0

Kapitel 10

Wahrscheinlichkeitsrechnung

1

Einleitung

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 10.1 Einleitung
Lehrbuch, Seite 236

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 2

27

Allgemeine Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 10.2.4 Allgemeine Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten
Lehrbuch, Seite 241 - 242

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 28

53

4 Personen können auf 4! = 24 verschiedene Arten auf die 4 Stühle verteilt werden.

....

Gegeben seien N Elemente. Davon seien N_A gleich. Wir interessieren uns für die Veränderung der Permutationen, wenn die Zahl der gleichen Elemente geändert wird.

Bei Fragestellung dieser Art ist es oft gut, zunächst den qualitativen Zusammenhang durch eine Plausibilitätsbetrachtung zu erschließen.

Gegeben seien N Elemente. Wenn die Zahl der *gleichen* Elemente *zunimmt*, nimmt die Zahl der Permutationen:

☐ ab -------------------------------- ▷ 57

☐ zu -------------------------------- ▷ 54

2

Nennen Sie, ohne in den Lehrtext zu sehen, je drei

a) makroskopische Größen

....

....

....

b) mikroskopische Größen

....

....

....

-------------------------------- ▷ 3

28

In einem Kasten liegen neun weiße Kugeln.

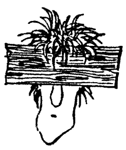
Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel herauszuziehen ist $p_{\text{weiß}}$ = ...

Die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel herauszuziehen ist p_{blau} = ...

-------------------------------- ▷ 29

54

NICHT DOCH!



Überlegen wir es anders:

Gegeben sei eine Anordnung von N Elementen. Davon seien einige Elemente *gleich.* Jetzt vertauschen wir zwei gleiche Elemente. Gibt das eine neue Anordnung?

☐ Ja -------------------------------- ▷ 55

☐ Nein -------------------------------- ▷ 57

3

Makroskopische Größen beschreiben das Gesamtsystem:

Druck
Volumen
Temperatur
Elektrische Wärmeleitfähigkeit
Magnetisierung

Mikroskopische Größen beschreiben die Eigenschaften der Einzelelemente des Systems

Ort eines Atoms
Impuls eines Atoms
Geschwindigkeit eines Atoms
Potentielle Energie eines Atoms
Kinetische Energie eines Atoms
Dipolmoment eines Moleküls

-------------------------------- ▷ 4

29

$p_{\text{weiß}} = 1$

$p_{\text{blau}} = 0$

....

$p = 1$ gilt für das .... Ereignis

$p = 0$ gilt für das .... Ereignis

-------------------------------- ▷ 30

55

Ihre Antwort ist leider wieder falsch. Wo liegt der Denkfehler?

Gegeben sei folgende Anordnung AAB.

Wir vertauschen die zwei ersten Elemente und erhalten

A A B.

A ist mit A vertauscht. Sehen Sie einen Unterschied zwischen

A A B und A A B?

-------------------------------- ▷ 56

4

Der spezifische Wiederstand eines Leiters ist eine

.... Größe

Die Schwingungsenergie eines Moleküls ist eine

.... Größe

-------------------------------- ▷ 5

30

$p = 1$: sicheres Ereignis
$p = 0$: unmögliches Ereignis

Das unmögliche Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 0.
Schreiben Sie die Normierungsbedingung in Worten und als Formel auf:

....

....

-------------------------------- ▷ 31

56

Wer auch immer hier einen Unterschied sieht, Mathematiker und Physiker sehen keinen.

Es macht keinen Unterschied, wenn in der Anordnung AAB die ersten beiden Elemente vertauscht werden.

Allgemein:

Es macht keinen Unterschied, wenn in einer Anordnung gleiche Elemente vertauscht werden.

-------------------------------- ▷ 57

5

Makroskopische Größe

Mikroskopische Größe

Der folgende Abschnitt im Lehrbuch enthält mehrere neue Begriffe. Teilen Sie sich den Abschnitt in zwei Teile ein und kontrollieren Sie nach jedem Teilabschnitt anhand Ihrer Aufzeichnungen, ob Sie die neuen Begriffe noch kennen.

Im übrigen: „reading without a pencil is daydreaming". Das ist Ihnen nicht neu. Es ist schon mehrfach gesagt. Aber es ist in der Tat ein nützlicher Hinweis, nahezu ein Geheimtip.

Die Anleitungen durch das Leitprogramm werden in Zukunft immer mehr abnehmen. Mit Hilfe der beschriebenen und praktizierten Lerntechniken sollten Sie immer mehr die Kontrolle über Ihr Studienverhalten selbst übernehmen.

-------------------------------- ▷ 6

31

Normierungsbedingung in Worten: Bezogen auf die Ereignisse eines definierten Ereignisraumes ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten EINS.

Normierungsbedingung: $\sum_{i=1}^{k} p_i = 0$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus einem Skatspiel Kreuz-Bube ODER Karo-König ODER Pik-Dame zu ziehen?

$p =$ ....

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 33

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 32

57

Die Zahl der Permutationen nimmt *ab*, wenn die Zahl der gleichen Elemente zunimmt.

Durch Vertauschung gleicher Elemente bekommen wir KEINE neue Anordnung. Je *mehr* gleiche Elemente es gibt, desto *geringer* ist die Zahl der verschiedenen Anordnungen.

Wieviele Anordnungen gibt es bei 5 Elementen, die alle gleich sind?

....

-------------------------------- ▷ 58

6

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 10.2.1 Ereignis, Ergebnis, Zufallsexperiment
10.2.2 Die „klassische“ Definition der Wahrscheinlichkeit
10.2.3 Die „statistische“ Definitionen der Wahrscheinlichkeit
Lehrbuch, Seite 237-241

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 7

32

Die Wahrscheinlichkeit, einen Kreuz-Buben zu ziehen ist $\frac{1}{32}$.

Die Wahrscheinlichkeit Karo-König zu ziehen ist $\frac{1}{32}$.

Die Wahrscheinlichkeit Pik-Dame zu ziehen ist $\frac{1}{32}$.

Nach dem Additionstheorem ist die Wahrscheinlichkeit, die eine ODER die andere ODER die dritte Karte zu ziehen gleich

$$p = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

--------------------------------- ▷ 33

58

Genau eine.

Wieviele verschiedene Anordnungen gibt es bei den 5 Elementen a a b b c?

Anordnungen, die durch eine Vertauschung der beiden Elemente *a* oder *b* untereinander entstehen, sehen wir als gleich an.

Es gibt .... verschiedene Anordnungen der 5 Elemente.

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 60

Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 59

$\boxed{7}$

Wie haben Sie den Abschnitt bearbeitet?

☐ in einem Zug

☐ in zwei Abschnitten

☐ in drei Abschnitten

--------------------------------- ▷ 8

$\boxed{33}$

$\frac{3}{32}$

....

Eine Urne enthält zwölf Kugeln.
6 rote
4 weiße
1 grüne
1 schwarze

Die Wahrscheinlichkeit entweder eine weiß ODER eine grüne Kugel zu greifen ist

$p =$ ....

Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 35

Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 34

$\boxed{59}$

Wir haben 5 Elemente: *a a b b c*. Es gibt $5! = 120$ Permutationen. Davon gibt es viele, die sich nur dadurch unterscheiden, daß die Elemente *a* oder die Elemente *b* jeweils untereinander vertauscht sind. Diese Permutationen wollten wir aber als gleich ansehen.

Also, wieviele verschiedene Anordnungen der Elemente *a a b b c* gibt es?

....

Im Zweifel sollten Sie Ihre Aufzeichnungen oder das Lehrbuch noch einmal zu Rate ziehen.

--------------------------------- ▷ 60

8

Fragen der Arbeitseinteilung sind persönlichkeitsabhängig und abhängig von der jeweiligen Konzentrationsfähigkeit. Wichtig ist nur eins: Vermeiden Sie zu große Arbeitsabschnitte, wenn Sie merken, daß die Konzentration beim Exzerpieren und schriftlichen Mitrechnen nachläßt. Aber geben Sie der Neigung nie nach, bei Unlustgefühlen sofort aufzuhören. Reduzieren Sie dann den Arbeitsabschnitt, setzen Sie sich ein geringeres Zwischenziel – vielleicht noch 10 Lehrschritte – aber halten Sie bis dahin durch.

Dann beenden Sie die Arbeitsphase nämlich mit einem persönlichen Erfolg. Und langsam werden Sie so unabhängiger von ihren Unlustgefühlen.

-------------------------------- ▷ 9

34

Betrachten Sie folgenden Fall:
Es gibt 6 Lose. Darunter sind 2 Hauptgewinne
2 Trostpreise
2 Nieten

Wahrscheinlichkeit für Haupttreffer $p_H = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Wahrscheinlichkeit für Trostpreis $p_T = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Nach dem Additionstheorem ist die Wahrscheinlichkeit für die disjunkten Ereignisse Haupttreffer ODER Trostpreis: $p_H + p_T = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Lösen Sie die folgende Aufgabe analog zu dem Fall oben.
Eine Urne enthält 12 Kugeln: 6 rote, 4 weiße, 1 grüne, 1 schwarze
Die Wahrscheinlichkeit, entweder eine weiße ODER eine grüne Kugel zu greifen ist

p = ...

-------------------------------- ▷ 35

60

Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen ist:

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$

-------------------------------- ▷ 61

9

Ein Schüler soll sich aus fünf Büchern (A, B, C, D, E) drei beliebige heraussuchen. Geben sie den Ereignisraum an.

....

....

....

-------------------------------- ▷ 10

35

$\frac{5}{12}$

....

Das war eine Anwendung des Additionstheorems. Es ist anwendbar, wenn nach der Wahrscheinlichkeit eines ODER eines zweiten disjunkten Ereignisses gefragt wird.

Das Additionstheorem läßt sich im übrigen erweitern auf eine beliebige Zahl disjunkter Ereignisse, für die allerdings die Normierungsbedingung erfüllt sein muß.

-------------------------------- ▷ 36

61

Kombinationen

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 10.3.2 Kombinationen
Lehrbuch, Seite 248 - 249

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 62

10

ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE,
BCD, BCE, BDE, CDE

Schreiben Sie die „klassische" Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A auf:

$P_A =$ ....

--------------------------------- ▷ 11

36

Wahrscheinlichkeit für Verbundereignisse

Auch bei diesem Abschnitt sollten sie exzerpieren.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 10.2.5 Wahrscheinlichkeit für Verbundereignisse
Lehrbuch, Seite 243 - 245

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 37

62

a) Was ist eine Kombination der Klasse k von n Elementen?
....
....

b) Wie ist der Binomialkoeffizient definiert?
$\binom{n}{k} =$ ....

--------------------------------- ▷ 63

11

$$P_A = \frac{\text{Zahl } N_A \text{ d. Realisierungsmöglichkeit f.d. Ereignis } A}{\text{Gesamtzahl der möglichen Ereignisse}} = \frac{N_A}{N}$$

Die Formel bezieht sich auf folgende Situation: Ein Experiment habe N gleichwahrscheinliche Elementarereignisse. N_A Elementarereignisse gehören zum Ereignis A.

....

In einem Kasten liegen sechs Kugeln: 3 schwarze
2 grüne
1 gelbe

Wenn eine Kugel herausgenommen wird, ist das ein

.... oder ....

-------------------------------- ▷ 12

37

Schreiben Sie stichpunktartig die Definitionen auf für

a) Verbundwahrscheinlichkeit

....

....

b) Statistisch unabhängige Ereignisse

....

....

-------------------------------- ▷ 38

63

a) Jede Gruppe von k Elementen, die aus einer Menge von n Elementen gebildet wird, heißt Kombination der Klasse k von n Elementen.
Hinweis: Kombinationen, die sich nur durch eine Permutation der k Elemente unterscheiden, werden als gleich angesehen.

b) $$\binom{n}{k} = \frac{n}{(n-k)!\,k!}$$

Haben Sie die Definiton sinngemäß getroffen?

Falls nicht: Sie haben ja bereits gelernt, wie eine Definition eingeübt wird.
Definitionen aus dem Gedächtnis hinschreiben und kritisch kontrollieren, ob sie *sinngemäß* richtig ist.

-------------------------------- ▷ 64

12

Elementarereignis oder Zufallsexperiment

In einem Kasten liegen sechs Kugeln: 3 schwarze
2 grüne
1 weiße

Eine Kugel wird herausgenommen.

Es gibt .... Elementarereignisse und .... Ereignisse

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 14

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 13

38

a) Verbundwahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Auftreten zweier (oder mehrerer) Ereignisse.

b) Statistisch unabhängige Ereignisse: Wenn die Ereignisse einer Gruppe A nicht beeinflußt werden von dem Auftreten der Ereignisse einer Gruppe B, dann sind die Ereignisse voneinander statistisch unabhängig.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, bei einem Wurf mit zwei Würfeln zwölf Augen zu erhalten?

p = ...

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 40

Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 39

64

Berechnen Sie

a) $\binom{3}{2}=$ ....

b) $\binom{5}{3}=$ ....

c) $\binom{5}{5}=$ ....

d) $\binom{4}{1}=$ ....

Aufgaben gelöst -------------------------------- ▷ 67

Hinweise und Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 65

13

Wir müssen die Begriffe *Elementarereignis* und *Ereignis* scharf voneinander unterscheiden. Es gibt sechs Kugeln: 3 schwarze, 2 grüne, 1 weiße.

Wir legen die Kugeln nebeneinander hin.

$$\underbrace{1\ 2\ 3}_{\text{schwarz}} \qquad \underbrace{4\ \ 5}_{\text{grün}} \qquad \underbrace{6}_{\text{weiß}}$$

Jede einzelne Kugel kann gezogen werden. Das ist je ein Elementarereignis.

Die Kugeln 1, 2, 3 sind schwarz. Wenn eine der drei schwarzen Kugeln gezogen wird, ist das hinsichtlich der Farbe gleichwertig. Diese drei *Elementarereignisse* können zum *Ereignis* „Kugel, schwarz" zusammengefaßt werden.

Es gibt hier also bei den sechs Kugeln .... Elementarereignisse und .... Ereignisse.

------------------------------- ▷ 14

39

Das Problem war: Die Wahrscheinlichkeit dafür zu finden, mit zwei Würfeln zwölf Augen zu werfen. Die Ereignisse sind statistisch unabhängig voneinander.

Die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Würfel 6 zeigt, ist $p_1 =$ ....

Die Wahrscheinlichkeit, daß der zweite Würfel 6 zeigt, ist $p_2 =$ ....

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide Ereignisse eintreten, ist $p_{1,2} =$ ....

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
mit zwei Würfeln zwei Augen zu werfen? $p =$ ....

Im Zweifel die Aufgabe anhand des Lehrbuchs lösen.

------------------------------- ▷ 40

65

Schauen Sie sich die Definition des Ausdrucks $\binom{n}{m}$ im Lehrbuch noch einmal an.

Hinweis: Lassen Sie sich nicht von der Substitution n, m in N, N_1 verwirren.

Rechnen Sie nun: a) $\binom{6}{5} =$ ....

b) $\binom{3}{1} =$ ....

c) $\binom{4}{2} =$ ....

------------------------------- ▷ 66

14

Sechs Elementarereignisse und drei Ereignisse

Wir haben eine Urne mit zwölf Kugeln: 6 roten
3 grünen
2 weißen
1 schwarze

Es wird eine Kugel gezogen.
Zahl der „Elementarereignisse" ....
Zahl der „Ereignisse" ....
Hinweis: Bei Zweifeln im Lehrbuch, Seite 238 nachsehen.

-------------------------------- ▷ 15

40

$p = \frac{1}{36}$

Rechnen Sie noch folgende Aufgabe:
Eine Münze wird zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß jedesmal die Zahlseite oben liegt?

$p_{z,z} =$ ....

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 42
Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 41

66

a) $\binom{6}{5} = \frac{6}{(6-5)!5!} = \frac{6!}{1!\cdot 5!} = 6$ b) $\binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!1!} = 3$

c) $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$

Berechnen Sie nun a) $\binom{3}{2} =$ .... c) $\binom{5}{5} =$ ....

b) $\binom{5}{3} =$ .... d) $\binom{4}{1} =$ ....

Bei Schwierigkeiten die Aufgaben anhand des Lehrbuches, Abschnitt 10.3.2, lösen.

-------------------------------- ▷ 67

15

12
4

....

Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten. Es gibt vier „Könige“: Kreuz, Pik, Herz, Karo.
Die Wahrscheinlichkeit aus dem gemischten Kartenspiel den „Kreuz-König“ zu ziehen ist:

$p_1 =$ ....

Die Wahrscheinlichkeit, einen „König“ zu ziehen, ist

$p_2 =$ ....

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 17
Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 16

41

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Münzwurf die „Zahlseite“ zu erhalten, ist $\frac{1}{2}$

Die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Würfen jedesmal die „Zahl“ zu bekommen, ist auf jeden Fall kleiner als $\frac{1}{2}$.

Es gilt für die Verbundwahrscheinlichkeit zweier statistisch unabhängiger Ereignisse

$p_{AB} = p_A \cdot p_B$

Also

$p_{z,z} =$ ....

-------------------------------- ▷ 42

67

a) $\binom{3}{2} = 3$ b) $\binom{5}{3} = 10$

c) $\binom{5}{5} = 1$ d) $\binom{4}{1} = 4$

....

Aus 5 verschiedenen Elementen sollen 3er Gruppen gebildet werden.
Wieviel verschiedene 3er Gruppen gibt es? ....

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 70
Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 68

16

Unter den 32 Karten gibt es nur einen Kreuz-König.

Zahl der günstigen Elementarereignisse = 1

Zahl der möglichen Elementarereignisse = 32

Also ist die Wahrscheinlichkeit, den Kreuz-König zu ziehen: p_1 = ...

Unter den 32 Karten gibt es vier Könige.

Zahl der günstigen Elementarereignisse = 4

Zahl der möglichen Elementarereignisse = 32

Die Wahrscheinlichkeit, einen König zu ziehen, ist: p_2 = ...

--------------------------------- ▷ 17

42

$\frac{1}{4}$

In einem Kasten befinden sich achtzehn Kugeln. Davon sind

5 gelb
4 schwarz
7 grün
2 weiß

Wird eine Kugel gezogen, gibt es

.... Elementarereignisse

.... Ereignisse gleicher Farbe

--------------------------------- ▷ 43

68

Einfacheres Beispiel: Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge von 3 verschiedenen Elementen Gruppen von je zwei Elementen zu bilden?

1. Ermitteln Sie diese Zahl dadurch, daß Sie alle Zweier-Gruppen für die drei Elemente *a, b, c* bilden.

   ....

   Zahl der Möglichkeiten

   ....

2. Ermitteln Sie diese Zahl durch Rechnung.

   ....

--------------------------------- ▷ 69

17

$$p_1 = \frac{1}{32}$$

$$p_2 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Acht verdeckte Karten liegen auf dem Tisch. Wir wissen, daß es vier verschiedene Buben und vier verschiedene Damen sind.

Die Wahrscheinlichkeit, Herz-Dame zu ziehen, ist $p_1 =$ ....

Die Wahrscheinlichkeit einen Buben zu ziehen ist $p_2 =$ ....

-------------------------------- ▷ 18

43

18 Elementarereignisse
4 Ereignisse für gleiche Farbe

In einem Kasten befinden sich achtzehn Kugeln
5 gelb
4 schwarze
7 grüne
2 weiße

Jetzt wird dreimal nacheinander eine Kugel gegriffen und zurückgelegt.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Verbundereignis 1 schwarze UND 1 grüne UND 1 weiße Kugel. $p_{sgw} =$ ....
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Verbundereignis 1 gelbe UND 1 schwarze UND 1 grüne Kugel. $p_{gsg} =$ ....

-------------------------------- ▷ 44

69

1. Die Zweiergruppen für die drei Elemente *a, b, c* sind
   ab, *ac*, *bc* Möglichkeiten: 3
2. Rechnung: Es gibt $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten also $\frac{3!}{2!1!} = 3$ Möglichkeiten.

Rechnen Sie nun die ursprüngliche Aufgabe.
Aus 5 verschiedenen Elementen sollen Dreiergruppen gebildet werden. Wieviele verschiedene Dreiergruppen gibt es ?

....

-------------------------------- ▷ 70

18

$p_1 = \frac{1}{8} \qquad p_2 = \frac{1}{2}$

Rekapitulieren Sie den Rechengang, um die klassische Wahrscheinlichkeit zu berechnen:

1. „günstige" Elementarereignisse ermitteln (N_A)
2. mögliche Elementarereignisse ermitteln (N)

$p_A =$ ....

▷ 19

44

a) $p_{sgw} = \frac{4}{18} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{2}{18} = \frac{7}{9^3} = 0{,}01$

b) $p_{gsg} = \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{7}{18} = \frac{35}{2 \cdot 9^3} = \frac{35}{1458} = 0{,}024$

▷ 45

70

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$

Ein Verein hat 20 Mitglieder. Der Vorstand dieses Vereins wird von 5 Mitgliedern gebildet. Wieviele Möglichkeiten gibt es, den Vorstand zu bilden?

▷ 71

19

$p_A = \frac{N_A}{N}$

....

In einer Schublade liegen zehn Hemden. Bei drei Hemden fehlt der Kragenknopf.
Morgens wird im Dunkeln und in Eile ein Hemd gegriffen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eines *mit* Kragenknopf zu erwischen?

$p_{\text{mit}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines *ohne* Knopf zu erwischen?

$p_{\text{ohne}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

------------------------------- ▷ 20

45

Abzählmethoden

Permutationen

Schreiben Sie die neuen Begriffe und Regeln heraus und rechnen Sie die Beispiele mit!
Mitrechnen macht mit den Ableitungen vertraut und gibt Sicherheit.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 10.3 Abzählmethoden
10.3.1 Permutationen
Lehrbuch, Seite 246 - 247

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ------------------------------- ▷ 46

71

Es gibt $\binom{20}{5}$ Möglichkeiten, aus 20 Personen einen 5-köpfigen Vorstand zu bilden.

$$\binom{20}{5} = \frac{20!}{15!5!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15\,504$$

....

Damit hätten Sie Kapitel 10 durchgearbeitet und sich eine Belohnung verdient.

Falls Sie ein Problem aus der Parapsychologie bearbeiten wollen ------------------ ▷ 72

Sonst ------------------------------- ▷ 78

20

$p_{\text{mit}} = \frac{7}{10}$ $p_{\text{ohne}} = \frac{3}{10}$

Hinweis – nicht zu ernst nehmen – Der Schaden wird begrenzt, wenn man einen Schlips benutzt.

....

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Würfelwurf drei Augen zu werfen?

$p =$ ....

--------------------------------- ▷ 21

46

Fünf Freundinnen sitzen auf einer Bank in dieser Reihenfolge

Alwine
Berta
Chlothilde
Dora
Erna

Das ist eine mögliche Anordnung der fünf Freundinnen. Der Mathematiker nennt die Freundinnen kurz Elemente.

Eine mögliche Anorndung heißt: ....

--------------------------------- ▷ 47

72

Hier das Problem:*

Ein Parapsychologe unternimmt den Versuch, hellseherische Fähigkeiten zu identifizieren. Zu diesem Zweck stellt er einer Versammlung von 500 Menschen die Aufgabe, das Ergebnis eines Versuchs zu erraten. Hinter einem Wandschirm wird eine Münze 10mal geworfen. Die Reihenfolge der einzelnen Versuchsergebnisse – Kopf oder Zahl – soll von den Zuschauern geraten werden.

Als hellseherisch begabt gilt, wer höchstens einen Fehler in der Vorhersage macht.

Falls eine Person gefunden wird, die diese Bedingung erfüllt, kann man sagen sie sei hellseherisch begabt?

Sie können die Frage beantworten --------------------------------- ▷ 74
Sie möchten einen Hinweis --------------------------------- ▷ 73

* Frei nach Meschkowski: „Wahrscheinlichkeitsrechnung" Bibl. Institut Mannheim, 1968

21

$\frac{1}{6}$

Falls bisher keine Schwierigkeiten ---------------------------------- ▷ 24

Falls bisher noch Schwierigkeiten, weiter üben ---------------------------------- ▷ 22

47

Permutation

Geben Sie alle Permutationen der drei Elemente x, y, z an.

....

....

---------------------------------- ▷ 48

73

Die Aufgabe läßt sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung lösen.

1. Hinweis: Sie müssen die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß in dem Auditorium *keine* Person die Bedingung erfüllt.
Sie können die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß eine bestimmte Person die Bedingung erfüllt.

Ein weiterer Hinweis ---------------------------------- ▷ 74

Weitere Hinweise nicht nötig ---------------------------------- ▷ 77

22

1. Ein Skatspiel besteht aus 16 roten und 16 schwarzen Karten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine schwarze Karte aus dem Stapel gezogen?

   $p_1 =$ ....

2. In einem Kasten befinden sich 20 Kugeln. Davon sind 16 blau und 4 grün. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Herausziehen einer blauen Kugel.

   $p_2 =$ ....

3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist beim Würfeln die Zahl der geworfenen Augen durch 3 teilbar?

   $p_3 =$ ....

-------------------------------- ▷ 23

48

xyz	yxz	zxy
xzy	yzx	zyx

Permutation ist eine ....

Anordnung von ....

Bei drei Elementen gibt es .... Permutationen.

-------------------------------- ▷ 49

74

2. Hinweis: Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu finden, daß keine der 500 Personen die Bedingung erfüllt, müssen Sie die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß eine *bestimmte* Person *mindestens* 9 Treffer erreicht.

Verwenden Sie die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

$p =$ ....

Ich habe noch Schwierigkeiten -------------------------------- ▷ 75

Ich möchte die Lösung vergleichen -------------------------------- ▷ 76

23

1. $p = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ 2. $p_{\text{blau}} = \frac{16}{20} = 0{,}8$ 3. $p = \frac{1}{3}$

Falls Sie noch Schwierigkeiten haben, bitte noch einmal den Abschnitt im Lehrbuch studieren.

--------------------------------- ▷ 24

49

Permutation ist eine *mögliche* Anordnung von *beliebigen Elementen.*
6

Das Symbol $N\,!$ heißt: ....

Das Symbol $N\,!$ bedeutet: $N\,! =$ ....

--------------------------------- ▷ 50

75

Zahl der möglichen Voraussagen für eine bestimmte Person $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2 = 2^{10} = 1024$
Zahl der günstigen Voraussagen 10 + 1 = 11. Begründung: Ein günstiger Fall liegt vor, wenn bei den 10 Vorhersagen nur ein Irrtum erfolgt.

Dieser Irrtum kann bei der 1., 2., ... 10. Zahl erfolgen. Das gibt 10 Fälle = $\binom{10}{1}$.

Ein günstiger Fall liegt auch vor, wenn kein Irrtum erfolgt. Das ergibt 1 Fall = $\binom{10}{0}$.

Damit ergibt sich: $p = \frac{11}{2^{10}} = \frac{11}{1024} = 0{,}011$
Die Wahrscheinlichkeit für eine Person, mehr als einen Fehler zu machen, ist dann $(1\text{-}p) = (1\text{-}0.011) = 0{,}989$. Die Wahrscheinlichkeit, daß alle 500 Personen mehr als einen Fehler machen, ist $(1\text{-}0{,}011)^{500} \approx 0{,}005$. D.h. daß mit großer Wahrscheinlichkeit (0,995) mindestens ein Anwesender die Bedingung – höchstens 1 Fehler – erfüllt. --------- ▷ 76

24

Ein Experiment werde 530mal durchgeführt. 50mal werde das Ergebnis A gemessen.

Die Größe $h_A = \frac{50}{530}$ heißt: ....

Sie geht für sehr große N über in die ....

Falls Sie nicht sofort antworten können. schauen Sie in die Stichworte, die Sie aus dem Lehrbuch gezogen haben. Hilft das nicht, Abschnitt 10.2.3 heranziehen.

-------------------------------- ▷ 25

50

$N!$ heißt *Fakultät*

$N! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (N-1) \cdot N$

Berechnen sie

$1! =$ ....

$2! =$ ....

$3! =$ ....

$4! =$ ....

$5! =$ ....

$6! =$ ....

-------------------------------- ▷ 51

76

Die Versuchanordnung ist zur Beantwortung der Fragestellung des Parapsychologen ungeeignet. Nach dem Zufallsgesetz ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens einer der Anwesenden die Bedingung erfüllt, p = 0,995. Hellseherische Fähigkeiten sind unnötig.

Begündung und Rechengang: Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person keinen oder einen Fehler macht ist

$$p = \frac{11}{2^{10}} = 0{,}011$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person mehr als einen Fehler macht ist

$$p = (1-0{,}011) = 0{,}989$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß alle 500 Personen mehr als einen Fehler machen, ist

$$(0{,}989)^{500} = 0{,}005$$

-------------------------------- ▷ 77

25

Relative Häufigkeit

Statistische Wahrscheinlichkeit

Welche Wahrscheinlichkeit läßt sich durch praktische Versuche bestimmen?

.... Wahrscheinlichkeit

Ein Mädchen langweilt sich auf einer Autofahrt und zählt die entgegenkommenden „Cabriolets“. Es stellt fest:

Von 144 Autos waren 8 Cabriolets.

Die relative Häufigkeit der Cabriolets beträgt

$h_{\text{Cabriolet}} =$ ....

▷ 26

51

$1! = 1$
$2! = 1 \cdot 2 = 2$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Fünf Freundinnen wollen sich auf eine Bank setzen: Alwine, Berta, Chlothilde, Dora, Erna

Wieviele Reihenfolgen gibt es?

Es gibt .... Reihenfolgen.

Jede Reihenfolge ist eine ....

▷ 52

77

Bei der Bearbeitung des Problems haben Sie praktisch wiederholt:

- Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit
- Additionstheorem der Wahrscheinlichkeit
- Verbundwahrscheinlichkeit für unabhängige Ereignisse
- Binomialkoeffizient

▷ 78

26

Statistische Wahrscheinlichkeit

$$h_{cabriolet} = \frac{8}{144} = \frac{1}{18}$$

Falls Sie eine ganze Weile konzentriert gearbeitet haben, können Sie ruhig eine Pause von ein paar Minuten einlegen.

--------------------------------- ▷ 27

52

120	Hinweis: Sehr gut, wenn Sie 120 herausbekommen haben.
Permutation	Die Anzahl der Permutationen von fünf Elementen ist gleich 5!
	$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

In einem Raum stehen 4 Stühle. Auf wieviel verschiedene Arten können 4 Personen diese Stühle besetzen?

....

Bei Schwierigkeiten das Lehrbuch oder Ihre Aufzeichnungen zu Rate ziehen.

--------------------------------- ▷ 53

78

Damit haben Sie das

des Kapitels erreicht!