Kapitel 7

Taylorreihen und Potenzreihenentwicklung

1

Vorbemerkung

Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe

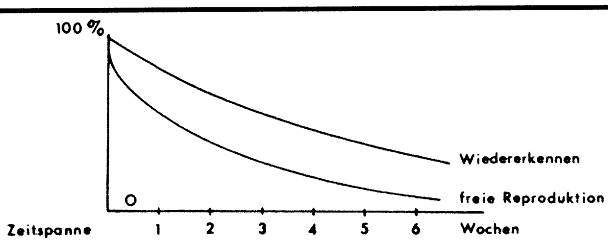
Gültigkeitsbereich der Taylor-Entwicklung

Taylorreihen und Potenzreihenentwicklung sind für viele Studienanfänger völlig neue Gebiete. Manche Ausdrücke scheinen schwerfällig. Sie werden klarer, wenn man die Umformungen geduldig auf einem Zettel mitrechnet. So kommen Sie zwar im Augenblick langsamer voran, aber im Endeffekt sparen Sie Zeit, weil Sie besser behalten, was Sie aktiv erarbeiten. Teilen Sie sich die Arbeit in Abschnitte ein.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 7.1 Vorbemerkung
7.2 Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe
7.3 Gültigkeitsbereich der Taylor-Entwicklung (Konvergenzbereich)
Lehrbuch, Seite 163 - 168

BEARBEITEN SIE DANACH -------------------------------- ▷ 2

42



Die Abbildung zeigt „*Vergessenskurven*", die zeitliche Abnahme des Gedächtnisinhaltes.

In grober Näherung ergeben sich exponentiell fallende Kurven. Die Fähigkeit, Sachverhalte zu reproduzieren, fällt rascher ab, als die Fähigkeit, Sachverhalte wiederzuerkennen. Sachverhalte, die man beim Lesen wiedererkennt, können keineswegs immer aktiv reproduziert werden. Das Wiedererkennen täuscht subjektiv einen höheren Kenntnisstand vor. Das stellt sich in jenen Situationen heraus, in denen man darauf angewiesen ist, Sachverhalte ohne Hilfe selbständig darzustellen und seine Kenntnisse anzuwenden.

-------------------------------- ▷ 43

83

$$\sin x = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \ldots\ldots$$

....

Setzt man in der obigen Taylorentwicklung für x den Wert $\frac{\pi}{2}$ ein, ergibt sich $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, da alle Potenzen von $(x - \frac{\pi}{2})$ verschwinden.

Was ergibt sich, wenn man in der obigen Taylorreihe die Variable x durch $(x + \frac{\pi}{2})$ ersetzt?

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$ ....

-------------------------------- ▷ 84

2

Nennen Sie mindestens drei Begriffe, die in diesem Abschnitt neu eingeführt werden.

1) ....

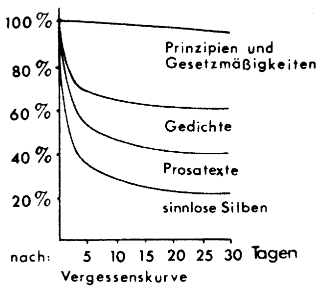
2) ....

3) ....

-------------------------------- ▷ 3

43

Die Verfügbarkeit über Gedächtnisinhalte hängt von der Strukturierung des Lerninhaltes ab. Material, das einsichtig gelernt und im Zusammenhang erfaßt wird, bleibt länger reproduzierbar.



Die Abbildung verdeutlicht diesen Sachverhalt an verschiedenen Lerninhalten.

Daraus folgt, es ist vorteilhaft, sich Gelerntes immer im Zusammenhang zu vergegenwärtigen.

-------------------------------- ▷ 44

84

$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-$ ....

Die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung ist die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ $\cos x$:

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-$ ....

Damit erhalten wir das Ergebnis: $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$

Diese Gleichung wird bereits in der Trigonometrie abgeleitet $\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$. Diesmal haben wir sie mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung also „analytisch" bewiesen.

-------------------------------- ▷ 85

3

Potenzreihe

Taylor-Reihe

Konvergenzbereich

Nennen Sie stichwortartig die drei Gründe dafür, daß die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe nützlich sein kann:

a) ....

b) ....

c) ....

-------------------------------- ▷ 4

44

Die Absicht, sich etwas einzuprägen, wirkt sich positiv aus auf die Fähigkeit, Gelerntes zu reproduzieren.

LEWIN (1963) berichtet über folgendes Experiment:

Ein Student sollte seinen Kommilitonen einen Merkstoff solange vorlesen, bis diese ihn reproduzieren konnten

Danach wurde der vortragende Student selber aufgefordert, den Text frei wiederzugeben.

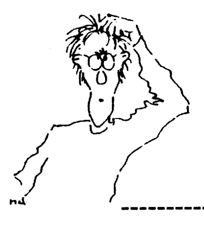
Im Gegensatz zu den Teilnehmern hatte er sich fast nichts gemerkt.

Daraus folgt: Es ist vorteilhaft, während des Studierens immer zu entscheiden, was behaltenswert ist, dies zu exzerpieren oder mindestens zu unterstreichen.

-------------------------------- ▷ 45

85

Lösen Sie nach einigen Tagen die Übungsaufgaben 7.4, Lehrbuch, Seite 179, bis Sie mindestens eine Aufgabe richtig gerechnet haben.



-------------------------------- ▷ 86

4

a) Die ersten Glieder einer Potenzreihe eignen sich als Näherungsausdrücke für die Funktion.
b) Potenzreihen lassen sich gliedweise differenzieren und integrieren.
c) Mittels Potenzreihen lassen sich Funktionswerte beliebig genau berechnen.

....

Der Ausdruck n! wird gesprochen: ....

Der Ausdruck n! bedeutet: ....

------------------------------- ▷ 5

45

Gedächtnisinhalte hängen von der Art ab, in der sie eingelernt werden.

a) Massiertes Lernen: Ein Kapitel wird 4 Stunden lang studiert.
b) Verteiles Lernen: Die Arbeit wird auf 4 zeitlich auseinanderliegende Arbeitsphasen von je einer Stunde verteilt.

------------------------------- ▷ 46

86

Nutzen der Reihenentwicklung
Polynome als Näherungsfunktionen
Tabelle gebräuchlicher Näherungspolynome

STUDIEREN SIE im Lehrbuch

7.6 Nutzen der Reihenentwicklung
7.6.1 Polynome als Näherungsfunktionen
7.6.2 Tabelle gebräuchlicher Näherungspolynome
Lehrbuch, Seite 173 - 176

BEARBEITEN SIE DANACH ------------------------------- ▷ 87

5

n-Fakultät

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \; ..... \; (n-1) \cdot n$

Berechnen Sie und nutzen Sie Rechenerleichterungen aus:

$$5! \quad = ...$$

$$\frac{7!}{5!} \quad = ...$$

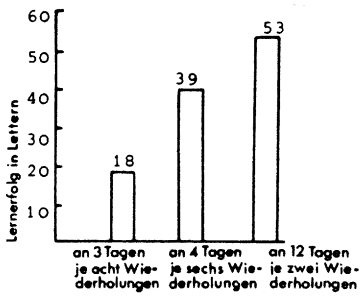
$$\frac{(n+1)!}{n!} \quad = ...$$

$$\frac{9!}{11!} \quad = ...$$

-------------------------------- ▷ 6

46

Experimentelle Untersuchungen zeigen die deutliche Überlegenheit des verteilten Lernens. So hat Engelmayer (1969) den gleichen Anteil an Übungs- und Wiederholungsphasen über 3, 4 und 12 Tage verteilt und jeweils den Lernerfolg gemessen



Unterschiedliche Verteilung der Wiederholung und Lernerfolg (nach Engelmayer).

Verteiltes Lernen ist Lernen mit Wiederholungsphasen. Wiederholung sichert nicht nur den Lernerfolg, sondern ist gleichzeitig ein Mittel, das Lernen zu rationalisieren und bei gleichen Lernzeiten den Lehrstoff sicherer einzulernen. ---------------------------- ▷ 47

87

Mit Hilfe der Taylorentwicklung lassen sich Näherungsformeln für die wichtigsten Funktionen gewinnen. So genügt es oft, bei kleinen Winkeln die trigonometrischen Funktionen durch ihre Näherungspolynome zu ersetzen. Dadurch lassen sich schwierige mathematische Ausdrücke erheblich vereinfachen.

Geben Sie die 1. und 2. Näherung nach der Tabelle – Lehrbuch, Seite 176 – für $\cos x$ an.

1. Näherung: $\cos x \approx$ ....

2. Näherung: $\cos x \approx$ ....

-------------------------------- ▷ 88

6

$5! = 120$

$\frac{7!}{5!} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{2\cdot3\cdot4\cdot5} = 6\cdot7 = 42$

$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{2\cdot3 \ldots n\,(n+1)}{2\cdot3\ldots n} = n+1$

$\frac{9!}{11!} = \frac{2\cdot3\ldots9}{2\cdot3\ldots9\cdot10\cdot11} = \frac{1}{110}$

....

Rechenerleichterung: Oft kann man durch Faktoren kürzen, die im Zähler und im Nenner vorkommen. Haben Sie bei den obigen Aufgaben einen oder mehrere Fehler gemacht?

Ja -------------------------------- ▷ 7

Nein -------------------------------- ▷ 10

47

Im Rahmen dieses Leitprogrammes ist mehrfach empfohlen worden:

Wiederholung nach Abschluß einer Lernphase – vor der Pause.

Wiederholung nach einigen Tagen oder vor Beginn des neuen Kapitels.

Diese Wiederholungen können und sollten ergänzt werden durch eine zusätzliche systematische Wiederholung nach einem größeren Zeitabstand. Dafür kann man sich einen Wiederholungsplan aufstellen. Er kann darin bestehen, daß man jeweils bei der Durcharbeitung eines Kapitels dasjenige Kapitel wiederholt, das man 4 Wochen vorher bearbeitet hat.

Ziel: Alle im Kapitel neu eingeführten Begriffe sowie die Operationen sollten wieder aktiv beherrscht werden. Hat man Exzerpte angefertigt, so sind diese die Grundlage der Wiederholung.

-------------------------------- ▷ 48

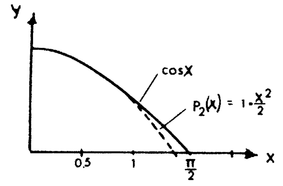
88

1. Näherung: $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ 2. Näherung: $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

....

Bei der cos-Funktion benutzt man häufig die 1. Näherung: $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

Betrachten wir den Fehler, den man bei der Benutzung dieser Näherung macht:
Für $x = 0{,}5$ rad gilt:
Exakter Wert: cos (0,5) = 0,8776



Näherung: $p_2(0{,}5) = 1 - \frac{(0{,}5)^2}{2} = 0{,}8750$

Fehler der Näherung: cos (0,5) - p_2 (0,5) ≈ 0,0026 ≈ 0,0026 ≈ 0,3%. Berechnen Sie entsprechend den Fehler der 1. Näherung für den Wert $x = 0{,}75$ cos 0,75 = 0,732

cos (0,75) - p_2(0,75) ≈ 0,732 ....

-------------------------------- ▷ 89

7

Das Symbol n! (gesprochen n-Fakultät) ist eine Abkürzung für das Produkt der ersten n-Zahlen.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$

Was ergibt (n-2)! ?

$(n-2)! = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 8

48

Die Wiederholung kann in folgenden Schritten ablaufen:

1. Schritt: Man schreibt aus dem Gedächtnis die Gliederung des Kapitels und die Liste der neu eingeführten Begriffe hin (freie Reproduktion).

2. Schritt: Man vergleicht diese Liste mit dem Exzerpt und ergänzt sie.

3. Schritt: Man versucht die Bedeutung der Begriffe frei zu reproduzieren. Man kontrolliert sie anhand des Textes und des Exzerptes.
Ursprünglich nicht erinnerte Begriffe und falsch reproduzierte Bedeutungen müssen neu gelernt werden.

4. Schritt: Bearbeitung entsprechender Übungen des Kapitels.

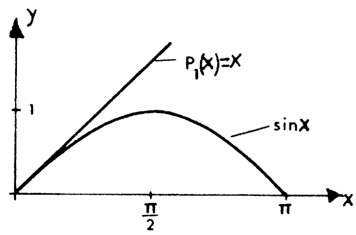
-------------------------------- ▷ 49

89

$\cos(0{,}75) - p_2(0{,}75) \approx 0{,}732 - 0{,}719 \approx 0{,}013$

....

Für kleine Winkel x gilt für die Sinusfunktion folgende Näherung
$\sin x \approx x$
Der Fehler erreicht bei $x = 0{,}3$ etwa 0,5%. Es gilt:
$\sin(0{,}3) = 0{,}2955$
und folglich ist die Differenz $0{,}3 - \sin(0{,}3) = \ldots..$



-------------------------------- ▷ 90

8

(n-2)! = 1 · 2 · 3 . . . (n-3)(n-2)

Berechnen Sie nun folgende Aufgaben.

Denken Sie daran, man kann oft kürzen und sich Rechenarbeit sparen.

1. $\frac{n!}{(n-2)!}$ = ...

2. $\frac{3! \cdot 5!}{6!}$ = ...

3. $\frac{100!}{101!}$ = ...

▷ 9

49

Das Exzerpieren ist wirklich eine wichtige Arbeitstechnik. Die Exzerpte sind in mehrfacher Hinsicht nützlich. Einmal lernt man beim Exzerpieren Wesentliches von Unwesentlichem zu unterscheiden. Dann sind Exzerpte eine gute Hilfe für Wiederholungen.

Es hilft auch, Wesentliches im Lehrbuch anzustreichen. Das nützt aber genau wie das Exzerpieren nur dann, wenn höchstens 5-10% des Textes angestrichen oder exzerpiert werden. Sonst schreibt man ja ab und differenziert nicht mehr.

▷ 50

90

0,3 - 0,2955 = 0,005

Erinnerung: 0,3 rad ≈ 17,2 grad

Welchen Fehler hat die folgende Näherung bei $x = 1$?

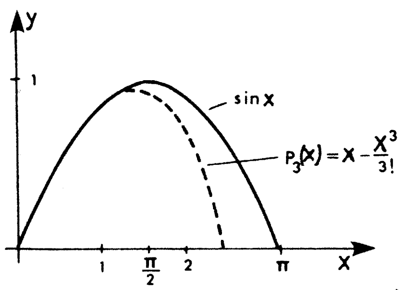
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

sin (1) = 0,84147

p_3 (1) = ...

Fehler = ...

1 rad = ... grad



▷ 91

9

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \ldots (n-2)(n-1)\, n}{1 \cdot 2 \ldots (n-2)} = (n-1)\, n$$

$$\frac{3! \cdot 5!}{6!} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1$$

$$\frac{100!}{101!} = \frac{1 \cdot 2 \ldots\ldots 100}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 100 \cdot 101} = \frac{1}{101}$$

--------------------------------- ▷ 10

50

Ihnen sind Wiederholungstechniken bekannt. Das ist gut so, denn sie sind nützlich.

Wiederholung vor Pausen.

Wiederholung vor neuem Kapitel.

Wiederholung nach Plan.

Im übrigen gilt auch hier: Wiederholungstechniken sind nützlich; allerdings nur dem, der sie anwendet.

--------------------------------- ▷ 51

91

$p_3(1) = 0{,}83333 \ldots\ldots\ldots\ldots$

Fehler $\approx 0{,}008 \approx 1\%$ 1 rad = 57 grad

Im Lehrbuch ist auf Seite 176 in der Tabelle mit den Näherungen der jeweilige Bereich für eine Fehlergrenze von 1% und 10% angegeben. Sie sollen sich nun im Umgang mit dieser Tabelle vertraut machen.

Der Wert der Funktion $f(x) = \tan x$ soll an der Stelle $x = 0{,}15$ mit Hilfe einer Näherung berechnet werden. Die Abweichung vom wahren Wert soll kleiner als 1% sein.

Welche Näherung kann als **einfachste** genommen werden?

1. Näherung: $\tan x \approx x$ --------------------------------- ▷ 94

2. Näherung: $\tan x \approx x + \frac{x^3}{3}$ --------------------------------- ▷ 92

10

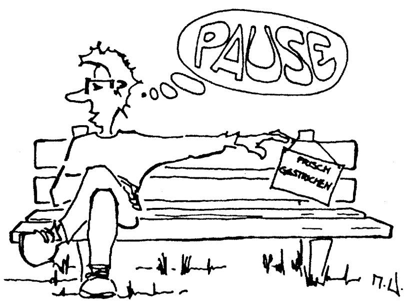
Geben Sie die allgemeine Form der Taylorreihe für die Funktion $f(x)$ an. Entwickelt wird an der Stelle $x_0 = 0$. Sehen Sie eventuell im Lehrbuch nach.

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 11

51

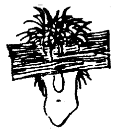
Sie haben jetzt eine KLEINE PAUSE verdient!



-------------------------------- ▷ 52

92

Leider falsch!



Bei Verwendung der 1. Näherung $\tan x \approx x$ ist nach der Tabelle die Abweichung vom wahren Wert kleiner als 1%, wenn x im Bereich $0 < x < 0{,}17$ liegt. Der Wert 0,15 liegt innerhalb des Bereichs. Es genügt also in diesem Fall die **1. Näherung**.

Die Funktion $\sqrt{1+x}$ soll im Bereich $x = 0$ bis $x = 0{,}50$ durch eine Näherung ersetzt werden. Der relative Fehler soll 1% nicht überschreiten.

Welche Näherung kann als **einfachste** genommen werden?

1. Näherung -------------------------------- ▷ 93

2. Näherung -------------------------------- ▷ 94

11

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Entwickeln Sie nun die Funktion $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x = 0$ in eine Taylorreihe bis zum Gliede n = 4.

Gehen Sie so vor:

1. Schritt: Ableitungen $f', f'', f''', f^{(4)}$ bilden.
2. Schritt: Werte der Ableitungen für $x = 0$ ermitteln.
3. Schritt: Werte f (0), f'(0), ..., $f^{(4)}$ (0) in die Gleichung einsetzen. Sie steht oben im Antwortfeld.

$\cos x =$ ....

-------------------------------- ▷ 12

52

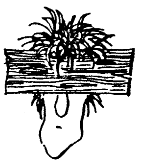
Näherungspolynom
Abschätzung des Fehlers

STUDIEREN SIE im Lehrbuch
7.4 Näherungspolynom
7.4.1 Abschätzung des Fehlers
Lehrbuch, Seite 169 - 172

BEARBEITEN SIE danach -------------------------------- ▷ 53

93

Leider falsch!



Die 1. Näherung für $\sqrt{1+x}$ hat einen Fehler, der maximal 1% beträgt, nur im Bereich von $x = 0$ bis $x = 0{,}30$.

Die 2. Näherung hat eine Abweichung von maximal 1% in dem größeren Bereich $x = 0$ bis $x = 0{,}60$. Der geforderte Bereich ist $x = 0$ bis $x = 0{,}50$. Es muß daher die *2. Näherung* genommen werden.

SPRINGEN SIE auf -------------------------------- ▷ 95

12

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

....

Alles richtig --------------------------------- ▷ 14

Fehler gemacht oder
Erläuterung erwünscht --------------------------------- ▷ 13

53

Entwickelt man eine Funktion in eine Taylorreihe, so interessiert man sich meistens nur für die ersten Glieder dieser Reihe. Man bricht die Reihe deshalb nach dem n-ten Glied ab.

Wie heißen die beiden Anteile, in die sich eine Taylorreihe aufspalten läßt?

$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ und $+ a_{n+1} x^{n+1} + \cdots$

....

--------------------------------- ▷ 54

94

Richtig!

--------------------------------- ▷ 95

13

Die ersten Glieder der Taylorreihe für die cos-Funktion sollten berechnet werden.

1. Wir bilden die Ableitungen:

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x \qquad f''(x) = -\cos x$

$f'''(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(x) = \cos x$

2. Wir ermitteln die Werte für $x = 0$:

$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 0 \qquad f''(0) = -1$

$f'''(0) = 0 \qquad f^{(4)}(0) = 1$

3. Wir setzen ein: $\cos x \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$

$$= 1 + \frac{0 \cdot x}{1!} + \frac{(-1) \cdot x^2}{2!} + \frac{0 \cdot x^3}{3!} + \frac{1 \cdot x^4}{4!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

-------------------------------- ▷ 14

54

Näherungspolynom n-ten Grades und Rest

Wir wollen uns mit dem Näherungspolynom beschäftigen. Gegeben sei die Taylorreihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots$$

Nennen Sie die Gleichungen der 4 ersten Näherungspolynome:

1. Näherungspolynom $p_1(x) =$ ....

2. Näherungspolynom $p_2(x) =$ ....

3. Näherungspolynom $p_3(x) =$ ....

4. Näherungspolynom $p_4(x) =$ ....

-------------------------------- ▷ 55

95

Welche Näherung muß im Bereich $0 < x < 0{,}4$ für die Funktion $\tan x$ genommen werden, wenn die Genauigkeit 1% betragen soll.

☐ 1. Näherung

☐ 2. Näherung

-------------------------------- ▷ 96

14

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ an der Stelle $x = 0$ in eine Taylorreihe bis zum Gliede n = 3. Welche Rechenschritte müssen Sie dazu nacheinander ausführen?

1. ....

2. ....

3. ....

--------------------------------- ▷ 15

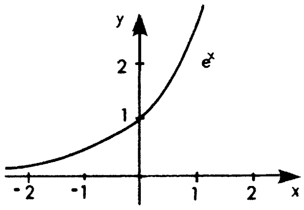
55

$$p_1(x) = 1 + x$$

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$



Die Zeichnung zeigt das Bild der Funktion

$y = e^x$

Zeichnen Sie das erste Näherungspolynom ein:

$p_1(x) = 1 + x$

--------------------------------- ▷ 56

96

2. Näherung ist richtig.

Die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

soll im Bereich $0 < x < 0{,}7$ durch eine Näherungsformel ersetzt werden. Die Abweichung soll maximal 10% betragen. Geben Sie das Näherungspolynom mit dem niedrigsten Grad an, das diese Bedingung erfüllt.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx \text{..............}$$

--------------------------------- ▷ 97

15

1. Bildung der Ableitungen $f'(x), f''(x), f'''(x)$
2. Ermittlung des Werts der Ableitungen für $x = 0$.
3. Einsetzen der Werte in die Reihe: $f(x) \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Berechnen Sie die 3 ersten Ableitungen der Funktion $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

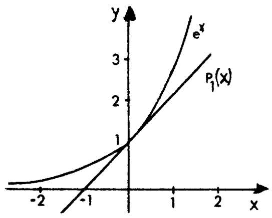
1. Schritt: $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$f''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$f'''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 16

56



Die Gerade $p_1(x) = 1 + x$ ist die Tangente an die Kurve $y = e^x$ im Punkte $x_0 = 0$.

Der Koeffizient a_1 des Näherungspolynoms $p_1(x) = a_0 + a_1 x = 1 + x$ ist gerade so gewählt, daß diese Bedingung erfüllt ist. Eine bessere Approximation der Funktion $f(x) = e^x$ in der Umgebung des Punktes $x_0 = 0$ liefert das 2. Näherungspolynom

$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ Die Funktion $1 + x + \frac{x^2}{2}$ ist eine ....

---------------------------------- ▷ 57

97

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2$$

$\frac{1}{1-x^2}$ soll im Bereich $0{,}2 < x < 0{,}4$ durch eine Näherung ersetzt werden.

Genauigkeitsanspruch: 10%. Welche Näherung nehmen Sie?

☐ 1. Näherung $\frac{1}{1-x^2} \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$

☐ 2. Näherung $\frac{1}{1-x^2} \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 98

16

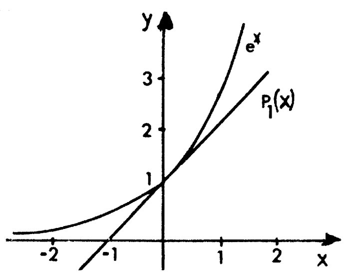
$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}$$
$$f''(x) = \frac{6}{(1+x)^4}$$
$$f'''(x) = \frac{-24}{(1+x)^5}$$

Alles richtig ▷ 23

Fehler ▷ 17

57

Die Funktion $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ist eine *Parabel.*



Skizzieren Sie die Parabel

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

▷ 58

98

1. Näherung $\frac{1}{1-x^2} \approx 1 + x^2$

Näherungen benutzt man auch gern, um spezielle Funktionswerte zu berechnen, wenn man nicht auf Tabellen zurückgreifen kann oder will.

Beispiel: Gesucht sei $e^{0,2}$

1. Näherung für den Funktionswert

$$e^{0,2} = e^{x_0} \approx 1 + x_0 = 1 + 0,2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Näherung für den Funktionswert

$$e^{0,2} = e^{x_0} \approx 1 + x_0 + \frac{x_0^2}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ 99

17

Es hilft nichts, wir müssen auf Fehlersuche gehen. Erst wenn der Grund für Schwierigkeiten erkannt ist, können sie behoben werden.

Dies ist eine der schwersten Studiertechniken:

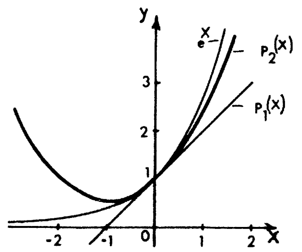
Den Grund für Lernschwierigkeiten identifizieren.

Eine Methode dafür:

Fehler nie – aber auch wirklich nie – auf sich beruhen lassen.

----------------------------- ▷ 18

58



Die Parabel $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ schmiegt sich der Kurve $f(x) = e^x$ besser an als die Tangente $p_1(x)$. Die Parabel $p_2(x)$ hat im Punkte $x_0 = 0$ nicht nur die gleiche Steigung wie die Funktion e^x sondern auch die gleiche Krümmung. An dieser Stelle stimmen auch die zweiten Ableitungen beider Funktionen überein:

$f''(0) =$ .... $p_2''(0) =$ .... ----------------------------- ▷ 59

99

1,20

1,22

Man kann auch Brüche, deren Nenner sich nicht wesentlich von 1 unterscheiden, durch Näherungen bequemer bestimmen. Man muß sie umformen. Beispiel:

$$\frac{1}{0{,}94} = \frac{1}{1-0{,}06}$$

$\frac{1}{1-0{,}06}$ kann dann mit Hilfe der Näherungsformel $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$ bestimmt werden.

$\frac{1}{1-0{,}06} = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$ Wie genau ist die Näherung? Abweichung < .... %

----------------------------- ▷ 100

18

Suchen Sie den Fehler, den Sie bei der Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ gemacht haben. Die Ableitungen sind: $f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}$

$$f''(x) = \frac{6}{(1+x)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{-24}{(1+x)^5}$$

Als Fehler kommen in Betracht:

Flüchtigkeitsfehler -------------------------------- ▷ 19

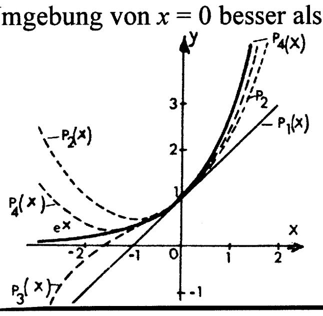
Schwierigkeiten bei der Bildung von Ableitungen -------------------------------- ▷ 20

59

$f''(0) = e^0 = 1$
$p_2''(0) = 1$

....

Das 3. Näherungspolynom ist $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$. Es approximiert die Funktion in der Umgebung von $x = 0$ besser als das vorangehende Näherungspolynom.



Die Zeichnung zeigt das Bild der Funktion $f(x) = e^x$ mit ihren vier ersten Näherungspolynomen $p_1(x), ..., p_4(x)$.

Man erkennt, wie sich mit wachsendem Grad die Polynome in der Umgebung von $x = 0$ immer besser an die Funktion anschmiegen.

-------------------------------- ▷ 60

100

Abweichung < 1%

....

Die Näherungen für $\sqrt{1-x}$ und $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ sind in der Tabelle 176 nicht enthalten.

Sie gehen unmittelbar aus den Näherungen für $\sqrt{1+x}$ und $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ hervor, wenn Sie x ersetzen durch $(-x)$. Geben Sie jeweils die 1. und 2. Näherung an:

1. Näherung	2. Näherung
$\sqrt{1-x} \approx$	$\sqrt{1-x} \approx$ ....
$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx$	$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx$ ....

-------------------------------- ▷ 101

19

Na ja, kann passieren.

Die Fehlerrate sollte aber nicht eine monoton ansteigende Zeitfunktion werden!

Der Teufel steckt eben immer im Detail.

SPRINGEN SIE auf --------------------------------- ▷ 23

60

Wir brechen nun die Taylorreihe für die Funktion $f(x) = e^x$ bei $n = 4$ ab.

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Der Fehler, den wir machen, wenn die folgenden Glieder nicht berücksichtigt werden, wird im allgemeinen Fall abgeschätzt durch den Ausdruck

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$ Er heißt: ....

Wie sieht dieser Ausdruck bei dem hier betrachteten Beispiel $(y = e^x)$ aus?

$R_4 =$ ....

--------------------------------- ▷ 61

101

1. Näherung

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

2. Näherung

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2$$

....

Alles richtig --------------------------------- ▷ 103

Noch Fehler gemacht oder Erläuterung gewünscht --------------------------------- ▷ 102

20

In den Koeffzienten $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ der Taylorreihe treten die höheren Ableitungen $f^{(n)}(x)$ auf. Zur Berechnung der Taylorreihe von $f(x)$ müssen deshalb zunächst die höheren Ableitungen $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ gebildet werden.

Da Ihnen dies noch Schwierigkeiten bereitet, unterbrechen wir zunächst an dieser Stelle. Sehen Sie sich im Lehrbuch auf Seite 125, Kapitel 5, an, wie der Begriff der höheren Ableitung definiert ist.

In unserem Beispiel liegt als Funktion ein Quotient vor. Hier muß nach der Quotientenregel differenziert werden. Im Lehrbuch auf Seite 118 nachsehen:

$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots$

-------------------------------- ▷ 21

61

Der Rest oder das Restglied von Lagrange $R_4 = \frac{e^{\xi}}{5!} x^5 \qquad (0 < \xi < x)$

....

Wichtig zu wissen ist: Bei der Benutzung von Näherungspolynomen macht man einen Fehler. Dieser Fehler kann beliebig klein gehalten und abgeschätzt werden. Praktisch werden wir diese Fehlerabschätzung später nicht mehr selbst durchführen.

Für den Leser, der gerne noch ein Beispiel zur Fehlerabschätzung rechnen möchte, ist eine Zusatzerläuterung vorgesehen.

Möchte weitergehen -------------------------------- ▷ 65

Möchte das Beispiel zur Fehlerabschätzung -------------------------------- ▷ 62

102

Der Term $\sqrt{1-x}$ entsteht aus dem Term $\sqrt{1+x}$ durch die Substitution $x \to -x$. Ersetzt man in den Näherungsformeln die Variable x durch $-x$, erhält man:

$\sqrt{(1-x)} = \sqrt{1+(-x)} \approx 1 + \frac{(-x)}{2} = 1 - \frac{x}{2}$ und $\sqrt{1-x} = 1 + \frac{(-x)}{2} - \frac{(-x)^2}{8} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

Entsprechend gilt:

$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)}} \approx 1 - \frac{(-x)}{2} = 1 + \frac{x}{2}$ und $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 - \frac{(-x)}{2} + \frac{3}{8}(-x)^2 = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2$

-------------------------------- ▷ 103

21

$$f' = \frac{-2}{(1+x)^3}$$

Berechnen Sie die fehlenden Ableitungen:

$$f = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f' = \frac{-2}{(1+x)^3}$$

$f'' =$ ....

$f''' =$ ....

--------------------------------- ▷ 22

62

Die Taylorreihe der cos-Funktion lautet: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots$

Will man den Wert der cos-Funktion an der Stelle $x = 1$ berechnen, muß man in der Taylorentwicklung $x = 1$ setzen: $\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots\cdots$

Bricht man diese Reihe nach dem Glied $n = 2$ ab, läßt sich der Rest der Reihe mit Hilfe des Lagrange'schen Restgliedes $R_2(1)$ abschätzen: $\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + R_2(1)$

Wie sieht das Restglied aus, wenn es die allgemeine Form hat: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$

$R_n(x) =$ ....

$R_2(1) =$ ....

--------------------------------- ▷ 63

103

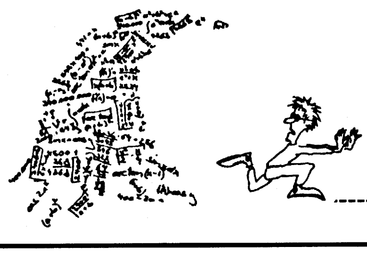
Für die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ haben wir die folgende 2. Näherung aufgestellt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2$$

Wir berechnen damit $\frac{1}{\sqrt{0{,}6}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}4}}$

Rechnen Sie den Zahlenwert aus!

$\frac{1}{\sqrt{1-0{,}4}} \approx$ ....



------------------ ▷ 104

22

$$f'' = \frac{6}{(1+x)^4}$$
$$f''' = \frac{-24}{(1+x)^5}$$

Kehren wir nun zu unserer Aufgabe – Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ in eine Taylorreihe – zurück.

---------------------------------- ▷ 23

63

$$R_2(1) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} = \frac{+\sin\xi}{3!} \qquad (0 < \xi < 1)$$

Den genauen Wert für ξ kennen wir nicht. Ganz sicher liegen wir auf der richtigen Seite der Fehlerabschätzung, wenn wir für sin (ξ) den größten Wert einsetzen, den die Sinusfunktion überhaupt annehmen kann – nämlich 1. Damit könnte der Fehler allenfalls als zu groß geschätzt werden.

$$|R_2(1)| = \left|\frac{\sin\xi}{3!}\right| \le \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$$

Der Näherungswert für cos (1) ist: $\cos(1) = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}500$. Der Fehler, den man bei dieser Näherung macht, ist also $\le 0{,}17$. Der wahre Wert ist cos (1) = 0,5403 ...
Wie groß ist also die Differenz D zwischen wahrem Wert und Näherungswert für cos (1)?
D = ...

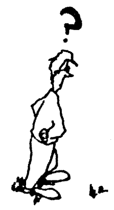
---------------------------------- ▷ 64

104

$$\frac{1}{\sqrt{1-0{,}4}} \approx 1 + \frac{0{,}4}{2} + \frac{3}{8}(0{,}4)^2 = 1{,}26$$

Wie genau ist dieser Wert?

- ☐ Genauer als 1%
- ☐ Genauer als 10%
- ☐ Ungenauer als 10%



---------------------------------- ▷ 105

23

Die Ableitungen der Funktion $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ lauteten:

$f'(x)=\frac{-2}{(1+x)^3}$ $\quad f''(x)=\frac{6}{(1+x)^4}$ $\quad f'''(x)=\frac{-24}{(1+x)^5}$

Setzen wir in den Ableitungen $x = 0$, ergibt sich: $f'(0)=-2$, $f''(0)=6$, $f'''(0)=-24$

Setzen wir nun diese Werte in die Taylorreihe ein:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

$\frac{1}{(1+x)^2}=$ ....

-------------------------------- ▷ 24

64

D = 0,5403 - 0,5000 = 0,0403

...

Die Näherung kann durch Hinzunahme eines weiteren Gliedes verbessert werden.

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$$

Für $x = 1$ erhalten wir: $\cos 1 \approx 1-0{,}5+\frac{1}{24}=0{,}5417$

Das ist eine bessere Näherung (cos 1 = 0,5403 ...)
Die verbleibende Differenz ist

D = ...

-------------------------------- ▷ 65

105

Genauer als 10%

...

Berechnen Sie den Wert $\sqrt{1{,}4}$ mit einer Näherung auf 1% genau.

$\sqrt{1{,}4}\approx$ ....

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 108

Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 106

24

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + \frac{6}{2!}x^2 - \frac{24}{3!}x^3 + \cdots\cdots$$
$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots\cdots$$

Hinweis: Meistens reicht das Berechnen der ersten 3 bis 4 Glieder einer Taylorreihe schon aus, um auf die Form der *ganzen* Reihe schließen zu können. In unserem Falle vermutet man mit Recht, daß sich die Reihe wie folgt fortsetzt:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 + \cdots\cdots$$

-------------------------------- ▷ 25

65

D = 0,0014

PAUSE

-------------------------------- ▷ 66

106

Zu berechnen ist $\sqrt{1{,}4}$

Maximaler Fehler: 1%

1. Wir wenden den eben geübten Trick an und formen $\sqrt{1{,}4}$ so um, daß ein Ausdruck entsteht, für den wir eine Näherung angeben können.
   $\sqrt{1{,}4} = \sqrt{1+0{,}4} \mathrel{\hat{=}} \sqrt{1+x}$
2. Genauigkeitsabschätzung: x = 0,4
   Nach der Tabelle (Seite176) ist für die 1. Näherung der Bereich mit der geforderten Genauigkeit von 1% $0 < x < 0{,}30$
   Unser x-Wert liegt nicht mehr in diesem Bereich.
   Die 2. Näherung ist auf 1% genau im Bereich $0 < x < 0{,}60$
   Unser x-Wert liegt in diesem Bereich.

-------------------------------- ▷ 107

25

Wir betrachten die in diesem Kapitel ganz am Anfang behandelte Gleichung.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots .$$

Wir ersetzen die Variable x durch (- x) und erhalten eine neue Reihe:

$$\frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots$$

Die Potenzreihe der Funktion e^x lautet $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$

Bestimmen Sie analog die Potenzreihe für $f(x) = e^{-x}$

$e^{-x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ -------------------------------- ▷ 26

66

Allgemeine Taylorreihenentwicklung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß eine Potenzreihenentwicklung an jeder beliebigen Stelle einer Funktion möglich ist.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 7.5 Allgemeine Taylorreihenentwicklung
Lehrbuch, Seite 172 - 173

BEARBEITEN SIE danach -------------------------------- ▷ 67

107

Wir berechnen $\sqrt{1{,}4}$ mit der 2. Näherung:

$$\sqrt{1{,}4} = \sqrt{1+0{,}4} \approx 1 + \frac{0{,}4}{2} - \frac{(0{,}4)^2}{8}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 108

26

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Funktion $\ln(1+x)$ soll an der Stelle $x = 0$ in eine Taylorreihe entwickelt werden. Die Reihe soll bis zum Gliede n = 3 berechnet werden.

Welche Rechenschritte sind dazu erforderlich?

1. ....

2. ....

3. ....

--------------------------------- ▷ 27

67

Anhand des Lehrbuchs soll ein Beispiel für die Taylorentwicklung an einer beliebigen Stelle durchgerechnet werden.

Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = e^x$. Sie soll im Punkte $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe entwickelt werden.

Analog zum Lehrbuch führen wir zunächst eine Hilfsvariable u ein.

$u =$ ....

$x =$ ....

--------------------------------- ▷ 68

108

$\sqrt{1{,}4} \approx 1{,}18$

Rechnen Sie bitte morgen oder übermorgen mindestens eine von den Übungsaufgaben 7.5.1. C auf Seite 176.

--------------------------------- ▷ 109

27

1. Wir bilden die Ableitungen $f'(x), f''(x), f'''(x)$.
2. Wir ermitteln die Werte $f'(0), f''(0), f'''(0)$.
3. Wir setzen in die Gleichung ein: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots$

1. Schritt:	2. Schritt:
$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$f'(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$f''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$f''(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$f'''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$f'''(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Schritt: $\ln(1+x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 28

68

$u = x - 1$

$x = u + 1$ (Im Lehrbuch steht: $u = x - x_0$, hier ist $x_0 = 1$)

Substituieren Sie mit $x = u + 1$:

$f(x) = e^x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 69

109

Wiederholungstechniken sind besonders wichtig bei einer Prüfungsvorbereitung.

Ich möchte etwas über Prüfungen und Prüfungsvorbereitung erfahren -------------- ▷ 110

Meine nächste Prüfung werde ich erst in einigen Semestern machen.
Ich möchte weitergehen --------------------------------- ▷ 115

28

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = 2$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Alles richtig --------------------------------- ▷ 33

Fehler gemacht oder Erläuterung erwünscht --------------------------------- ▷ 29

69

e^{u+1}

Die Funktion $f(x) = e^x$ sollte an der Stelle $x_0 = 1$ entwickelt werden. Durch die Substitution $x = u + 1$ haben wir die gleichwertige Funktion e^{u+1} gewonnen. Wir nennen diese Funktion $g(u)$. Die Variable u hat an der Stelle $x_0 = 1$ den Wert $u = 0$. Folglich muß die Funktion $g(u) = e^{u+1}$ an der Stelle $u = 0$ entwickelt werden. Dies haben wir bereits früher geübt. Welche Arbeitsschritte sind dazu erforderlich?

1. ....
2. ....
3. ....

--------------------------------- ▷ 70

110

Prüfungen und Prüfungsvorbereitungen

Die Diskussion über Prüfungen reicht von Vorschlägen zur völligen Abschaffung bis zu Vorschlägen zur Verschärfung der Kontrollen und Leistungsnachweise.

Wir führen hier keine Argumentation pro und contra. Sicher ist, daß Sie sich mit der Problematik von Prüfungen auseinandersetzen müssen.

Prüfungsvorbereitungen stehen meistens unter Zeitdruck. Dieser Umstand ist teils individuell, teils institutionell bedingt.

Wir möchten hier einige – möglicherweise triviale – Ratschläge geben, die den Streß von Prüfungssituationen vermindern können.

--------------------------------- ▷ 111

29

1. Schritt: Berechnung der ersten drei Ableitungen von $f(x) = \ln(1+x)$. Wir benutzen die Kettenregel (Seite 119 und 124 im Lehrbuch)

$$f(x) = \ln(1+x) = \ln(g); \quad g(x) = 1+x$$

$$f'(x) = \frac{1}{g}g' = \frac{1}{1+x}\cdot 1$$ (Kettenregel, Ableitung der Logarithmusfunktion)

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$ (Quotientenregel)

$$f'''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 30

70

1. Wir bilden die Ableitungen $g'(u)$, $g''(u)$ ....
2. Wir ermitteln den Wert der Ableitungen im Punkte $u = 0$
3. Wir setzen die Werte $g'(0)$, $g''(0)$ ... in die Formel ein:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(u)}{n!} u^n$$ Hinweis: Hier sind Bezeichnungen gewechselt.

....

Berechnen Sie nun die ersten Glieder der Taylorreihe der Funktion $g(u) = e^{u+1}$ an der Stelle $u = 0$.

$$g(u) = e^{u+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 71

111

Der Erfolg einer Prüfung hängt zum großen Teil von einer sorgfältigen Planung ab. Dazu muß man sich zunächst folgendes überlegen:

a) Welche Anforderungen werden in der Prüfung gestellt?

b) Welche Anforderungen davon erfülle ich bereits?

c) Welche Qualifikationen (Kenntnisse) fehlen mir noch?

Danach wird man zunächst abschätzen, welcher Zeitaufwand notwendig ist, um die gewünschten Kenntnisse zu erwerben. Es empfiehlt sich, den geschätzten Zeitaufwand zu verdoppeln, da man meistens den Arbeitsaufwand erheblich unterschätzt und außerdem unbedingt eine Sicherheitsreserve benötigt. Man ahnt nicht, was alles dazwischen kommt.

--------------------------------- ▷ 112

30

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

2. Schritt: Wir ermitteln die Werte für $x = 0$:

$$f(0) = \ln(1+0) = 0 \qquad f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$
$$f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1 \qquad f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$$

3. Schritt: Einsetzen in die Formel für die Potenzreihenentwicklung.

$$f(x) = \ln(1+x) \approx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ 31

71

$$g(u) = e^{u+1} = e + \frac{e}{1!}u + \frac{e}{2!}u^2 + \frac{e}{3!}u^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Stimmt Ihr Ergebnis hiermit überein?

Ja ▷ 73

Nein ▷ 72

112

Anhand des geschätzten Zeitaufwandes wird man einen schriftlichen Studienplan für die Prüfungsvorbereitung aufstellen. Er dient dazu, den Lehrstoff richtig auf die zur Verfügung stehende Zeit zu verteilen. Viel schwieriger als das Aufstellen des Studienplans ist es, ihn halbwegs einzuhalten. Denn je weiter ein Ereignis (z.B. Prüfung) zeitlich entfernt ist, desto weniger ernst wird es genommen. Anhand des Plans läßt sich aber kontrollieren, inwieweit „Ist-Zustand" und „Soll-Zustand" jeweils übereinstimmen.

Wie soll nun die Prüfungsvorbereitung aussehen?

▷ 113

31

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Bezeichnungswechsel:

ln (1+v) = ...

--------------------------------- ▷ 32

72

Rechengang: Die Ableitungen der Funktion $g(u) = e^{u+1}$ lauten:

$$g'(u) = g''(u) = , \cdots , = g^{(n)}(u) = e^{u+1} .$$

Somit gilt: $g'(0) = g''(0) = , \cdots , = g^{(n)}(u) = e^1 = e$

Setzt man diese Werte in die allgemeine Formel für die Taylorreihen ein, ergibt sich:

$$g(u) = e^{u+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(u)}{n!} u^n$$

$$= e + \frac{e}{1!} u + \frac{e}{2!} u^2 + \frac{e}{3!} u^3 + \cdots$$

--------------------------------- ▷ 73

113

Wir setzen voraus, daß ein Exzerpt des Lehrgangs oder des Lehrbuchs vorliegt. Dann kann kapitelweise wiederholt werden.

1. Schritt: aktive Reproduktion.
2. Schritt: Kontrolle anhand des Exzerptes.
3. Schritt: Lösung von Übungsaufgaben und Problemen.
4. Schritt: Eventuelle Vertiefung einzelner Gebiete.

Eine günstige Arbeitstechnik ist die gemeinsame Vorbereitung in einer kleineren Gruppe. Die Verbalisierung von Begriffsbedeutungen und Zusammenhängen festigt das aktive Wissen.

Die nächsthöhere Stufe ist die Lösung von Aufgaben- und Fragesammlungen.

Die Arbeit in einer Gruppe erlaubt Ihnen u.a. eine Einschätzng Ihres Wissensstandes im Vergleich zu den anderen Kommilitonen in Ihrer Gruppe.

--------------------------------- ▷ 114

32

$\ln(1+v) \approx v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3}$ - ....

....

Und nun weiter.

Alles o.k.?

--------------------------------- ▷ 33

73

Die Taylorreihe der Funktion $g(u) = e^{u+1}$ im Punkte $u = 0$ lautete:

$e^{u+1} = e + \frac{e}{1!}u + \frac{e}{2!}u^2 + \frac{e}{3!}u^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Damit haben wir eine Potenzreihe für u. Wir wollen aber eine Potenzreihe für x.

Rücksubstitution:

Wir können nun mit $u = x - 1$ die Variable u eliminieren und durch x ersetzen.

$f(x) = e^x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 74

114

Mindestanforderung: Kenntnis der vermittelten Begriffe und Zusammenhänge.

Dies sind Voraussetzungen für eine Vertiefung des angebotenen Stoffgebietes.

Fähigkeiten zur Darstellung und Lösung von Problemen, das Aufzeigen von Parallelen zu anderen Fachbereichen bringen überdurchschnittliche Ergebnisse – für Sie selbst und in der Bewertung Ihrer Leistung durch den Prüfer.

--------------------------------- ▷ 115

33

Gegeben sei $g(u) = \sin u$

Allgemeine Form der Taylorreihe

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{}{\ldots\ldots\ldots}$$

$\sin u = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 34

74

$$f(x) = e^x = e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \cdots$$

Dies ist die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Erläuterung der Rechnung -------------------------------- ▷ 75

Weiter -------------------------------- ▷ 76

115

Integration über Potenzreihenentwicklung

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 7.6.2 Integration über Potenzreihenentwicklung
Lehrbuch, Seite 177 - 178

BEARBEITEN SIE danach -------------------------------- ▷ 116

34

$$g(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}u^n$$

$$\sin u = u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 35

75

Die Taylorentwicklung für $g(u)=e^{u+1}$ lautete

$$e^{u+1}=e+\frac{e}{1!}u+\frac{e}{2!}u^2+\frac{e}{3!}u^3+$$

Wir ersetzen in dieser Darstellung jeweils u durch $(x-1)$ und erhalten

$$e^x=e+\frac{e}{1!}(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+\frac{e}{3!}(x-1)^3+\cdots$$

Wir haben hier die Funktion e^x nach Potenzen von $(x - 1)$ entwickelt, d.h. die Reihe ist die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x = 1$.

--------------------------------- ▷ 76

116

Integrieren Sie über eine Potenzreihenentwicklung, indem Sie die 2. Näherung benutzen:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}\approx\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 117

35

Die Potenzreihe, die bei der Entwicklung einer Funktion entsteht, konvergiert nicht immer für alle x-Werte. Der Konvergenzbereich der Reihe läßt sich ermitteln – zwei Beispiele sind in der Anmerkung 1 im Lehrbuch auf Seite 168 angegeben.

Die sehr wichtigen Reihen für e^x, e^{-x}, $\sin x$, $\cos x$ konvergieren für beliebig große x.

Hier wird ein weiteres Beispiel ausführlich durchgerechnet. Sie können es überschlagen, denn praktisch werden Sie die Rechnung später nicht benötigen.

Beispiel --------------------------------- ▷ 36

Will weiter --------------------------------- ▷ 39

76

Die Substitution $u = x - 1$ hat eine geometrische Bedeutung: Verschiebung des Koordinatensystems. Entscheiden Sie selbst, ob Sie diese geometrische Bedeutung interessiert.

Will weiter --------------------------------- ▷ 78

Geometrische Bedeutung der Substitution $u = x - 1$ --------------------------------- ▷ 77

117

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \approx x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + C$$

Haben Sie dies Ergebnis?

Ja --------------------------------- ▷ 120

Nein --------------------------------- ▷ 118

36

Der Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihe soll bestimmt werden.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \;\cdots\cdots\; \pm \frac{x^n}{n} \cdots$$

Diese Reihe konvergiert für alle x, die der Ungleichung genügen. $x < R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

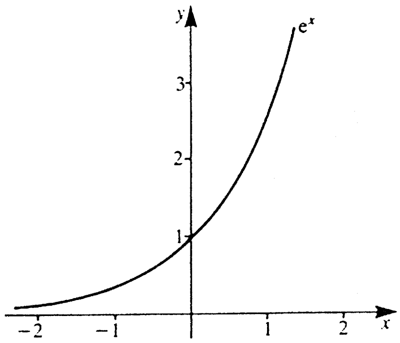
(Anmerkung Lehrbuch, Seite 168)

Berechnen Sie zunächst den Betrag des Quotienten der Koeffizienten dieser Reihe:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 37

77



Gegeben war die Funktion $f(x) = e^x$. Diese sollte im Punkte $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe entwickelt werden. Zu diesem Zwecke führten wir die Hilfsvariable $u = x - 1$ ein. Dies bedeutet geometrisch den Übergang zu einem u-y-Koordinatensystem, das in Richtung der positiven x-Achse um eine Einheit gegen das x-y-System verschoben ist. Die neue Koordinate u hat damit an der Stelle $x_0 = 1$ den Wert $u = 0$.

Zeichnen Sie links das verschobene Koordinatensystem ein.

-------------------------------- ▷ 78

118

Rechengang: Die Näherung für die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ lautete: $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2$

Integrieren wir beide Seiten dieser Gleichung, erhalten wir:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \approx \int \left(1 - \tfrac{x}{2} + \tfrac{3}{8}x^2\right)\, dx = x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + C$$

Geben Sie nach demselben Verfahren eine Näherung des Integrals $\int \frac{dx}{1-x^2}$ an.

Approximieren Sie die Funktion $\frac{1}{1-x^2}$ anhand der Tabelle durch die 2. Näherung.

$\frac{1}{1-x^2} \approx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{1-x^2} \approx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 119

$\boxed{37}$

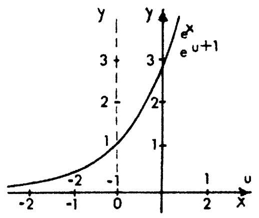
$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n}$$

Bestimmen Sie nun den Grenzwert des obigen Ausdrucks für $n \to \infty$!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---------------------------------- ▷ 38

$\boxed{78}$



Bei der Verschiebung des Koordinatensystems geht die Funktion $f(x) = e^x$ über in die Funktion $g(u) = e^{u+1}$. Diese hat z.B. an der Stelle $u = 0$ den Wert $g(0) = e$. Bezüglich des x-y-Koordinatensystems drückt sich dieser Sachverhalt wie folgt aus: $f(1) = e$

Es gilt also: $f(x) = e^x = g(u) = e^{u+1}$. Die Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ ist dann identisch mit der Entwicklung der Funktion $g(u)$ an der Stelle $u_0 = 0$.

---------------------------------- ▷ 79

$\boxed{119}$

$$\frac{1}{1-x^2} \approx 1 - x^2 + x^4$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} \approx \int (1 + x^2 + x^4)\ dx$$

$$= \int dx + \int x^2 dx + \int x^4 dx$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + C$$

---------------------------------- ▷ 120

38

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

Damit haben wir den Konvergenzbereich der Taylorreihe der Funktion ln $(1+x)$ bestimmt.

$$x < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

Die Reihe konvergiert also im Bereich $-1 < x < 1$.

Über das Verhalten der Reihe in den Endpunkten des Konvergenzbereichs sagt das Konvergenzkriterium nichts aus. Hier kann die Reihe nämlich divergieren oder konvergieren.

Die Reihe *konvergiert* für $x = 1$

Die Reihe *divergiert* für $x = -1$

Im letzten Fall erhalten wir die *harmonische Reihe.* -------------------------------- ▷ 39

79

Wir wollen nun noch ein Beispiel zur Taylorreihenentwicklung an einer Stelle $x_0 \neq 0$ rechnen, und dabei direkt die Formel auf Seite 173 benützen.

Die Funktion $f(x)$ soll an der Stelle $x_0 \neq 0$ in eine Taylorreihe entwickelt werden. Welche Form hat dann diese Reihe?

Schauen Sie im Zweifel im Lehrbuch nach.

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-------------------------------- ▷ 80

120

Zum Abschluß noch ein vertrautes Beispiel:

Die Taylorentwicklung der Funktion $y = e^x$ lautet:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Berechnen Sie $\int e^x dx$ über diese Reihenentwicklung und vergleichen Sie die dabei entstehende Reihe mit der Ausgangsreihe

$$\int e^x dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

-------------------------------- ▷ 121

39

Weitere Aufgaben für das Entwickeln einer Funktion in eine Taylorreihe finden Sie im Lehrbuch auf Seite 179.

▷ 40

80

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

Setzt man in dieser Taylorentwicklung $x_0 = 0$, erhält man wieder die bislang betrachtete Form der Taylorreihe.

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin x$. Diese soll an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ in eine Taylorreihe bis zum Gliede $n = 4$ entwickelt werden. Welche Arbeitsschritte sind dazu erforderlich?

1. ....

2. ....

3. ....

▷ 81

121

$$\begin{aligned}\int e^x dx &= \int (1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \cdots\cdots)\, dx \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2!3} + \frac{x^4}{3!4} + \frac{x^5}{4!5} + \cdots\cdots + C^* \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots + C^*\end{aligned}$$

Vergleichen wir mit dem erwarteten Ergebnis:

$$\int e^x dx = \int e^x dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots + C$$

Beide Ergebnisse sind identisch, wenn wir für die beliebig wählbaren Integrationskonstanten setzen: $C^* = C + 1$

▷ 122

40

Es folgen jetzt Hinweise über die zweckmäßige Wiederholung von Lerninhalten. Diese Hinweise gelten allgemein – nicht nur für das Studium der Mathematik. Dabei werden zuerst experimentelle Befunde über das Behalten von verschiedenen Sachverhalten mitgeteilt.

Wiederholungstechniken ---------------------------------- ▷ 41

Wiederholungstechniken bekannt, will mit den Potenzreihen fortfahren ------------ ▷ 50*

---------------------------------- ▷ 50

81

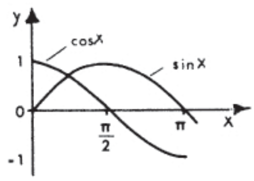
1. Wir bilden die Ableitungen 2. Wir ermitteln die Werte der Ableitungen für $x_0 = \frac{\pi}{2}$

3. Wir setzen die Werte $f'(\frac{\pi}{2}), \cdots, f^{(4)}(\frac{\pi}{2})$ in die Formel ein: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{2})}{n!}(x-\frac{\pi}{2})^n$

Die ersten Ableitungen der Funktion $f(x) = \sin x$ lauten:

$f'(x) = \cos x$ $\quad f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos$ $\quad f^4(x) = \sin x$



Berechnen Sie die Werte der Ableitungen an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$

$f'(\frac{\pi}{2}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad f''(\frac{\pi}{2}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$f'''(\frac{\pi}{2}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad f^4(\frac{\pi}{2}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

---------------------------------- ▷ 82

122

Weitere Aufgaben finden Sie auf Seite 179 des Lehrbuches. Vor Prüfungen oder Klausuren sollten Sie diese Aufgaben zu rechnen versuchen.

---------------------------------- ▷ 123

41

Gedächtnisexperimente wurden zuerst von Ebbinghaus 1885 durchgeführt.

Zunächst wird ein Gedächtnisinhalt eingelernt (sinnlose Silben, Zahlenreihen, Begriffe, Definitionen oder mathematische Aussagen).
Nach einer Zeitspanne wird dann untersucht, wie weit die Gedächtnisinhalte noch vorhanden sind. Dabei lassen sich folgende Methoden unterscheiden.

Freie Reproduktion: Die Versuchsperson muß ohne Hilfe frei reproduzieren, was sie behalten hat.
Wiederlernen: Es wird die Zeit gemessen, die die Versuchsperson braucht, um den Lernstoff wieder neu zu lernen. Diese Lernzeit liegt zwischen 0 und der ursprünglichen Lernzeit.
Wiedererkennung: Hier wird gemessen, welcher Prozentsatz des ursprünglichen Gedächtsnismaterials wiedererkannt wird.

--------------------------------- ▷ 42

82

$f(\frac{\pi}{2}) = 1$ $\quad f'(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad f''(\frac{\pi}{2}) = -1$

$\quad f'''(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad f^{(4)}(\frac{\pi}{2}) = 1$

Setzen Sie nun diese Werte in die Formel ein:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{2})}{n!}(x-\frac{\pi}{2})^n$$

$f(x) = \sin x = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

--------------------------------- ▷ 83

123

Sie haben das 

des Kapitels erreicht.