Minimum: $x = \frac{3\pi}{2}$

Schrittweise Berechnung des Maximums:

1. Schritt $y' = \cos x$
2. Schritt $y' = 0$ für $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3\pi}{2}$
3. Schritt $y'' = -1$ für $x = \frac{\pi}{2}$: Maximum (Steigung der Ableitungsfunktion ist negativ)

   $y'' = 1$ für $x = \frac{3\pi}{2}$ Minimum (Steigung der Ableitungsfunktion ist positiv)

--------------------------------- ▷ 160

48

Im Leitprogramm werden immer zunächst die Begriffe und Operationen abgefragt und wiederholt, die im betreffenden Abschnitt des Lehrbuchs vorkamen. Kommt es dabei vor, daß Sie einen Abschnitt gelesen und auch verstanden hatten und daß Sie sich trotzdem hinterher nicht mehr an alle Begriffe erinnerten?

☐ Nein --------------------------------- ▷ 50

☐ Ja --------------------------------- ▷ 49

104

$y' = 2x$

$y' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$y' = \frac{-2}{x^3}$

....

Schreiben Sie noch den allgemeinen Ausdruck hin für die Ableitung von $y = x^n$

$y' =$ ....

--------------------------------- ▷ 105

160

Ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt, ergibt sich in der Praxis meist aus der Natur des Problems. Dann braucht man den 2. Prüfschritt nicht mehr durchzuführen. Falls man die Bedingung vergißt, man kann sie immer nachschlagen.
Wichtig ist vor allem, daß Sie die Bestimmung des Extremwertes beherrschen:
1. Schritt: Ableitung bilden
2. Schritt: Ableitung = 0 setzen. Die dann entstehende Bestimmungsgleichung ausrechnen.
In Formeln: y' bilden
$y' = 0$ setzen und entstandene Gleichung lösen.

Noch ein Beispiel: $y = x^3 + x^2$ $y' =$ ....

Extremwerte bei $x_{E1} =$ .... $x_{E2} =$

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 164

Hilfe gewünscht --------------------------------- ▷ 161

49

Das ist eine erstaunliche Fähigkeit, über die Sie verfügen. Die meisten Menschen vergessen gelegentlich. Auch das, was Sie in einer Vorlesung oder in einem Buch verstanden hatten.

Lesen Sie trotzdem ---------------------------------- ▷ 50

105

$y = x^n$

$y' = n\,x^{n-1}$

....

So, und nun weiter!

---------------------------------- ▷ 106

161

Es ist gegeben: $y = x^3 + x^2$

Es wird gesucht: Extremwerte

Für Extremwerte gilt: $y' = 0$

1. Schritt: Berechnung von y' $\quad y' = 3x^2 + 2x$

2. Schritt: $y' = 0$ $\quad 0 = 3x^2 + 2x$

Diese Gleichung ist nach x aufzulösen.

Zwischenschritt: $0 = x\,(3x + 2)$

Diese Gleichung müßten Sie nach x auflösen können.

$x_{E1} =$ ....

$x_{E2} =$ ....

---------------------------------- ▷ 162

50

Niemand kann alles behalten, was er liest. Die Geschwindigkeit, mit der Informationen ins Bewußtsein gelangen – die Psychologen nennen es Apperzeptionsgeschwindigkeit – ist 10 bis 20 mal größer, als die Geschwindigkeit mit der der Mensch Informationen im Gedächtnis einspeichern kann.

Man kann es auch so sagen: Man kann sehr viel mehr wahrnehmen, lesen, hören und verstehen als *behalten*. Versuchen Sie, eine Vorlesung, die Sie interessiert hat und die Sie verstanden haben, nachher wiederzugeben. Jeder ist immer wieder überrascht, wie wenig er behalten und wie viele Details er vergessen hat.

Das Ziel vieler Lerntechnikem ist es, mehr zu ....

--------------------------------- ▷ 51

106

Alles richtig – gut so. Nun geht es weiter mit den trigonometrischen Funktionen.

a) $y = \sin x$

$y' =$ ....

b) $y = 3 \cos x$

$y' =$ ....

c) $y = 2 \sin x + 4 \cos x$ (Summenregel)

$y' =$ ....

--------------------------------- ▷ 107

162

$x_{E1} = 0$ $x_{E2} = -\frac{2}{3}$

....

Bestimmen Sie Nullstellen und Extremwerte der Funktion: $y = -x^2 + 2x$

Nullstellen: .... Extremwerte: ....

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 166

Hilfe gewünscht für Nullstellen --------------------------------- ▷ 163

Hilfe gewünscht für Extremwerte --------------------------------- ▷ 164

51

Das Ziel vieler Lerntechniken ist es, mehr zu *behalten.*

Ein Schema im Leitprogramm werden Sie entdeckt haben. Zunächst werden neue Begriffe abgefragt. Gelegentlich werden sie danach geübt.

Beispiel: Ein neuer Begriff wird aufgeschrieben

Begründung: Was einmal geschrieben ist, wird besser behalten, als was nur gelesen wurde.

Bedeutung und Benennung eines neuen Begriffs werden oft wechselseitig abgefragt. Schließlich ist wiederholt empfohlen worden, neue Begriffe mit ihren Bedeutungen zu exzerpieren.

-------------------------------- ▷ 52

107

a) $y = \cos x$

b) $y' = -3\sin x$

c) $y' = 2\cos x - 4\sin x$

Leiten Sie ab.

a) $y = 2\sin x + x$

$y' =$ ....

b) $y = -\cos x + x^2 + 3$

$y' =$ ....

-------------------------------- ▷ 108

163

Die Nullstellen erhält man, indem man in der Funktionsgleichung y gleich Null setzt.

Beispiel: $y = -x^2 + 2x$

$0 = -x^2 + 2x$ oder $x^2 - 2x = 0$

$x\,(x-2) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

Berechnen Sie nun die Extremwerte dieser Funktion $y = -x^2 + 2x$

Extremwerte .... -------------------------------- ▷ 165

Hilfe gewünscht -------------------------------- ▷ 164

52

In der Mathematik kommt es auf das Verständnis an. Man kann aber Erläuterungen oder Texte nur verstehen, wenn man die in der Erläuterung, im Text oder in der Vorlesung gebrauchten Begriffe kennt. Mathematik und Physik sind *kohärente Lehrstoffe*, die besondere Studiertechniken erfordern. Was Kohärenz bedeutet, zeigt am besten ein Beispiel:

Im Abschnitt 5.1.4 wurde folgender Grenzwert berechnet: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Den Gedankengang kann nur verstehen, wer *Grenzwerte* und *Sinusfunktion* kennt. Den Begriff der trigonometrischen Funktion kann nur verstehen, wer weiß, was eine Funktion ist. Eine Funktion kann nur verstehen, wenn man mindestens die Grundrechenarten kennt. Die Reihe läßt sich verlängern. Die Bedeutung ist sofort klar. Man kann einen Sachverhalt nur verstehen, wenn bestimmte Voraussetzungen bekannt sind. Gegenstandsbereiche, in denen viele solcher Beziehungen und lange solcher Voraussetzungsketten bestehen, nennt man k .... Lehrstoffe.

-------------------------------- ▷ 53

108

a) $y' = 2\cos x + 1$

b) $y' = \sin x + 2x$

....

Leiten Sie ab

$y = \frac{x}{\sin x}$ (Quotientenregel)

$y' =$ ....

-------------------------------- ▷ 109

164

Gegeben $y = -x^2 + 2x$

Gesucht: Extremwerte

1. Schritt: Wir bilden ....

2. Schritt: Wir setzen $y' =$ .... $= 0$ und erhalten die Bestimmungsgleichung für x.

$0 = -2x + 2$

Auflösung nach x ergibt

$x =$ ....

-------------------------------- ▷ 165

53

Kohärente Lehrstoffe

Wer lernen will, wo Addis Abeba liegt, braucht nicht zu wissen, wo Cape Coast liegt. Wer lernen will, wo Tunis liegt, braucht nicht zu wissen, wie lang der Nil ist. Diese geographischen Daten sind nicht oder wenig kohärent.
Der Kohärenzgrad eines Lehrstoff ist nicht ohne Einfluß auf die zweckmäßigste Studiertechnik. Über grundlegendes Wissen muß man *sicher* verfügen. Sonst kann man spätere Ausführungen in Büchern, Vorlesungen und Diskussionen nicht verstehen. Hier muß man *intensiv* lernen. (In der Schule mußte der Lehrer dafür sorgen – hier im Studium müssen Sie einen Teil dieser Sorge übernehmen.)

Intensives Lernen heißt:
1. Mitdenken und Mitrechnen.
2. Nichts Unverstandenes hinnehmen.
3. Grundlegendes (Begriffe, Regeln) erkennen, zusammenfassen, exzerpieren und wiederholen.

--------------------------------- ▷ 54

109

$$\frac{\sin x - x \cdot \cos x}{(\sin x)^2}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Quotientenregel die Ableitung der Tangensfunktion:
(Beachten Sie dabei $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

y' = ...

--------------------------------- ▷ 110

165

Extremwert $x_E = 1$

Hinweis: Wir bilden die Ableitung y'. Wir setzen $y' = -2x + 2 = 0$

--------------------------------- ▷ 166

54

Im Lehrbuch sind neue Begriffe *kursiv* geschrieben. Definitionen und Regeln sind hervorgehoben. Wie lernt man nun zweckmäßig neue Begriffe und Definitionen?

Durch sorgfältiges und wiederholtes Lesen des Lehrbuchs, bis man sie kann ------- ▷ 55

Durch Exzerpieren und Wiederholen anhand der Exzerpte --------------------------- ▷ 56

110

$\frac{1}{\cos^2 x}$

Rechengang:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (\sin x \cdot (-\sin x))}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Haben Sie dasselbe Ergebnis?

Nein --------------------------------- ▷ 111
Ja --------------------------------- ▷ 113
Sie finden Lehrschritt 113 **unten auf der Seite** unterhalb der Lehrschritte 1 und 57.
BLÄTTERN SIE ZURÜCK

166

Die Funktion $y = -x^2 + 2x$ hat zwei Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

Extremwert bei $x = 1$

Hier sind noch einige Übungsaufgaben. Bestimmen Sie Nullstellen und Extremwerte. Bestimmen Sie selbst, wieviele der Übungsaufgaben Sie rechnen möchten. Wenn Sie die Sache beherrschen, nicht weiter rechnen. Dann ist es wichtiger, daß Sie in einer Woche oder in 14 Tagen noch einmal wiederholen.

$y = 2x^4 - 8x^2$ $\quad$ $y = \sin(0{,}5x)$

$y = 2 + \frac{1}{2}x^3$ $\quad$ $y = 2(\cos(\varphi + 2))$

--------------------------------- ▷ 167

55

Eine Definition oder die Erklärung eines neuen Begriffs solange zu lesen, bis man glaubt, alles zu kennen, ist verlockend aber falsch.

Die Gefahr dabei ist, daß man den Wortlaut lernt, darüber aber den Inhalt vernachlässigt.

Ein wirksameres Verfahren ist es, neue Begriffe und Definitionen zu *exzerpieren.* Exzerpieren bedeutet, Stichworte herauszuschreiben. Das sind neue Begriffe, Regeln und Definitionen mit kuurzen Erläuterungen. Dabei muß man denken und den Inhalt verarbeiten.

Exzerpieren ist aktives Lernen ---------------------------------- ▷ 57

Aktives Lernen ist wirksamer als passives Lernen. ---------------------------------- ▷ 57

Jetzt geht es weiter mit den Lehrschritten auf der **Mitte der Seiten**.

Sie finden Lehrschritt 57 unter Lehrschritt 1. BITTE BLÄTTERN SIE ZURÜCK.

111

Gegeben ist:

$y = \sin x$ $\quad y' = \cos x$

$y = \cos x$ $\quad y' = -\sin x$

Gesucht: Ableitung der Kotangensfunktion.

Quotientenregel: $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \qquad y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

$y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ Hinweis: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 112

167

Diese Übungsaufgaben stehen auch im Lehrbuch, Seite 131 Aufgabe 5.7.

Die Lösungen finden Sie ebenfalls im Lehrbuch, Seite 133.

---------------------------------- ▷ 168

56

Ja, gut. Exzerpieren ist tatsächlich die wirksamste Methode, um sich Neues einzuprägen. Exzerpieren heißt, das Wichtigste aus einem Text herausschreiben. Es sind meist die neuen Begriffe, Regeln und Definitionen sowie kurze stichwortartige Erläuterungen. Sie brauchen nur so ausführlich zu sein, daß man später die Bedeutung rekonstruieren kann. Exzerpte sind keine Stilübungen.

Exzerpieren ist *aktives* Lernen. Aktives Lernen ist wirksamer als passives Lernen.

--------------------------------- ▷ 57

112

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Der Rechengang war: $y = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$y' = \frac{(-)\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

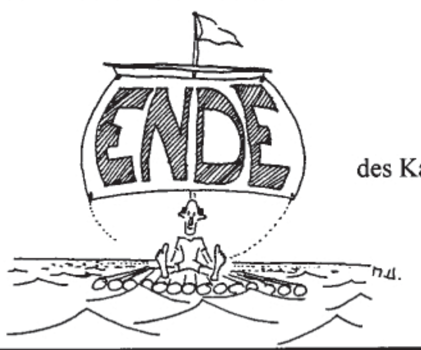
$$= \frac{(-1)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

--------------------------------- ▷ 113

168

Dieses Kapitel war lang. Wer bis hierher durchgehalten hat, wird auch die weiteren Kapitel schaffen – auch wenn man sich gelegentlich vorkommt, als ob kein Land in Sicht sei. Mit Geduld und Beharrlichkeit erreicht man aber immer das rettende Ufer.

Sie haben das



des Kapitels erreicht.