0

Kapitel 6

Integralrechnung

1

Vorbemerkung: Zur Integration führen zwei Zugänge:

1. Analytischer Zugang:

   Die Integration ist formal die Umkehroperation zur Differentiation. Bei der Differentiation wird aus der Funktion deren Ableitung berechnet. Bei der Integration wird aus der Ableitung auf die zugehörige Funktion geschlossen.

2. Geometrischer Zugang:

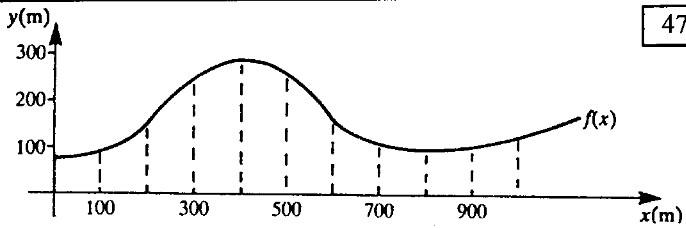
   Die Integration ist die Bestimmung der Fläche unterhalb einer gegebenen Kurve.

Beide Zugänge sind gleichwertig und mathematisch identisch. Sie werden nacheinander in den Abschnitten 6.1 und 6.2 dargestellt.

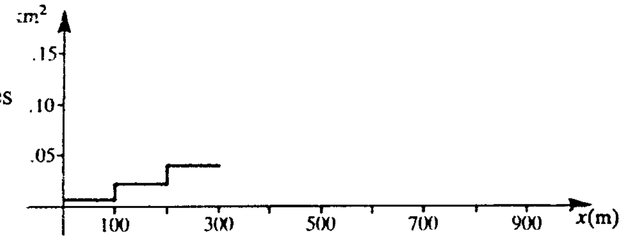
--------------------------------- ▷ 2

47

Wie verläuft die Landgewinnkurve? Hier noch eine Skizze der Halbinsel.



Vervollständigen Sie die Graphik, die die Größe des gerodeten Landes angibt.



--------------------------------- ▷ 48

93

$$\int e^{2ax}dx = \frac{1}{2a}e^{2ax} + C$$

Genug geübt --------------------------------- ▷ 95

Weitere Übung gewünscht --------------------------------- ▷ 94

2

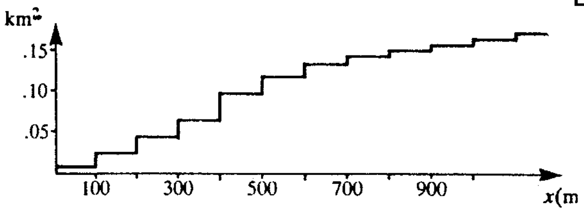
Die Stammfunktion
Grundproblem der Integralrechnung

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 6.1 Die Stammfunktion
Lehrbuch, Seite 135 - 135

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ---------------------------------- ▷ 3

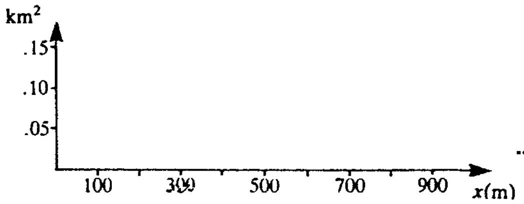
48

Jeden Tag kommt die Größe des gerodeten Flächenstreifens $F(x_i) \cdot \Delta x_i$ hinzu. Die Landgewinnkurve wächst dort am stärksten, wo die Halbinsel am breitesten ist.



Diese Angabe wird umso genauer, je kleiner die Intervalle sind, in denen die Meldungen über das neu gewonnene Gebiet eingehen (zweimal am Tag, dreimal ...)

Die Landgewinnkurve geht schließlich in die Integralkurve über. Skizzieren Sie die Integralkurve.



--- ▷ 49

94

Wenn man ein Prinzip und seine Anwendung verstanden hat, bringen weitere Übungen keinen wesentlichen Lerngewinn.

Übungen dienen vor allem der Selbstkontrolle, ob nämlich ein Verfahren, das man verstanden hat, auch aktiv angewandt werden kann.

Leider vergißt man auch. Wiederholungen wirken dem Vergessensprozeß entgegen. Wiederholen Sie nach einem oder mehreren Tagen. Dazu finden Sie Übungsaufgaben im Lehrbuch auf Seite 158. Hier sollten Sie folgende Aufgaben lösen können:

6.5 A 6.5. B und 6.5.4

---------------------------------- ▷ 95

3

Gegeben sei eine Funktion: $f(x)$

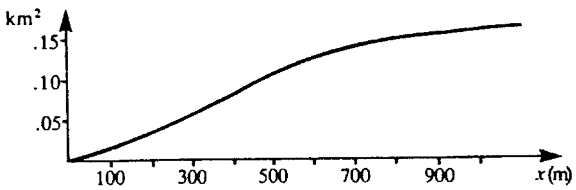
Gesucht ist ihre Stammfunktion $F(x)$

Welche Beziehung besteht zwischen beiden Funktionen:

.... = ...

--------------------------------- ▷ 4

49



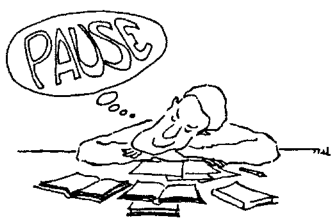
Der Übergang von der unstetigen Summenkurve zur stetigen Integralkurve ist auch hier durch einen Grenzübergang gewonnen.

In Formeln: $L(x) = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int\limits_0^x f(x)dx$

--------------------------------- ▷ 50

95

Und wieder ist es Zeit für eine



--------------------------------- ▷ 96

4

$F'(x) = f(x)$

....

Die Integration ist die Umkehroperation zur Differentiation.

Das bedeutet: Wenn man eine gegebene Funktion differenziert und die erhaltene Ableitung wieder integriert, so erhält man die ursprüngliche Funktion bis auf eine additive Konstante zurück.

Führen Sie nacheinander Differentiation und Integration an der folgenden Funktion durch

$$y = x^3$$

Differentiation $y' =$ ....

Integration $y =$ ....

-------------------------------- ▷ 5

50

Die folgenden Aufgaben können Sie ohne Rechnung lösen, wenn Ihnen der Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren klar ist.

Gegeben ist die Funktion $F(x) = \int_0^x (3x^2 + 2)\, dx$

Gesucht ist die Ableitung $F'(x)$

$\frac{d}{dx} F(x) = F'(x) =$ ....

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 52

Hinweis erwünscht -------------------------------- ▷ 51

96

Im nächsten Abschnitt wird die partielle Integration behandelt. Eingie der Grundintegrale, die in der Tabelle im Lehrbuch auf Seite 157 aufgeführt sind, sind durch die Methode der partiellen Integration gewonnen.

Entscheiden Sie jetzt selbst, wie es für Sie weitergehen soll. Hier noch eine Entscheidungshilfe.

Hatten Sie bisher große Mühe, oder ist die Integralrechnung ganz neu für Sie, so überspringen Sie den Abschnitt jetzt und studieren Sie ihn bei späterem Bedarf. - ▷ 108

Sind Ihnen die Übungen bisher gelungen und wollen Sie die neue Integrationstechnik kennenlernen, so -------------------------------- ▷ 97

5

$y' = 3x^2$

$y = x^3 + C$ Hinweis: Bei der Integration tritt eine Konstante auf.

Rechnen wir noch ein Beispiel in der üblichen Notierung. Dabei werden Stammfunktionen durch Großbuchstaben bezeichnet. Achten Sie auf die Konstante in der Stammfunktion

$$F(x) = y = x^2 + 4$$

Differentiation: $F'(x) = f(x) = y' =$ ....

Integration: $F(x) = y =$ ....

---------------------------------- ▷ 6

51

Hinweis: Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt für die Flächenfunktion $F(x) = \int\limits_0^x f(x)\,dx$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x f(x)\,dx = f(x)$$

Die Aufgabe war: Gegeben $F(x) = \int\limits_0^x (3x^2 + 2)\,dx$

Gesucht ist $\frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x (3x^2 + 2)\,dx =$ ....

---------------------------------- ▷ 52

97

Partielle Integration

Hier ist es besonders wichtig, daß Sie aktiv mitrechnen. Nur dann ist gesichert, daß man die Umformungen verstanden hat. Eine wirksame Form der Kontrolle ist, die im Text gerechneten Beispiele hinterher noch einmal selbständig zu rechnen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 6.5.5 Partielle Integration
Lehrbuch, Seite 149 - 150

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ---------------------------------- ▷ 98

6

$F'(x) = 2x$
$F(x) = x^2 + C$

Führt man Differentiation und Integration nacheinander an einer Funktion aus, erhält man die ursprüngliche Funktion bis auf eine additive Konstante zurück.

Verfolgen wir an einem anderen Beispiel noch einmal die beiden Umformungen: Wir beginnen mit der Funktion $y = \sin(2\pi x)$

Differenzieren wir, so erhalten wir $F'(x) = f(x) = 2\pi \cdot \cos(2\pi \cdot x)$

Integrieren wir, so erhalten wir $F(x) = \sin(2\pi \cdot x) + C$

Geben Sie die Stammfunktion an für $f(x) = \cos x$

$F(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 7

52

Ergebnis: $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x (3x^2 + 2)\,dx = 3x^2 + 2$

Die Notierung mag ungewohnt sein, deshalb wird sie hier ja geübt. Der Inhalt ist geläufig:

Differenzieren und Integrieren sind *Umkehroperationen* oder *inverse Operationen*. Sie heben sich auf, wenn sie unmittelbar nacheinander ausgeführt werden.

Beispiel für eine andere inverse mathematische Operation: Quadrieren – Wurzelziehen:

$+\sqrt{a^2} = a$ Entsprechend ist: $\frac{d}{dx}\int_0^x f(x)\,dx = f(x)$

--------------------------------- ▷ 53

98

Wie lautet die Formel für die partielle Integration?

$\int u\,v'dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 99

7

Für $f(x) = \cos x$ gilt $F(x) = \sin x + C$

....

Falls Sie das Ergebnis nicht hatten, überzeugen Sie sich von der Richtigkeit, indem Sie $F(x)$ differenzieren. Dann erhalten Sie $f(x)$.

Schwierigkeiten könnten mit den Bezeichnungen entstehen. Wir müssen uns merken: Die Stammfunktion wird meist mit $F(x)$ bezeichnet; die zugehörige Ausgangsfunktion mit $f(x)$.

Diese Bezeichnungsweise muß man sich einprägen. Jedenfalls werden wir sie hier immer benutzen. Es ist eine sehr gebräuchliche Bezeichnungsweise.

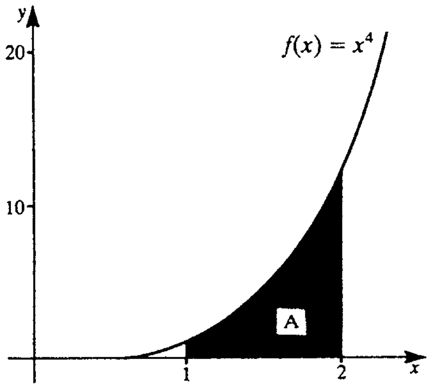
Integrieren heißt: Zu einer gegebenen Funktion die .... zu suchen.

Die gegebene Funktion ist die Ableitung der ....

-------------------------------- ▷ 8

53

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4$.



Zu berechnen sei der Inhalt A der schraffierten. Fläche. Wie würden Sie vorgehen?

- Zerlegung des Intervalls in äquidistante Teilpunkte

  $x_1 = 1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n = 2$

  Bestimmung von A als Grenzwert

  $$A = \lim_{\Delta x_i} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$ ------------------------ ▷ 54

- Sie suchen eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.

  Danach Berechnung von A gemäß:

  $A = F(2) - F(1)$ ------------------------------ ▷ 55

99

$\int v' \, u \, dx = u \, v - \int v \, u' \, dx$

Dies ist die Grundformel für die partielle Integration. Bei der Anwendung muß man das ursprüngliche Integral geschickt interpretieren. Das Beispiel im Lehrbuch war: $\int x \cdot e^x dx$

Dort wurde $x = u$ gesetzt und $e^x = v'$

Der Grund ist klar, bei der partiellen Integration entsteht dann auf der rechten Seite ein Integral, das lösbar ist.

Rechnen Sie unter diesem Gesichtspunkt noch einmal das Beispiel, wenn möglich ohne das Lehrbuch zu benutzen.

$\int x \, e^x dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 100

8

Stammfunktion
Stammfunktion

....

Entscheiden Sie selbst über den Fortgang Ihrer Arbeit:

Zusatzerläuterung zur graphischen Darstellung
des Zusammenhangs von Integral- und Differentialrechnung.-------------------------- ▷ 9

Falls Ihnen alles bekannt, so springen Sie auf -------------------------------- ▷ 14

54

Sie haben durchaus recht. Man kann die Fläche A so berechnen.

Aber dieses Verfahren ist sehr unhandlich. Man muß es dann anwenden, wenn sich eine Funktion nicht in geschlossener Form integrieren läßt.

Im übrigen berechnen Computer die Flächenfunktionen immer auf diese Weise.

Leichter ist es für Sie aber, die Stammfunktion zu $f(x) = x^4$ aufzusuchen und damit die Fläche A zu berechnen.

-------------------------------- ▷ 55

100

$$\int x\, e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

....

Grundgleichung der partiellen Integration

$$\int u\, v' dx = u\, v - \int v\, u'\, dx$$

Lösen Sie die folgende Aufgabe mit Hilfe der partiellen Integration:

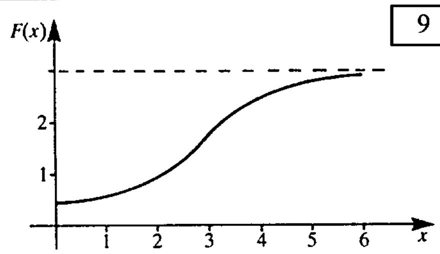
$$\int \ln x\, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hinweise erwünscht -------------------------------- ▷ 101

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 102

9

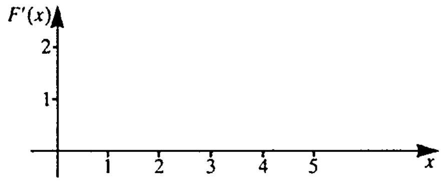
Gegeben sei eine Funktion $F(x)$



Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion F' (x), also der Ableitung, im Intervall

$0 \leq x \leq 6$

Diese Operation entspricht der Differentiation



▷ 10

55

Richtig, so geht es für uns am leichtesten.

Der Flächeninhalt $A = \int_1^2 f(x)\,dx$ läßt sich mit Hilfe einer Stammfunktion $F(x)$

von (x) wie folgt berechnen: $A = \int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1)$

Suchen Sie nun eine Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x) = x^4$ und berechnen Sie A.

Stammfunktion $F(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Flächeninhalt A = F (2) - F (1) = ...

▷ 56

101

Wir gehen aus von der Grundgleichung $\int u\,v'dx = u\,v - \int v\,u'\,dx$

Zu lösen war $\int \ln x\,dx$. Wir wählen als Ersatzfunktionen:

$\ln x = u(x)$

$1 = v'(x)$ daraus folgt $v(x) = x$

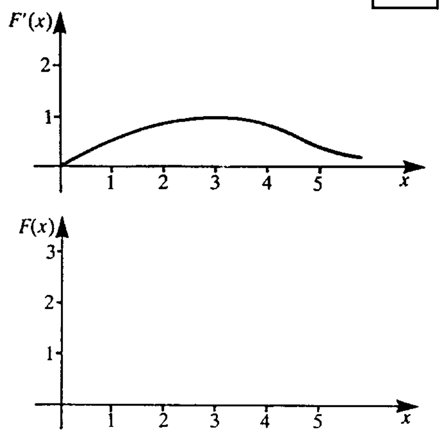
Lösen Sie nun die Aufgabe:

$\int \ln x \cdot 1 \cdot dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 102

10

Für den Verlauf von F' hatten Sie drei Anhaltspunkte: Für $x = 0$ hat die Kurve $F(x)$ eine horizontale Tangente. Steigung: $F'(0) = 0$
Für $x = 3$ ist die Steigung von $F(x)$ am größten. Steigung: $F(3) \approx 1$
Für $x > 5$ nähert sich die Kurve $F(x)$ immer mehr der Horizontalen. Steigung: $F'(10) \approx 0$
Skizzieren Sie zwei Funktionen $F(x)$ aufgrund des oben angegeben Verlaufs der Ableitung $F'(x)$. Eine Funktionskurve soll durch den Nullpunkt des Koordinatensystems gehen, eine zweite durch den Punkt (0,1). Diese Operation entspricht der Integration.



--------------------------------- ▷ 11

56

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + C$$

$$A = F(2) - F(1) = \left(\frac{32}{5} + C\right) - \left(\frac{1}{5} + C\right) = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = 6\frac{1}{5}$$

--------------------------------- ▷ 57

102

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

Ihr Ergebnis war richtig --------------------------------- ▷ 104

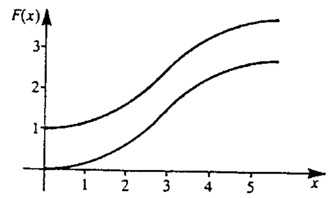
Ausführliche Herleitung erwünscht --------------------------------- ▷ 103

11

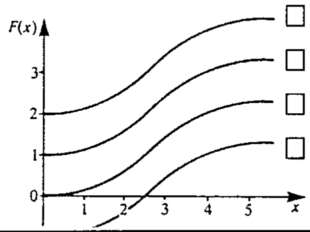
Es kommt hier nicht auf Einzelheiten der Zeichnung an. Sie muß qualitativ richtig sein. Überprüfen Sie die Merkmale.

Horizontale Tangente bei $x = 0$ und für große x

Steigung 1 bei $x = 3$



Welche der gezeichneten Kurven $F(x)$ sind ebenfalls Lösungskurven für den auf der vorhergehenden Seite gegebenen Verlauf von $F'(x)$?



☐ A

☐ B

☐ C

☐ D

--------------------------------- ▷ 12

57

Beispiele für das bestimmte Integral

In diesem Abschnitt folgen Übungen für die Berechnung bestimmter Integrale, sowie Anwendungen auf Flächenberechnungen und physikalische Probleme.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 6.4.1 Beispiele für das bestimmte Integral Lehrbuch, Seite 143 - 145

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 58

103

Grundgleichung $\int u\,v'dx = u\,v - \int v\,u'\,dx$. Zu lösen: $\int \ln x\,dx = \int \ln x \cdot 1 \cdot dx$

Wahl der Ersatzfunktionen: $\ln x = u$ dann ist $u' = \frac{1}{x}$

$1 = v'$ also $v = x$

Damit erhalten wir

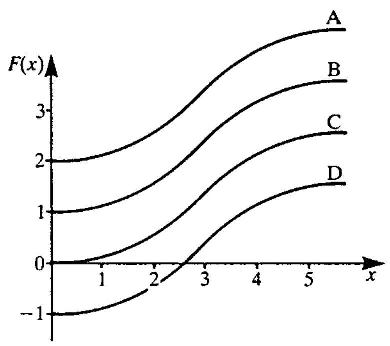
$$\int \ln x \cdot 1 dx = (\ln x)x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = (\ln x)x - \int dx = (\ln x)x - x + C$$

--------------------------------- ▷ 104

12

Alle hier gezeichneten Kurven sind Integralkurven für die gleiche Ableitungsfunktion. Sie unterscheiden sich durch eine additive Konstante.

Geben Sie die Randbedingungen der vier Kurven A, B, C, D für $x = 0$ an.



A $F(0) = \ldots\ldots\ldots$

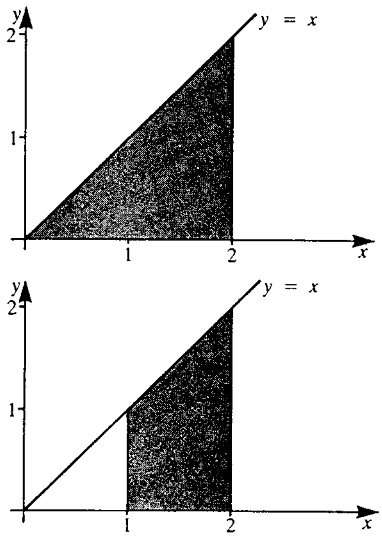
B $F(0) = \ldots\ldots\ldots$

C $F(0) = \ldots\ldots\ldots$

D $F(0) = \ldots\ldots\ldots$

▷ 13

58



Berechnen Sie die Fläche unter der Funktion $y = x$ im Intervall 0 - 2 und im Intervall 1 - 2.

$$\int_0^2 x\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_1^2 x\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ 59

104

Berechnen Sie wieder nach der Methode der partiellen Integration

$$\int x \cdot \cos x \, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

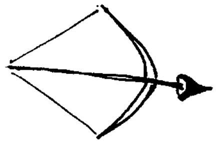
Bei Schwierigkeiten sehen Sie im Lehrbuch bei den Beispielen nach.

▷ 105

13

Kurve A $F(0) = 2$
Kurve B $F(0) = 1$
Kurve C $F(0) = 0$
Kurve D $F(0) = -1$

Mit der Angabe einer Randbedingung wird aus der Kurvenschar der Integralkurven, die sich alle durch eine additive Konstante unterscheiden, eine einzige festgelegt. Damit ist dann auch die additive Konstante festgelegt.



14

59

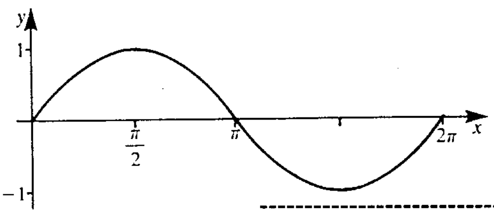
$$\int_0^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} + C\right]_0^2 = 2 - 0 = 2 \qquad \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} + C\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = 1{,}5$$

Berechnen Sie den *Absolutbetrag* der Fläche unter der Sinusfunktion für verschiedene Intervalle.

a) $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



--------------------------------- ▷ 60

105

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

Aufgabe richtig --------------------------------- ▷ 107

Ausführliche Herleitung gewünscht --------------------------------- ▷ 106

14

a) Bilden Sie die Ableitung

$y = x^3 + 5$ y' = ...

Suchen Sie die Stammfunktion

$F'(x) = f(x) = 3x^2$ F (x) = ...

b) Bilden Sie die Ableitung

y = 3x + 2 y' = ...

Suchen Sie die Stammfunktion

$F'(x) = f(x) = 3$ F (x) = ...

▷ 15

60

a) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$

b) $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$

Wenn wir den Absolutbetrag der Fläche suchen, so muß die Kurve in zwei Abschnitte aufgeteilt werden.

c) $\int\limits_0^{2\pi} \sin x \, dx = \left|\int\limits_0^{\pi} \sin x dx\right| + \left|\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\right| = |2| + |-2| = 4$

Wichtig ist es, die Grenzen einsetzen zu lernen. Theoretisch ist das nicht schwer, doch muß man es sicher im Griff haben

▷ 61

106

$\int x \cdot \cos x \, dx =$ ....

Wahl der Ersatzfunktionen

$u(x) = x$ $u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos x$ $v(x) = \sin x$

Ersatzfunktionen werden eingesetzt in die Grundgleichung $\int uv'dx = u \cdot v - \int vu'dx$

Das ergibt:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \cdot 1 \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

▷ 107

15

a) $y' = 3x^2$ b) $y' = 3$

$F(x) = x^3 + C$ $F(x) = 3x + C$ Hinweis: Bei der Angabe der Stammfunktion war es wichtig, die additive Konstante nicht zu vergessen.

Können Sie jetzt ohne Hilfe die Stammfunktionen für folgende Funktionen bilden?

a) $f_1(x) = 2x$ $F_1(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $f_2(x) = x^2$ $F_2(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Und nun ein Bezeichnungswechsel: Statt f schreiben wir g, statt x schreiben wir t.

c) $g(t) = t + 1$ $G(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 16

61

Ein Kraftfahrzeug beschleunige während des Anfahrens gleichmäßig.

Die Beschleunigung betrage $a = 2\dfrac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

Wie groß ist die Geschwindigkeit des Fahrzeugs nach 5 Sekunden?

$$v = \int_0^5 a\,dt$$

$v(5) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Wieviele Meter hat das Fahrzeug in diesen 5 Sekunden zurückgelegt?

$s = \int_0^5 v\,dt$ $s(5) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

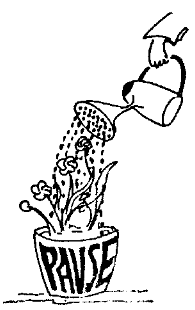
--------------------------------- ▷ 62

107

Die partielle Integration erfordert einige Aufmerksamkeit und viel Übung. Weitere Übungen finden Sie im Lehrbuch, Seite 150.

Glücklicherweise gibt es für den Praktiker aber Integraltafeln.

Kleine



--------------------------------- ▷ 108

16

a) $F_1(x) = x^2 + C$

b) $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + C$

c) $G(t) = \frac{t^2}{2} + t + C$

Hinweis: Die Konstante nicht vergessen!

Bestimmung der Konstante aus einer Randbedingung:

Gegeben sei: $f(x) = x + 1$ Stammfunktion: $F(x)$ ....

Randbedingung: Die Lösungskurve soll durch den Punkt $P = (0,1)$ gehen. Von den möglichen Lösungskurven – wir nennen sie auch Integralkurven – geht nur eine einzige durch diesen Punkt. Ihre Gleichung heißt:

$F(x) =$ .... $C =$ ....

--------------------------------- ▷ 17

62

$$v(5) = \left[\ a \cdot t\ \right]_0^5$$

$$v(5) = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$s(5) = \int_0^5 v \cdot dt = \int_0^5 a t dt = \left[\ \frac{a}{2} t^2\ \right]_0^5$$

$$s(5) = 25\ \text{m}$$

Es ist der *Absolutbetrag* der Flächen gesucht. Hier muß man wieder bei den Grenzen aufpassen.

1. $f(x) = 3\cos x$ a) $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$ b) $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(x)dx$ c) $\int_0^{\pi} f(x)dx$

2. $f(x) = x - 2$ a) $\int_{-2}^{0} f(x)dx$ b) $\int_0^{2} f(x)dx$ c) $\int_2^{4} f(x)dx$

--------------------------------- ▷ 63

108

Rechenregeln für bestimmte Integrale
Substitution bei bestimmten Integralen
Mittelwertsatz der Integralrechnung

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

6.6 Rechenregeln für bestimmte Integrale
6.7 Substitution bei bestimmten Integralen
6.8 Mittelwertsatz der Integralrechnung
Lehrbuch, Seite 150 - 153

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt

--------------------------------- ▷ 109

17

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1 \; ; \qquad C = 1$$

Alles verstanden --------------------------------- ▷ 19

Erläuterung erwünscht --------------------------------- ▷ 18

63

1) a) 3 b) 6 c) $6 = |3| + |-3|$

2) a) $6 = |-6|$, b) $2 = |-2|$, c) 2

Die Flächen unterhalb der x-Achse haben negatives Vorzeichen. Hier muß der *Absolutbetrag* genommen werden.

Weitere Übungen finden Sie auf Seite 158 des Lehrbuches. Sie müßten jetzt die Aufgaben 6.4. A, B lösen können.

--------------------------------- ▷ 64

109

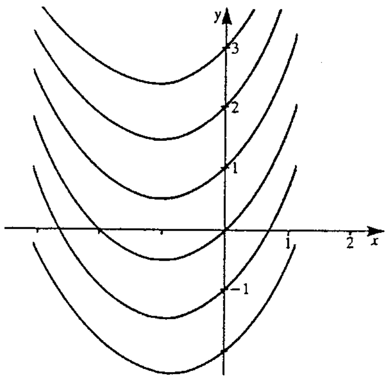
Rechnen Sie: $\int\limits_0^{1,76} x^3 dx + \int\limits_{1,76}^{2} x^3 dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 110

18

Erläuterung zur Bestimmung der Konstanten C aus der Randbedingung.

Gegeben ist die Stammfunktion mit der unbestimmten Konstanten C: $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$



Dies ist eine Parabelschar. Randbedingung: Die Kurve soll durch den Punkt P = (0,1) gehen. Wir können es auch so formulieren:

Für $x = 0$ ist $y = F(0) = 1$

1. Schritt: Zur Bestimmung von C: Wir setzen $x = 0$ und $y = 1$ in die Stammfunktion ein und erhalten: $1 = \frac{0^2}{2} + 0 + C$

2. Schritt: Die Gleichung wird nach C aufgelöst. In unserem Fall: C = 1.

-------------------------------- ▷ 19

64

Jetzt ist es aber wirklich Zeit für eine Pause. Wie war es noch mit der Einteilung der Arbeitsphasen? Wird nach dem Ende des Arbeitsabschnittes das Buch zugeklappt und die Pause angefangen?

☐ Ja

☐ Nein

-------------------------------- ▷ 65

110

$$\int_0^{1,76} x^3 dx + \int_{1,76}^{2} x^3 dx = \int_0^2 x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4$$

....

Allgemein gilt:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 111

19

Gegeben sei die Ableitung $y' = x$.

Die Integralkurve heißt $y(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

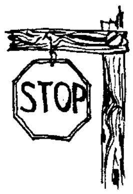
Randbedingung: Die Integralkurve soll durch den Punkt $P = (1,2)$ gehen. Bestimmen Sie die Integrationskonstante und die Lösung.

$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 20

65



Aber Nein!

Sie wissen doch, vor der Pause immer kontrollieren, ob die Begriffe und Regeln des gelesenen Abschnittes wirklich gelernt sind. Benutzen Sie dabei Ihr Exzerpt als Kontrollinstrument.

---------------------------------- ▷ 66

111

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

....

$$\int (a\tfrac{x^3}{4} + b \cdot x^2 + c)\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---------------------------------- ▷ 112

20

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + C$$
$$C = \frac{3}{2}$$
$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

Aufgabe richtig gelöst ▷ 24

Hatte Schwierigkeiten, wünsche Erläuterung ▷ 21

66

Zur Technik des Integrierens
Verifizierungsprinzip
Stammintegrale
Konstanter Faktor und Summe

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

6.5 Zur Technik des Integrierens
6.5.1 Verifizierungsprinzip
6.5.2 Stammintegrale
6.5.3 Konstanter Faktor und Summe
Lehrbuch, Seite 145 - 147

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ▷ 67

112

$$\frac{a}{16}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + c\,x$$

Gegeben sei die Funktion $F(x) = e^x$. Dann gilt: $F'(x) = f(x) = e^x$

Wie groß ist das *bestimmte Integral* $\int_0^1 e^x dx = e^x$ ▷ 113

$= e$ ▷ 114

$= 1$ ▷ 115

$= (e-1)$ ▷ 116

21

Gegeben war die Funktion $y' = x$
Gesucht war die Gleichung der Integralkurve, die durch den Punkt P (1,2) geht.

1. Schritt: Bestimmung einer Stammfunktion zu $y' = x$: $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$
   C ist noch unbekannt.
2. Schritt: Bestimmung der Integrationskonstanten C: Die Kurve $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ soll durch den Punkt P (1,2) gehen.

Folglich müssen die Koordinaten des Punktes die Kurvengleichung erfüllen. Man muß $x = 1$ und $y = 2$ in die Gleichung einsetzen: $2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + C$. Auflösen nach C: $C = \frac{3}{2}$
Damit ist C bestimmt und C wird in die Gleichung der Integralkurve eingesetzt:
$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$

-------------------------------- ▷ 22

67

Die Menge aller Stammfunktion von $f(x)$
heißt: ....
Symbol dafür: ....

-------------------------------- ▷ 68

113

Falsch, wir müssen aufpassen.

Der Wert eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)dx$ mit festen Grenzen a und b kann nur eine Zahl sein. Dieser Wert ist gleich der Differenz $F(a)$ - $F(b)$: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Sie haben aber die *Funktion* e^x als *Wert* des Integrals angegeben.
Gegeben war die Funktion $f(x) = e^x$ mit der Stammfunktion $F(x) = e^x$.

Um das Integral $\int_a^b e^x\,dx$ zu bestimmen, *müssen Sie die Grenzen einsetzen.*

$\int_0^1 e^x dx = F(1) - F(0)$ $\quad F(1) = e^1 = e$ $\quad F(0) = e^0 = 1$ also $\int_0^1 e^x dx = e - 1$ ---- ▷ 116

22

Gegeben ist $y'(x) = -\frac{3}{4}x^2$

Wie lautet die Gleichung der Integralkurve $y(x)$, die durch den Punkt P (1, -3) geht?

Bestimmung der Stammfunktion $y(x) =$ ....

1. Schritt: Einsetzen der Werte $x = 1, y = -3$.
2. Schritt: Bestimmung der Integrationskonstanten C. $C =$ ....
3. Schritt: Einsetzen von C in die Stammfunktion: $y(x) =$ ....

---------------------------------- ▷ 23

68

Unbestimmtes Integral

$\int f(x)dx$

....

Die Stammfunktion für elementare Funktionen heißen:

.... oder

....

---------------------------------- ▷ 69

114

Sie haben sicherlich einen Rechenfehler gemacht. Überprüfen Sie Ihre Rechnung!

Das bestimmte Integral $\int_0^1 e^x\,dx$ berechnet sich mit Hilfe der

Stammfunktion $F(x) = e^x$ wie folgt: $\int_0^1 e^x\,dx = F(1) - F(0)$.

Setzt man ein, erhält man: $F(1) = e^1 = e$ $\qquad F(0) = e^0 = 1$

Folglich gilt: $\int_0^1 e^x\,dx = F(1) - F(0) = e - 1$

---------------------------------- ▷ 116

23

$y(x) = -\frac{1}{4}x^3 + C;$ $C = -\frac{11}{4};$ $y = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{11}{4}$

▷ 24

69

Grundintegrale
Stammintegrale

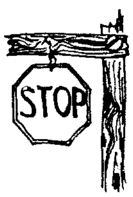
Einige Stammintegrale sollte man auswendig wissen. Können Sie die Tabelle vervollständigen?

Funktion	Stammintegral
x^n	....
$\sin x$	....
e^x	....
$\frac{1}{x}$	....

▷ 70

115

Falsch, Grenzen sind falsch eingesetzt. Noch einmal probieren.



$$\int_0^1 e^x dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ 116

24

Weitere Übungen finden Sie im Lehrbuch, Seite 158.
Lösungen stehen im Lehrbuch auf Seite 160.

▷ 25

70

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$ für $n \neq -1$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

Bestimmen Sie einige Stammintegrale, bei denen die Bezeichnungen gewechselt sind:

$\int t^2 dt =$ ....

$\int \cos\varphi \, d\varphi =$ ....

$\int e^u \, du =$ ....

▷ 71

116

$\int_0^1 e^x dx = e - 1$ ist richtig

Das Integral $\int_1^2 (3x-4)^2$ soll durch folgende Substitution gelöst werden: $t = 3x - 4$

Substitutieren Sie a) den Ausdruck $(3x - 4)$ b) dx c) die Integrationsgrenzen.

$\int_1^2 (3x-4)^2 dx = \int_1^2 t^2 dt$ ▷ 117

$= \int_1^2 t^2 \frac{1}{3} dt$ ▷ 118

$= \int_{-1}^2 t^2 \frac{1}{3} dt$ ▷ 119

25

Intensives Lesen und selektives Lesen
Wiederholen wir: *Intensives* Lesen bedeutet, einen Lehrstoff gründlich und systematisch zu erarbeiten. Techniken dafür sind:

- stichwortartige Auszüge machen, exzerpieren
- Umformungen mitrechnen; Beweise nachvollziehen;
- Wichtiges unterstreichen und markieren.

Diese Techniken sind zeitraubend, aber sie helfen zu verstehen und zu behalten, was man liest. Versuchen Sie nach einem Abschnitt intensiven Lesens immer

- das Gelesene und Erarbeitete anhand ihrer Stichworte zu rekonstruieren;
- das Wesentliche mit eigenen Worten zu formulieren und mit bereits Bekanntem in Beziehung zu setzen.

Anwendungsbereich für intensives Lesen:

- Grundlegende Texte und kohärente Lehrstoffe, die im Zusammenhang studiert werden.

-------------------------------- ▷ 26

71

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$$
$$\int \cos\varphi \, d = \sin\varphi + C$$
$$\int e^u du = e^u + C$$

....

Viele Integrale löst man bequem, indem man in Tabellen nachschlägt. Im Abschnitt 6.5.1, Seite 146, sind Integrationstafeln erwähnt.

Suchen Sie durch selektives Lesen rasch die Namen der Autoren.

Sie heißen: ....

Weiter ist eine Tabelle im Lehrbuch erwähnt, die für viele Fälle ausreicht. Sie befindet sich auf Seite ....

-------------------------------- ▷ 72

117

Sie haben noch einen Fehler gemacht: Sie haben vergessen, daß auch dx substituiert werden muß. Differenzieren Sie die Substitutionsgleichung $t = 3x - 4$ nach dx, so erhalten Sie

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(3x-4) = 3 \qquad dt = 3\,dx \qquad dx = \frac{1}{3}dt$$

Bei der Substitution ändern sich natürlich auch die Integrationsgrenzen. Die neuen Grenzen berechnet man ebenfalls aus der Substitutionsgleichung.

Mit $3x - 4 = t$ ergibt das:

$$\int_1^2 (3x-4)^2 dx = \int_1^2 t^2 \tfrac{1}{3} dt$$ -------------------------------- ▷ 118

$$= \int_{-1}^2 t^2 \tfrac{1}{3} dt$$ -------------------------------- ▷ 119

26

Nicht jedes Buch, das man liest, kann intensiv gelesen werden. Hier müssen Sie selbst beurteilen, welche Inhalte für Ihr Studium grundlegend sind. Dies setzt Überlegung, Planung und Entscheidung voraus. Dieser Mathematikkurs gehört für Physiker und Ingenieure sicher dazu. Exzerpieren muß geübt werden. Es ist unbequem, ist aber außerordentlich hilfreich.

------------------------------- ▷ 27

72

Bronstein, Semendjajew, Musiol, Muhlig: Taschenbuch der Mathematik

Stöcker: Taschenbuch mathematischer Formeln und Verfahren

Tabelle im Lehrbuch, Seite 157

....

Es ist wichtig, Tabellen benutzen zu lernen. Lösen Sie mit Hilfe der Tabelle:

$$\int \frac{1}{(x-a)^2} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{1}{1+\sin x} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

------------------------------- ▷ 73

118

Fehler bei den Integrationsgrenzen: Die neuen Grenzen lassen sich auch der Substitutionsgleichung $t = 3x - 4$ durch Einsetzen berechnen:

Alte Grenzen	Neue Grenzen
$x_1 = 1$	$t_1 = 3x_1 - 4 = 3 \cdot 1 - 4 = -1$
$x_2 = 2$	$t_2 = 3 \cdot x_2 - 4 = 3 \cdot 2 - 4 = 2$

Damit erhält man $\int_1^2 (3x-4)\,dx = \int_{\ldots}^{\ldots} \frac{1}{3} t^2 dt$

------------------------------- ▷ 119

27

Beim Exzerpieren lernen Sie aktiv, denn Sie müssen selbständig denken, um das Entscheidende zu erkennen.

Hinweis für das Mitschreiben von Vorlesungen:

- Nicht versuchen alles mitzuschreiben.

Ihre Aufzeichnungen können enthalten:

- Stichwörter, Skizzen, Gliederungen, Hinweise.

Diese Aufzeichnungen sind immer lückenhaft. Sie müssen umgehend überarbeitet und „gepflegt" werden. Dadurch werden die Aufzeichnungen auch später noch lesbar und verständlich. Diese Überarbeitung kann länger dauern als die Vorlesung selbst. Es empfiehlt sich nicht, hier Zeit zu sparen.

-------------------------------- ▷ 28

73

$\int \frac{1}{(x-a)^2} dx = -\frac{1}{x-a} + C$

$\int \frac{1}{1+\sin x} dx = \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) + C$

....

Falls Sie Schwierigkeiten hatten, hier noch ein Hinweis:

1. In der Integrationstabelle ist die Integrationskonstante weggelassen.
2. In der Tabelle steht links der Integrand und rechts davon das ausgerechnete Integral.
3. Den Umgang mit der Tabelle kann man auch so üben, daß man zunächst einen bekannten Fall aufsucht. Links oben in der Tabelle steht auf Seite 157

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	cx

Das bedeutet: $\int c\, dx = c \cdot x$

-------------------------------- ▷ 74

119

Richtig! $\int_1^2 (3x-4)^2 dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} t^2 dt$

Die Berechnung des Integrals macht nun keine Schwierigkeiten mehr.

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^{2} t^2 dt = \left[\frac{1}{9} t^3 \right]_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

Das Integral $\int_1^2 (3x-4)^2 dx$ hätte man natürlich auch ohne Substitution lösen können:

$$\int_1^2 (3x-4)^2 dx = \int_1^2 (9x^2 - 24x + 16)\, dx = \left[3x^3 - 12x^2 + 16x \right]_1^2$$
$$= 24 - 48 + 32 - (3 - 12 + 16) = 8 - 7 = 1$$

-------------------------------- ▷ 120

28

Eine neue Studiertechnik ist das *selektive Lesen.*

1. Anwendungsfall für selektives Lesen:

Gesetzt den Fall, große Teile des Inhaltes der bisherigen Kapitel seien Ihnen bekannt. In diesem Fall ist intesives Lesen *nicht* angebracht. Sie kennen den Sachverhalt bereits. Hier kommt es auf etwas anderes an: Sie müssen den Text daraufhin durchlesen, ob etwas für Sie Neues eingeführt, definiert oder abgeleitet wird. Es geht darum, aus der Menge des Vertrauten und Bekannten das Neue rasch herauszusuchen.

-------------------------------- ▷ 29

74

Nun kommen drei Aufgaben. Lösen Sie diese mit Hilfe der Tabelle im Lehrbuch, Seite 157

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{a}{x^2+a^2}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 75

120

Rechnen Sie noch drei bestimmte Integrale:

1.) $\int_0^{1/2} \sin(\pi \cdot \vartheta)\,d\vartheta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.) $\int_1^2 a \cdot v^2\,dv = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3.) $\int_0^3 e^{-\gamma t}\,dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 121

29

2. Anwendungsfall für *selektives Lesen*:

Sie suchen eine bestimmte Informaqtion in einem umfangreichen Text. Beispiel: Sie suchen die Ableitung der Funktion $y = \sin(a\,x)$.

Um diese Information rasch herauszufinden, muß der Text überflogen werden.

Eine Gefahr dabei ist, daß man von seinem eigentlichen Ziel abgelenkt wird und Unwesentliches plötzlich interessant findet und liest. Oft passiert dies beim Aufsuchen von Stichworten im Lexikon. Wem ist es nicht schon passiert, daß er im Lexikon das Stichwort *Synergie* suchte und dabei die Artikel über *Solipsismus*, *Synagoge* und *Symbol* gelesen hätte. Das Abweichen von dem zielgerichteten Suchverhalten nennt man „*Brockhauseffekt*".

Selektives Lesen als zeitsparende Studiertechnik erfordert Trennung der – im Augenblick – irrelevanten Information von der relevanten. Die irrelevante Information sollte dann praktisch nicht mehr bewußt wahrgenommen werden.

-------------------------------- ▷ 30

75

$\ln|x-a| + C$

$\tan x + C$

$\arctan\frac{x}{a} + C$

....

$\int \sin^2\varphi \, d\varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\int a^t dt = \ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 76

121

1. $\left[-\frac{\cos(\pi\vartheta)}{\pi}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\pi}$

2. $\left[av^3 \cdot \frac{1}{3}\right]_1^2 = a\frac{7}{3}$

3. $\left[-\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma}\right]_0^3 = \frac{1}{\gamma}(1-e^{-3\gamma})$

....

Weiter -------------------------------- ▷ 124

Schwierigkeiten mit den Bezeichnungen -------------------------------- ▷ 122

30

Üben wir hier einmal selektives Lesen:

Auf welcher Seite im Lehrbuch steht die Ableitung der Funktion $y = \cos(ax)$?

Seite ....

$y' =$ ....

Auf welchen Seiten des Lehrbuches wird die Eulersche Zahl e angegeben?

1. Seite ....
2. Seite ....

e hat den Zahlenwert ....

▷ 31

76

$\frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi) + C$ $\frac{a^t}{\ln a} + C$

Hier sind weitere Aufgaben mit wechselnden Bezeichnungen:

1. $\int t^2 dt =$ ....
2. $\int \frac{dz}{\cos^2 z} =$ ....
3. $\int u du =$ ....

Habe Integrale gelöst ▷ 78
Habe noch Schwierigkeiten, Hinweis auf Substitutionstechnik ▷ 77

122

Ihnen bereitet die Schreibweise der Integrationsvariablen Schwierigkeiten. Physikalische Größen werden oft mit bestimmten Buchstaben bezeichnet. Diese Buchstaben treten häufig als Integrationsvariable auf.

Wenn Ihnen solche Integrationsvariable nicht vertraut sind, können Sie diese wieder durch x ersetzen. Der Wert des Integrals ändert sich dadurch nicht.

Ersetzen Sie bei dem folgenden Integral die Integrationsvariable durch x und lösen Sie die Aufgabe:

$\int (3\sin\Omega + \cos\Omega)\, d\Omega =$ ....

▷ 123

31

Auf Seite 124, $y' = -a \cdot \sin(ax)$
Eulersche Zahl e: Seite 84, 105
e = 2,71828 .....

Die Technik beim selektiven Lesen ist der Technik beim intensiven Lesen entgegengesetzt. Es werden andere Ziele verfolgt. Beim selektiven Lesen wird aufmerksam überflogen, aber die Aufmerksamkeit ausschließlich auf bestimmte gesuchte Informationen gerichtet.
Übungen zum selektiven Lesen werden gelegentlich eingestreut werden. Für den Fall, daß Ihnen die Integralrechnung bekannt ist, versuchen Sie die nächsten Abschnitte *selektiv* zu lesen. Was Ihnen neu ist, müssen Sie *intensiv* lesen.
Beim nächsten Abschnitt wenden wir bereits mehrere Studiertechniken an.

- Einteilung in Arbeitsphasen
- Intensives Lesen oder selektives Lesen.

-------------------------------- ▷ 32

77

In der Praxis wechseln die Bezeichnungen häufig je nach dem Problem. Es hilft in diesem Fall, die vertraute Bezeichnung durch Substitution herzustellen.

Gehen Sie dann nach folgendem Schema vor:

1. Schritt: Substitution: Ersetzen Sie $t, z, u, \ldots\ldots$ durch x.
2. Schritt: Führen Sie nun die Rechenoperation aus.
3. Schritt: Rücksubstitution: Ersetzen Sie x wieder durch $t, z, u \ldots\ldots$

Lösen Sie jetzt:

1. $\int t^2 dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\int \frac{dz}{\cos^2 z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $\int u du = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 78

123

$$\int (3\sin\Omega + \cos\Omega)\,d\Omega \to \int \sin x\; dx + \int \cos x\; dx = (-3)\cdot \cos x + \sin x + C$$
$$\to -3\cos\Omega + \sin\Omega + C$$

Merken Sie sich das Handlungsschema:

1. Schritt: Substitution: Ersetzen der nicht vertrauten Integrationsvariablen durch x.
2. Schritt: Ausführung der Integration – falls nötig mit Benutzung der Integrationstafeln.
3. Schritt: Rücksubstitution, d.h. Ersatz der Variablen x durch die unvertraute ursprüngliche Variable.

-------------------------------- ▷ 124

32

Flächenproblem und bestimmtes Integral
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Bestimmtes Integral

Der nächste Arbeitsabschnitt ist länger als üblich. Teilen Sie sich selbständig die Arbeit in zwei oder drei Abschnitte ein.

Kontrollieren Sie nach dem ersten Abschnitt, ob Sie die neuen Begriffe beherrschen und den Grundgedanken mit eigenen Worten wiedergeben können. Gelingt dies nicht, nicht weiterarbeiten. Sofort wiederholen. Danach Pause machen.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 6.2 Das Flächenproblem und bestimmtes Integral
6.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
6.4 Bestimmtes Integral
Lehrbuch, Seite 136 - 143

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ▷ 33

78

$\frac{t^3}{3}+C$; $\tan z + C$; $\frac{u^2}{2}+C$

In der Tabelle im Lehrbuch – Seite 157 – steht:

$$\int \tan x \, dx = -\ln(\cos x) \quad \text{für} \quad \cos x > 0$$

Verifizieren Sie die Richtigkeit:

$$\frac{d}{dx}\{-\ln(\cos x)\} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ 79

124

Uneigentliche Integrale

Der Begriff des bestimmten Integrals wird insofern erweitert, als unendliche Integralgrenzen zugelassen werden. Ein spezielles Integral mit unendlicher Integrationsgrenze kommt in der Physik besonders häufig vor. Es ist das Integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Beispiel: Arbeit bei der Entfernung eines Körpers aus dem Gravitationsfeld der Erde.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 6.9 Uneigentliche Integrale
6.10 Arbeit im Gravitationsfeld
Lehrbuch, Seite 153 - 155

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ▷ 125

33

Der Ausdruck $\int\limits_0^b f(x)dx$ heißt ....

0 heißt ....

b heißt ....

$f(x)$ heißt ....

dx ist aus Kapitel 5 bekannt und heißt ....

Steht dx in einem Integral, heißt dx: Integrations ....

▷ 34

79

$$\frac{d}{dx}\{-\ln(\cos x)\} = -\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Hinweis: Alle Grundintegrale lassen sich auf diese Weise verifizieren.

Durch die Verifizierung ist bewiesen, daß das Grundintegral eine richtige Lösung der Integrationsaufgabe ist.

▷ 80

125

Ein Integral, bei dem mindestens eine Integrationsgrenze gegen ∞ geht, heißt ....

Ein derartiges Integral kann einen .... Wert haben.

▷ 126

34

$\int_0^b f(x)dx$ = bestimmtes Integral

0	= untere Integrationsgrenze
b	= obere Integrationsgrenze
$f(x)$	= Integrand
dx	= Differential
dx	= Integrationsdifferential

Hatten Sie Schwierigkeiten, so üben Sie, die Begriffe den Symbolen zuzuordnen.

--------------------------------- ▷ 35

80

Integration durch Substitution

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 6.5.4 Integration durch Substitution
Lehrbuch, Seite 147 - 148

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 81

126

Uneigentliches Integral
endlichen Wert

....

Für den Physiker ist besonders von Bedeutung das uneigentliche Integral $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$

$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\int_b^\infty \frac{dr}{r^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

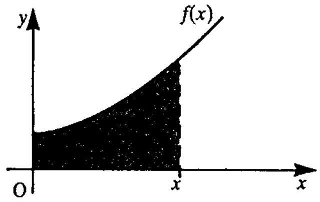
--------------------------------- ▷ 127

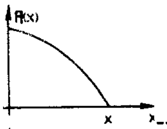
35

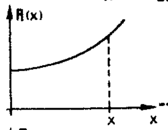
Die schraffierte Fläche unten ist von $f(x)$ begrenzt. Die Flächenfunktion $F(x)$ gebe an, welche Fläche unter der Kurve $f(x)$ zwischen 0 und x liegt.

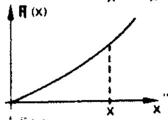
Welche Skizze zeigt die Flächenfunktion

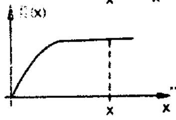
$$A(x) = \int_0^x f(x)dx$$




▷ 36


▷ 38


▷ 39


▷ 40

81

Lösen Sie – ohne das Lehrbuch zu benutzen – das dort durchgeführte Beispiel noch einmal durch die Substitutionsmethode.

$$\int \sin(5x)\, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lösung gefunden ▷ 84

Habe noch Schwierigkeiten mit dem Verfahren ▷ 82

127

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} \qquad \int_b^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{b}$$

Welchen Wert hat das folgende uneigentliche Integral: $\int_2^\infty \frac{1}{x} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösung gefunden ▷ 130

Hilfe und Erläuterung erwünscht ▷ 128

36

Leider falsch!

Die Flächenfunktion $A(x)$ muß mehrere Bedingungen erfüllen:

1. Die Kurve muß durch den Koordinatenursprung gehen, $A(0) = 0$.
   Begründung: Die untere Integrationsgrenze ist 0. Falls die obere Integrationsgrenze x mit der unteren zusammenfällt, ist die Fläche unter der Kurve auf einen Strich zusammengeschrumpft, also von der Größe 0.
2. Außerdem muß die Funktion $A(x)$ monoton steigend sein. Mit wachsendem x wachsen auch die Funktionswerte $A(x)$, die Fläche unterhalb der Kurve $f(x)$ wird umso größer, je weiter die rechte Intervallgrenze x nach rechts wandert.

--------------------------------- ▷ 37

82

Zu ermitteln ist $\int \sin(5x)\, dx$.

Hier ist der Rechengang – wie im Lehrbuch: Wir substituieren die Funktion $(5x)$ durch eine Hilfsfunktion u.

1. Schritt: Wahl der Hilfsfunktion $5x = u$

2. Schritt: Substitution a) der Funktion: $\int \ldots\ldots\, dx$

b) des Differentials $dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Damit wird das Integral zu $\int \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 83

128

1. Schritt: Das Integral wird als bestimmtes Integral aufgefaßt und gelöst: $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \Big[\ln x \Big]_a^b$

2. Schritt: Einsetzen der Grenzen und Grenzübergang

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \Big[\ln x \Big]_2^b = \lim_{b\to\infty} [\ln b - \ln 2]$$

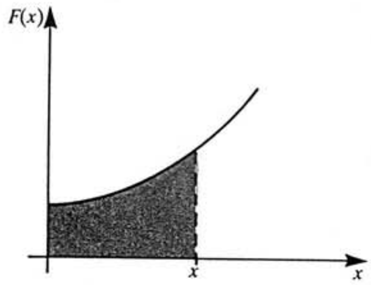
Konvergiert der Ausdruck $\ln b$ für $b \to \infty$ gegen einen festen endlichen Wert?

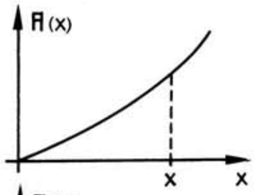
☐ Ja --------------------------------- ▷ 129

☐ Nein --------------------------------- ▷ 130

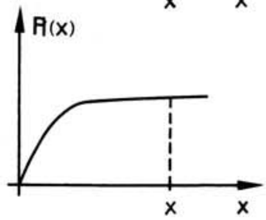
37

Entscheiden Sie nun noch einmal, wie die Flächenfunktion aussehen muß.





--------▷ 39



--------▷ 40

83

1. Schritt: $5x = u$

2. Schritt: $\int \sin u \cdot dx \qquad dx = \frac{du}{5}$

$$\int \sin u \cdot \frac{du}{5}$$

Jetzt folgt der 3. Schritt, die Integration $\int \sin u \cdot \frac{du}{5} = -\frac{1}{5}\cos u + C$

Und schließlich folgt die Rücksubstitution gemäß $u = 5x$

$\int \sin(5x)\, dx =$ ....

--------------------------------▷ 84

129

Nein, Nein!

Für $b \to \infty$ wächst $\ln b$ über alle Grenzen. Abgekürzt: $\ln \infty = \infty$

Dieses unbestimmte Integral konvergiert *nicht* gegen einen festen endlichen Wert

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x} = \Big[\ \ln x\ \Big]_2^\infty = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------▷ 130

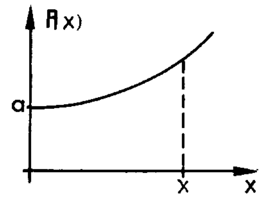
38

Leider falsch!

Die Flächenfunktion muß durch den Koordinatenanfangspunkt gehen.

Wenn nämlich linke und rechte Integrationsgenze zusammenfallen, ist die Fläche unter der Kurve auf einen Strich zusammengeschrumpft, also von der Größe 0.

Folglich gilt: $A\,(0) = 0$. Hier aber ist $A\,(0) = a$.



BLÄTTERN SIE ZURÜCK ▷ 37

84

$\int \sin(5x)\,dx = -\frac{1}{5}\cos(5x) + C$

Lösen Sie folgende Aufgaben entweder durch Substituieren oder Erraten einer Lösung und Verifikation.

$\int \sin(4\pi x)\,dx$ = ...

$\int \cos(ax)\,dx$ = ...

$\int 4\sin(4t)\,dt$ = ...

▷ 85

130

$\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$

Hier sind noch Übungsaufgaben. Üben Sie je nach Bedarf. Es handelt sich um bereits prinzipiell gelöste Aufgaben mit neuen Grenzen und neuen Bezeichnungen.

1. $\int_4^\infty \frac{d\rho}{\rho^2}$ = ...
2. $\int_{10}^\infty \frac{dx}{x}$ = ...
3. $\gamma\int_{r_0}^\infty \frac{dr}{r^2}$ = ...
4. $\int_1^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}$ = ...

▷ 131

39

Richtig!

Es muß gelten: $A\,(0) = 0$ und außerdem müssen die Funktionswerte $A\,(x)$ mit wachsendem x stets zunehmen.

SPRINGEN SIE AUF ▷ 41

85

$$\int \sin(4\pi x)\,dx = \frac{-1}{4\pi}\cos(4\pi x) + C$$

$$\int \cos\ (ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$\int 4\sin(4t)\,dt = -\cos(4t) + C$$

Alles richtig ▷ 88

Wünsche Hilfe und Übung ▷ 86

131

1. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{1}{4}$

2. $\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$

3. $\gamma \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = +\gamma \cdot \frac{1}{r_0}$

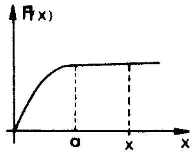
4. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} = \infty$

Keine Schwierigkeiten ▷ 133

Falls noch Schwierigkeiten ▷ 132

40

Leider nicht ganz richtig. Richtig ist, daß $A(x)$ durch den Nullpunkt geht.

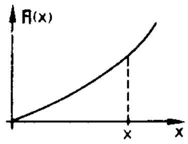


Die Funktion $A(x)$ muß monoton steigend sein. Mit wachsendem x wachsen auch die Funktionswerte $A(x)$, da die Fläche unterhalb der Kurve $f(x)$ umso größer wird, je weiter die rechte Intervallgrenze x nach rechts wandert.

Die gezeichnete Funktion $A(x)$ ist

aber ab der Stelle a konstant!

Richtig ist:



-------------------------------- ▷ 41

86

Für das Berechnen solcher Integrale gibt es zwei verschiedene Lösungswege: Verifizierung – also probieren – oder Substitution.

a) Wir erläutern zunächst die *Verifizierung* an der Aufgabe $\int \sin(4\pi x)\,dx$

Wir probieren eine Stammfunktion $F(x)$ Ansatz: $F(x) = \cos(4\pi x)$

$F'(x) = -4\pi \sin(4\pi x)$

Statt $\sin(4\pi x)$ haben wir erhalten: $-4\pi x \sin(4\pi x)$. Der Unterschied zwischen diesen beiden Funktion besteht im Faktor (-4π).

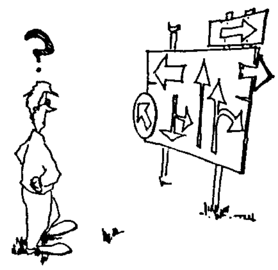
Neuer Ansatz: $F(x) = \frac{1}{-4\pi}\cos(4\pi x)$

$F'(x) = \frac{-4\pi}{-4\pi}\sin(4\pi x) = \sin(4\pi x)$

Somit haben wir die Lösung: $\int \sin(4\pi x)\,dx = F(x) + C = \frac{1}{-4\pi}\cos(4\pi x) + C$

-------------------------------- ▷ 87

132



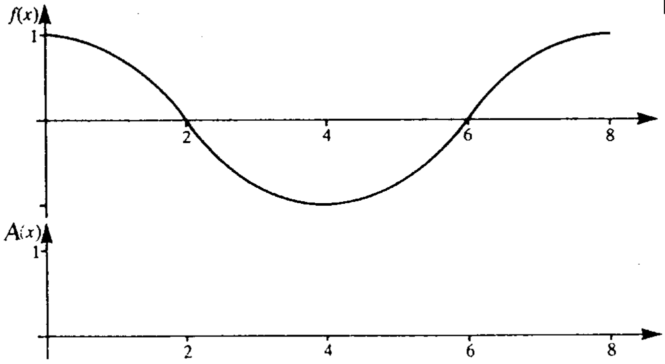
Im Augenblick gibt es für Sie nur zwei Möglichkeiten:

Kommilitonen oder Dozenten fragen und sich die Sache noch einmal erklären lassen und danach weitergehen --------------------------- ▷ 133

Noch einmal das Leitprogramm ab Lehrschritt 124 bearbeiten ------------------------ ▷ 124

41

Skizzieren Sie die Flächenfunktion zu $f(x)$!



Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 44

Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 42

87

b) Substitution. Die Berechnung nach der Substitutionsmethode erfolgt in 4 Schritten:

1. Schritt: Wahl einer Hilfsfunktion: $u = 4\pi x$

2. Schritt: a) Substitution der Funktion: $\sin 4\pi x = \sin u$

b) Substitution des Differentials dx: $\frac{du}{dx} = 4\pi \qquad dx = \frac{1}{4\pi} du$

3. Schritt: Integration $\int \sin(4\pi x)\,dx = \int \sin u \frac{1}{4\pi} du = \frac{-1}{4\pi} \cos u + C =$

4. Schritt: Rücksubstitution $\int \sin(4\pi x)\,dx = \frac{-1}{4\pi} \cos u + C = \frac{-1}{4\pi} \cos\ (4\pi x) + C$

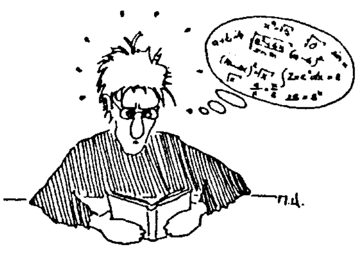
--------------------------------- ▷ 88

133

Üben Sie nach Bedarf Aufgaben im Lehrbuch – Seite 159 – Gruppe 6.9.

Sie wissen doch:

- Wenn Aufgaben leicht fallen: Übung unnötig.
- Wenn Aufgaben schwer fallen: Übung nötig.



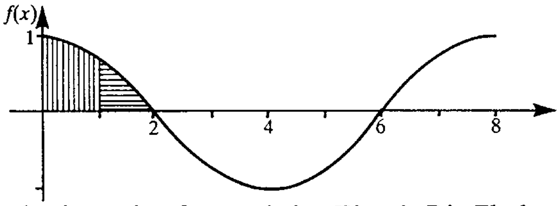
Man kann es auch pseudogelehrt sagen:

„Die Übungsnotwendigkeit verhält sich umgekehrt proportional zum Übungslustwert.“

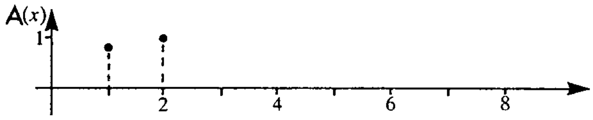
--------------------------------- ▷ 134

42

Gegeben ist $f(x)$. Gesucht ist die Flächenfunktion $A(x)$.Beachten Sie, daß die Fläche, die unterhalb der x-Achse liegt, negativ gezählt wird. Wir teilen die Kurve in grobe Intervalle ein.



Die Flächenkurve hat für $x = 0$ den Wert 0. Die Fläche des 1. Intervalls ist etwas kleiner als 1. Die Fläche des 2. Intervalls ist etwa 0,5. Vervollständigen Sie die Kurve, indem Sie die Flächen – Intervall für Intervall addieren – oder subtrahieren.



---------------- ▷ 43

88

Sehr schön!

Lösen Sie folgende Aufgaben:

1.) $\int (4\sin 3x + 2\cos\frac{1}{2}x)\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.) $\int \sqrt{3x+1}\cdot dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 89

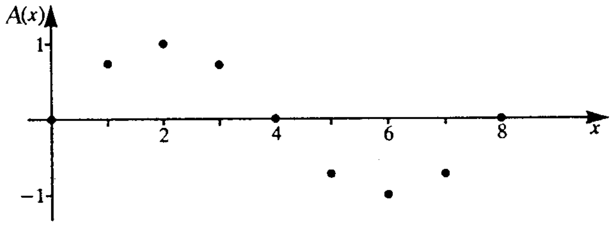
134

In den letzten Kapiteln sind drei Studiertechniken besprochen worden.
Worum handelt es sich noch?
Schreiben Sie es in Stichworten hin.

1.: ....
2.: ....
3.: ....

-------------------------------- ▷ 135

43



Durch die gewonnenen Kurvenpunkte läßt sich die Kurve zeichnen.
Verbinden Sie die Kurve und zeichnen Sie jetzt die Flächenfunktion.

▷ 44

89

1.) $\int (4\sin 3x + 2\cos\frac{1}{2}x)\,dx = -\frac{4}{3}\cos 3x + 4\sin\frac{1}{2}x + C$

2.) $\int \sqrt{3x+1}\cdot dx = \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

Alles richtig ▷ 92

Ausführliche Lösung der Aufgaben ▷ 90

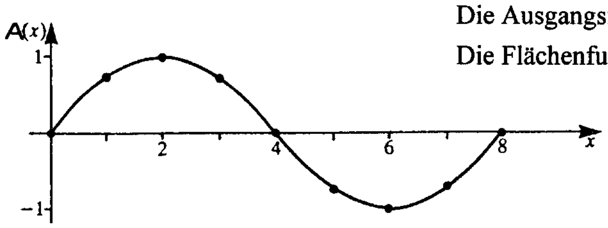
135

1. Einteilung von Arbeit und Pausen, Einhaltung von Terminen.
2. Intensives Lesen
   Exzerpieren neuer Begriffe, Regeln und Definitionen; im Falle mathematischer Ableitungen mitrechnen.
3. Selektives Lesen
   Rasches Aufsuchen neuer Informationen, Überfliegen größerer Textabschnitte mit dem Ziel, bestimmte Informationen zu suchen.

Vermutlich werden Sie es mit eigenen Worten gesagt haben, sinngemäß sollten Sie die drei Studiertechniken jetzt aber kennen. Es genügt allerdings nicht, die Studiertechniken zu kennen, man muß sie auch *anwenden.*

▷ 136

44



Die Ausgangsfunktion war die *Kosinusfunktion.*
Die Flächenfunktion ist die *Sinusfunktion.*

Können Sie die Gleichung hinschreiben?
Hinweis: Achten Sie auf die Periode. Der Wert des Arguments beim Abschluß der vollen Periode ist 2π.

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 45

90

1. Aufgabe: $\int (4\sin(3x) + 2\cos\frac{1}{2}x)\, dx = 4\int \sin(3x)\, dx + 2\int \cos\frac{1}{2}x\, dx$

Die beiden Integrale werden nacheinander gelöst. Wir beginnen mit dem ersten Integral und substituieren: $3x = u$ und $3\,dx = du$

$4\int \sin 3x\, dx = 4\int \sin u \frac{du}{3} = \frac{4}{3}(-\cos u) = \frac{4}{3}(-\cos 3x)$

Zweites Integral; Substitution: $\frac{1}{2}x = v$; $\frac{1}{2}dx = dv$

$2\int \cos\frac{1}{2}x\, dx = 2\int \cos v \cdot 2dv = 4\int \cos v\, dv = 4\sin v = 4\sin\frac{1}{2}x$

Zusammengenommen:

$4\int \sin 3x\, dx + 2\int \cos\frac{1}{2}x\, dx = -\frac{4}{3}\cos 3x + 4\sin\frac{1}{2}x + C$

▷ 91

136

Wichtig ist, nach Schluß einer Arbeitsphase das Gelernte kurz zu rekapitulieren.
Was Sie jetzt nicht aktiv reproduzieren können, können Sie später erst recht nicht reproduzieren und anwenden.

Um welche Begriffe, Operationen und Stichworte ging es in diesem Kapitel?

▷ 137

45

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$$

Entscheiden Sie, bitte, selbst:

Wünsche eine anschauliche Erläuterung des Zusammenhangs zwischen Flächenkurve und Integralfunktion ▷ 46

Lösung des Flächenproblems verstanden ▷ 50*

▷ 50

91

2. Aufgabe:

Jetzt wird das Integral $\int \sqrt{3x+1}\,dx$ ebenso ausführlich gelöst.

1. Wahl der Hilfsfunktion $\sqrt{3x+1} = u \qquad 3x+1 = u^2$
2. Substitution der Funktion und des Differentials. Aus $3x+1 = u^2$ wird $3dx = 2u \cdot du$

$$dx = \tfrac{2}{3} u \cdot du$$

Substituiertes Integral $\int \sqrt{3x+1}\,dx = \int u \cdot \tfrac{2}{3} \cdot u \cdot du = \frac{2u^3}{9} + C$

Rücksubstitution $\frac{2u^3}{9} + C = \frac{2}{9} \cdot (3x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

▷ 92

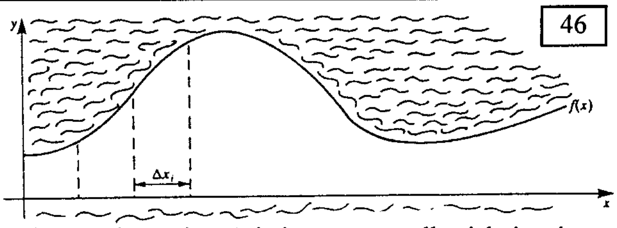
137

Hier sind sie:

- Integration ist die Umkehroperation zur Differentiation
- Integrieren wir die Funktion $f(x)$, erhalten wir die Stammfunktion $F(x)$.
- Bestimmtes Integral
- Unbestimmtes Integral
- Uneigentliches Integral
- Verifikationsprinzip
- Substitution
- Techniken der Integration
- Benutzung der Integraltabelle u.a.

▷ 138

46



Eine Halbinsel sei von einer Seite von einer geraden Küste begrenzt. Wir nennen sie x-Achse. Die andere Seite sei durch eine krumme Linie begrenzt. Wir nennen sie $f(x)$.

Die Halbinsel soll von Unkraut gerodet werden. Eine Arbeitsgruppe stellt sich in einer geraden Linie senkrecht zur x-Achse auf und arbeitet sich jeden Tag um das gleiche Stück Δx_i voran. Die jeden Tag neu gerodete Fläche wird annähernd berechnet aus Δx_i und $f(x_i)$. $f(x_i)$. ist die Breite der Halbinsel an der Stelle, an der die Gruppe arbeitet. Die Größe des insgesamt gerodeten Gebietes wird jeden Abend graphisch auf einer Tafel eingetragen. Diese Graphik nennen wir *Landgewinnkurve*.

Jetzt geht es weiter mit den Lehrschritten auf der **Mitte der Seiten**.

BLÄTTERN SIE ZURÜCK -------------------------------- ▷ 47

92

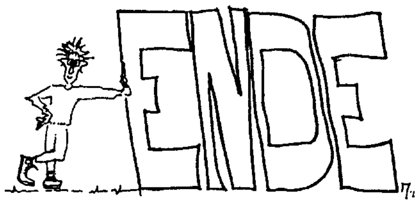
Berechnen Sie $\int e^{2ax} dx =$ ....

Jetzt geht es weiter mit den Lehrschritten **unten auf den Seiten**. Lehrschritt 93 steht unter den Lehrschritten 1 und 47.

BLÄTTERN SIE ZURÜCK -------------------------------- ▷ 93

138

Ja, und nun haben Sie wirklich wieder einmal eine längere Pause verdient.

Sie haben das  des Kapitels erreicht.