0

Kapitel 11

Wahrscheinlichkeitsverteilung

1

Das Kapitel setzt die Kenntnis der im vorhergehenden Kapitel eingeführten Begriffe voraus.

Schreiben Sie fünf der wichtigsten Begriffe des vorhergehenden Kapitels 10 „Wahrscheinlichkeitsrechnung" auf.

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....
5. ....

-------------------------------- ▷ 2

23

$$p(z=8)=\binom{10}{8}\left(\tfrac{1}{4}\right)^8\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

$$=45\left(\tfrac{1}{4}\right)^8\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2=0{,}0004$$

....

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 80% richtige Lösungen zufällig zu erhalten ist dann bei 10 Aufgaben:

$$p(z\geq 8)=p(z=10)+p(z=9)+p(z=8)$$

$p(z\geq 8)=$ ....

-------------------------------- ▷ 24

45

$$\bar{x}=\frac{1}{3}$$

Rechengang:

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0\cdot dx+\int_{0}^{1}x\cdot 2(1-x)\cdot dx+\int_{1}^{\infty}x\cdot 0\cdot dx$$

$$=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

-------------------------------- ▷ 46

2

Auf Ihrem Zettel könnte stehen:

1. Wahrscheinlichkeit, klassische Definition
2. Wahrscheinlichkeit, statistische Definition
3. Verbundwahrscheinlichkeit
4. Permutation
5. Binomialkoeffizient

Können Sie für diese Begriffe noch die Definition und die Formel aus dem Gedächtnis angeben?

Notieren Sie diese auf einem Zettel.

--------------------------------- ▷ 3

24

$p = (z \geq 8) = 0{,}0004$

Die Wahrscheinlichkeit, zufällig mindestens 80% richtige Lösungen zu erhalten, ist beklagenswert gering: sie beträgt 0,0004, also weniger als 0,001!

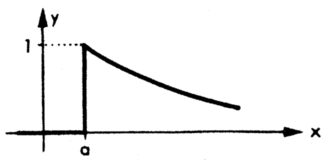
Es ist wirklich empfehlenswerter, vor einem Test zu studieren.

--------------------------------- ▷ 25

46

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & \text{für } a \leq x \leq \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Ist die Normierungsbedingung erfüllt?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

☐ Nein → Berechnen Sie den Normierungsfaktor

☐ Ja → Geben Sie den Mittelwert an

$\bar{x} =$ ....

--------------------------------- ▷ 47

3

1. Wahrscheinlichkeit, klassische Definition:

$P_A = \frac{N_A}{N}$ mit: N_A = Zahl der Elementarereignisse des Ereignisses A

N = Gesamtzahl der Elementarereignisse

2. Wahrscheinlichkeit, statistische Definition:

$P_A = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}$ mit N_A = empirische Häufigkeit des Auftretens von Ereignis A

N = Gesamtzahl der Versuche.

Die statistische Definition bezieht sich auf durchgeführte Messungen und die dadurch bestimmte relative Häufigkeit.

--------------------------------- ▷ 4

25

Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 11.1.2 Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen
Lehrbuch, Seite 253 - 256

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 26

47

Ja, die Normierungsbedingung ist erfüllt, der Normierungsfaktor ist 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} e^{-(x-a)}dx = \left[\,-e^{-(x-a)}\,\right]_a^{\infty} = 1$$

$\bar{x} = a + 1$

Rechengang: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} x\, e^{-(x-a)}dx$

Wir integrieren partielle und erhalten

$$\bar{x} = \left[\,-x\,e^{-(x-a)}\,\right]_a^{\infty} - \left[\,e^{-(x-a)}\,\right]_a^{\infty} = a + 1$$

Dieser Typ der Wahrscheinlichkeitsdichte trat bei der Bestimmung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Luftmoleküls in der Atmosphäre auf.

--------------------------------- ▷ 48

4

3. Verbundwahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit, daß zwei oder mehrere Ereignisse zusammen auftreten. Bei unabhängigen Ereignissen ist die Verbundwahrscheinlichkeit das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten.

$$P_{AB} = P_A \cdot P_B$$

4. Permutation: Mögliche Anordnung von Elementen.

   Fall A: Elemente alle verschieden: Zahl der Permutationen $= N!$

   Fall B: Elemente teilweise gleich: Zahl der Permutationen $= \dfrac{N!}{N_1!N_2!\ldots N_r!}$

5. Binomialkoeffizient: $\binom{N}{N_1} = \dfrac{N!}{N_1!(N-N_1)!}$

-------------------------------- ▷ 5

26

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsdichte für die kontinuierliche Zufallsvariable x:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die Zufallsvariable den Wert $x = 2$ hat.

Beachten Sie die Definition der Wahrscheinlichkeitsdichte!

$p(x = 2) =$ ....

-------------------------------- ▷ 27

48

Binomialverteilung und Normalverteilung

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 11.3 Binomialverteilung und Normalverteilung
Lehrbuch, Seite 258-260

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt -------------------------------- ▷ 49

5

Diskrete Wahrscheinlichkeitverteilung

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 11.1.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung
Lehrbuch, Seite 251 - 253

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ------------------------------- ▷ 6

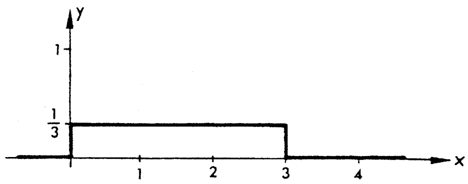
27

$p(x=2)=0$

Hinweis: Bei kontinuierlichen Zufallsvariablen ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsvariable einen bestimmten Wert annimmt, immer Null. Eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit kann nur für ein endliches Intervall angegeben werden.

Gegeben ist die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} \text{ für } 0 \le x \le 3\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$$



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
$p(2{,}0 \le x \le 2{,}5)$ für den Bereich $2{,}0 \le x \le 2{,}5$?

$p(2{,}0 \le x \le 2{,}5) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

------------------------------- ▷ 28

49

Kreuzen Sie die Aufgaben an, die mit der Binomialverteilung gelöst werden können. Nehmen Sie im Zweifel das Lehrbuch zu Hilfe.

a) ☐ 5 Würfel werden geworfen, Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 3 Würfel eine gerade Augenzahl zeigen?

b) ☐ Ein Würfel wird 6mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß jedesmal eine ungerade Zahl geworfen wird?

c) ☐ Eine Urne enthält 1 weiße und 2 rote Kugeln. Zunächst wird 1 Kugel herausgenommen und danach eine zweite Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese beiden Kugeln rot sind?

d) ☐ Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem Skatspiel eine rote Karte zu ziehen?

------------------------------- ▷ 50

6

Ein Zufallsexperiment bestehe aus dem Werfen einer Münze. Als Zufallsvariable x wählen wir das Ereignis „Zahl“.

Geben Sie die zu der Zufallsvariable x gehörende Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle an.

Zufallsvariable x	Wahrscheinlichkeit p

Lösung gefunden ----------------------------------- ▷ 8

Erläuterung oder Hilfe erwünscht ----------------------------------- ▷ 7

28

$$p(2{,}0 \le x \le 2{,}5) = \frac{1}{6}$$

Rechnung: $$p(2{,}0 \le x \le 2{,}5) = \int_{2{,}0}^{2{,}5} f(x)\,dx$$

$$= \int_{2{,}0}^{2{,}5} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\,[2{,}5 - 2{,}0] = \frac{1}{6}$$

----------------------------------- ▷ 29

50

Es gilt: a) ja
b) ja
c) nein
d) nein

Stimmt Ihr Ergebnis mit dem obigen überein?

Ja ----------------------------------- ▷ 54

Nein ----------------------------------- ▷ 51

7

Die Aufgabe hieß:
Ein Zufallsexperiment bestehe aus dem Werfen einer Münze. Als Zufallsvariable x wählen wir das Ereignis „Zahl".
Geben Sie die zur der Zufallsvariablen x gehörende Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle an.

Für „Zahl" hat x den Wert 1. Für „nicht Zahl" hat x den Wert 0

Vervollständigen Sie jetzt die Tabelle, denn die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten müßten Ihnen bekannt sein.

Zufallsvariable x	Wahrscheinlichkeit p
1	....
0	....

--------------------------------- ▷ 8

29

Mittelwert

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 11.2 Mittelwert
Lehrbuch, Seite 257 - 259

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 30

51

Gehen Sie anhand des Lehrbuches noch einmal die Aufgaben durch und versuchen Sie, selbst Ihren Fehler zu identifizieren. Das mag mühsam sein, aber wenn Sie Ihren Fehler selbst entdecken, lernen Sie die Ursachen für den Fehler besser kennen.

Fehler gefunden --------------------------------- ▷ 54

Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 52

8

Zufallsvariable x	Wahrscheinlichkeit p
1	0,5
0	0,5

Das Zufallsexperiment sei nun das gleichzeitige Werfen dreier Münzen. Zufallsvariable x sei: Anzahl der Münzen mit Kopfseite minus Anzahl der Münzen mit Zahl.
Zu bestimmen: Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable x.

Zufallsvariable x	Wahrscheinlichkeit p

Lösung gefunden -------------------------------- ▷ 11
Erläuterung oder Hilfe erwünscht -------------------------------- ▷ 9

30

Geben Sie mehrere Formen der Definition des arithmetischen Mittelwertes an:

Diskrete Zufallsvariable: $\bar{x} =$ ....

Diskrete Zufallsvariable: $\bar{x} =$ ....

Kontinuierliche Zufallsvariable: $\bar{x} =$ ....

-------------------------------- ▷ 31

52

Die Binomialverteilung gibt Wahrscheinlichkeiten an. Sie gibt nicht Möglichkeiten an. Damit entfällt Beispiel d).

Die Binomialverteilung bezieht sich auf Ereignisse mit zwei *und nur zwei* Ausgängen.

Die Bedingung ist von den Beispielen a), b) und c) erfüllt. Weitere Bedingung: Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten des einen oder anderen Ereignisses müssen bekannt und konstant sein.

Die Bedingung ist von den Beispielen a) und b) erfüllt. Im Beispiel c) ist die Wahrscheinlichkeit zwar bekannt, aber in den aufeinanderfolgenden Experimenten nicht konstant.

Nunmehr alles klar -------------------------------- ▷ 54
Wünsche weitere Erläuterung zum Beispiel c) -------------------------------- ▷ 53

9

Zufallsexperiment: Werfen dreier Münzen.

Zufallsvariable: $x = N_{\text{Kopf}} - N_{\text{Zahl}}$

Mögliche Elementarereignisse (1. Münze, 2. Münze, 3. Münze)

(KKK), (KKZ), (KZK), (ZKK), (ZKZ), (ZZK), (ZZZ)

Jedes dieser Elementarereignisse hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$.

Für das Elementarereignis KKZ ist $x = (2-1) = 1$

$x = 1$ kann realisiert werden durch .... Elementarereignisse.

Für das Elementarereignis KZZ ist $x =$ ....

-------------------------------- ▷ 10

31

Diskrete Zufallsvariable: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$, $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} N_i x_i$,

Kontinuierliche Zufallsvariable: $\bar{x} = \int_{x_1}^{x_2} x\, f(x)\, dx$

Die Messung einer physikalischen Größe habe folgendes Ergebnis:

x_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	2,9	3,1	3,5	3,5	3,7	4,1

Der Mittelwert ist: $\bar{x} =$ ....

-------------------------------- ▷ 32

53

Die Frage c) war: Aus einer Urne mit einer weißen und zwei roten Kugeln wird eine Kugel herausgenommen und danach eine zweite Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese beiden Kugeln rot sind?

Wir haben zwei Experimente, die nacheinander durchgeführt werden. Für jedes Experiment gibt es zwei Ausgänge: rote Kugeln, weiße Kugeln.

1. Experiment: Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu greifen: $p_{\text{rot}} = \frac{2}{3}$.

Eine rote Kugel werde gegriffen.

Nach diesem Experiment verbleiben in der Urne noch eine rote und eine weiße Kugel. Jetzt hat sich die Wahrscheinlichkeit verändert.

2. Experiment: Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu greifen: $p_{\text{rot}} = \frac{1}{2}$

Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu greifen, ist bei beiden Experimenten *nicht* mehr gleich. Dies widerspricht der Voraussetzung für die Anwendung der Binomialverteilung. Voraussetzung ist nämlich: Die Wahrscheinlichkeit für die beiden Ereignisse muß konstant sein.

-------------------------------- ▷ 54

10

3

-1

Es werden drei Münzen geworfen. Können Sie nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben? $x = N_{\text{Kopf}} - N_{\text{Zahl}}$

Zufallsvariable x	Wahrscheinlichkeit $p(x)$

▷ 11

32

3,47

Eine Messung A ergibt 20 Meßwerte:

1,2	1,0	1,1	1,3
1,1	1,2	1,2	1,1
1,4	1,3	1,3	1,1
1,2	1,2	1,4	1,1
1,2	1,0	1,2	1,4

Aus diesen 20 Meßwerten soll die Häufigkeitstabelle aufgestellt werden, um die Häufigkeiten und die relativen Häufigkeiten zu bestimmen.

Der 1. Schritt ist die Vorbereitung der Häufigkeitstabelle.

▷ 33

54

5 Würfel werden geworfen. Wie groß ist dei Wahrscheinlichkeit, daß 3 Würfel eine gerade Augenzahl zeigen?

Hier kommt es darauf an, die richtigen Werte in die Binomialformel einzusetzen. Die Binomialformel finden Sie im Lehrbuch. Wir benötigen folgende Werte:

$N =$ ....

$k =$ ....

$p =$ ....

▷ 55

11

Zufallsvariable x	Wahrscheinlichkeit $p(x)$
-3	$\frac{1}{8}$
-1	$\frac{3}{8}$
+1	$\frac{3}{8}$
+3	$\frac{1}{8}$

In Zweifel noch einmal Erläuterung ab Lehrschritt 9 lesen.

--------------------------------- ▷ 12

33

Meßwert	Häufigkeit	Relative Häufigkeit

Dies ist die übliche Form der Häufigkeitstabelle. Füllen Sie die Tabelle vollständig aus mit den Werten, die im vorangegangenen Lehrschritt angegeben sind.

--------------------------------- ▷ 34

55

$N = 5$

$k = 3$

$p = \frac{1}{2}$

Die Aufgabe war: 5 Würfel werden geworfen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, daß 3 Würfel eine gerade Augenzahl zeigen.

$p_5(3) =$ ....

Ist es gleichwertig, 5 Würfel gleichzeitig zu werfen oder einen Würfel 5mal hintereinander zu werfen?

☐ ja

☐ nein

--------------------------------- ▷ 56

12

Im Abschnitt 11.1.1 wird der Wurf zweier Würfel mit der Zufallsvariablen „Summe der Augenzahlen“ behandelt. Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable „Augenzahl des ersten Würfels minus Augenzahl des zweiten Würfels“.

Lösen Sie die Aufgabe entsprechend dem zweiten Beispiel in Abschnitt 11.1.1.

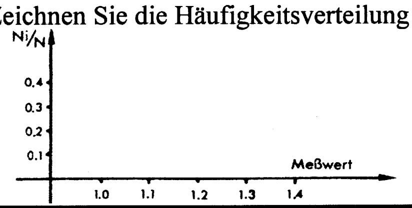
Lösung gefunden --------------------------------- ▷ 14

Erläuterung oder Hilfe erwünscht --------------------------------- ▷ 13

34

Meßwert	Häufigkeit	Relative Häufigkeit
1,0	2	0,10
1,1	5	0,25
1,2	7	0,35
1,3	3	0,15
1,4	3	0,15

Zeichnen Sie die Häufigkeitsverteilung unten in das Diagramm ein.



--------------------------------- ▷ 35

56

$$p_5(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16} \approx 0{,}3$$

Ja, beide Versuchsanordnungen sind gleichwertig.

--------------------------------- ▷ 57

13

Zufallsexperiment: Werfen zweier Würfel

Zufallsvariable x = Augenzahl des 1. Würfels – Augenzahl des 2. Würfels

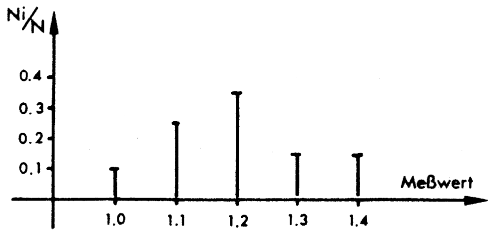
Drei Werte der Zufallsvariablen mit Realisierungen und der Wahrscheinlichkeit sind angeben.

Zufallsvariable	Wahrscheinlichkeit	Zufallsvariable	Wahrscheinlichkeit
-5	$\frac{1}{36}$		
-4	$\frac{2}{36}$		
-3	$\frac{3}{36}$		

Vervollständigen Sie die Tabelle --------------------------------- ▷ 14

35

Messung A



--------------------------------- ▷ 36

57

Eigenschaften der Normalverteilung

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 11.3.1 Eigenschaften der Normalverteilung
Lehrbuch, Seite 260 - 263

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt --------------------------------- ▷ 58

14

Zufallsvariable	Wahrscheinlichkeit	Zufallsvariable	Wahrscheinlichkeit
-5	$\frac{1}{36}$	1	$\frac{5}{36}$
-4	$\frac{2}{36}$	2	$\frac{4}{36}$
-3	$\frac{3}{36}$	3	$\frac{3}{36}$
-2	$\frac{4}{36}$	4	$\frac{2}{36}$
-1	$\frac{5}{36}$	5	$\frac{1}{36}$
0	$\frac{6}{36}$		

---------------------------------- ▷ 15

36

Eine Messung *B* ergibt 20 andere Meßwerte.

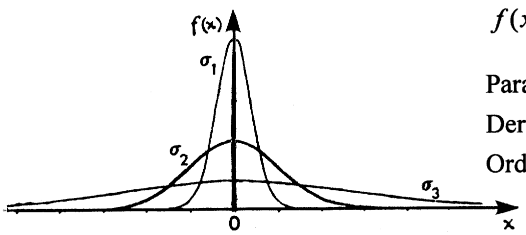
1,20	1,18	1,19	1,21
1,19	1,20	1,20	1,19
1,22	1,21	1,21	1,19
1,20	1,20	1,22	1,19
1,20	1,18	1,20	1,22

Legen Sie eine Häufigkeitsverteilung wie eben an.

---------------------------------- ▷ 37

58

In der folgenden Skizze sind drei Normalverteilungen eingezeichnet. Durch welche Parameter unterscheiden sich die drei Verteilungen?



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Parameter: . . . .

Der Parameter heißt: . . . .

Ordnen Sie den Parameter nach der Größe

. . . . > . . . . > . . . .

---------------------------------- ▷ 59

15

Sebastian behauptet, er könne zwei Biersorten A und B am Geschmack sicher voneinander unterscheiden. Mathias glaubt es nicht.

Sebastian schlägt ein Experiment vor. Er will aus zwei Gläsern trinken und die richtige Biersorte identifizieren.

Mathias ist nicht überzeugt. Er weiß, daß Sebastian rein zufällig die richtige Sorte mit einer Wahrscheinlichkeit findet von

$p = \dots\dots\dots$

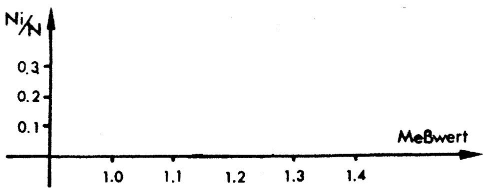
--------------------------------- ▷ 16

37

Messung B ergibt 20 andere Meßwerte. Die Häufigkeitstabelle ist hier bereits angefertigt.

Meßwert	Häufigkeit	Relative Häufigkeit
1,18	2	0,10
1,19	5	0,25
1,20	7	0,35
1,21	3	0,15
1,22	3	0,15

Zeichnen Sie in das Koordinatensystem die Häufigkeitsverteilung für Messung B ein.



--------------------------------- ▷ 38

59

Parameter σ. Der Parameter heißt Standardabweichung.

Für die Standardabweichung gilt in diesem Fall: $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$

Gegeben sei die Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Wie groß ist der Mittelwert der Zufallsvariablen x?

$\bar{x} = \dots\dots\dots\dots\dots$

Hinweis: Nicht rechnen; überlegen und Symmetriebetrachtungen anstellen.

--------------------------------- ▷ 60

16

$p = 0{,}5$

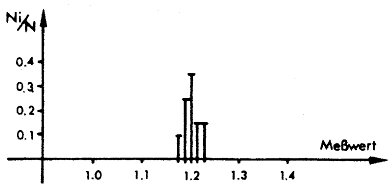
....

Mathias ist erst überzeugt, wenn Sebastian ihm ein Experiment vorschlägt, bei dem die Wahrscheinlichkeit kleiner als 0,01 ist, zufällig die Biersorten zu unterscheiden.

Können Sie einen Versuchsplan angeben -------------------------------- ▷ 18

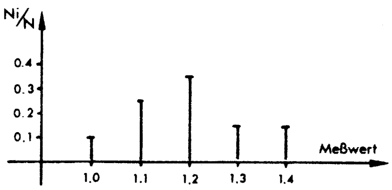
Hilfe und weitere Hinweise -------------------------------- ▷ 17

38



Messung B

Die Häufigkeitsverteilung für die Messung B hat den gleichen Mittelwert, sie unterscheidet sich aber von der für Messung A, die hier hoch einmal gezeigt wird:



Messung A

Welche Messung ist zuverlässiger? ☐ Messung A ☐ Messung B -------- ▷ 39

60

Die Normalverteilung hatte ihr Maximum bei $x = 0$ und sie war symmetrisch für diesen Punkt. Deshalb gilt für den Mittelwert:

$$\bar{x} = 0$$

Jede bezüglich $x = 0$ symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung hat $\bar{x} = 0$.

....

Gegeben sei die Zufallsvariable x mit der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Der Mittelwert ist $\bar{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Hinweis: Nicht rechnen, überlegen und Symmetriebetrachtung für den Punkt $x = \mu$ anstellen.

-------------------------------- ▷ 61

17

Sebastian muß in mehreren nacheinander ausgeführten Versuchen die richtige Biersorte identifizieren.Kann er es wirklich, wird er jedesmal recht haben. Kann er es nicht, sinkt mit jedem weiteren Versuch die Wahrscheinlichkeit, zufällig recht gehabt zu haben.

Wieviele Versuche sind notwendig, um die Wahrscheinlichkeit für ein zufällig richtiges Gesamtergebnis kleiner als 0,01 zu halten?

....

-------------------------------- ▷ 18

39

Messung B

....

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_1, \dots p_k$ zu den Werten $x_1, \dots x_k$ einer diskreten Zufallsvariablen x.

Der Mittelwert x ist definiert als

$\bar{x} = \dots\dots\dots\dots$

-------------------------------- ▷ 40

61

$x = \mu$ (Vergleichen Sie auch mit dem Lehrtext)

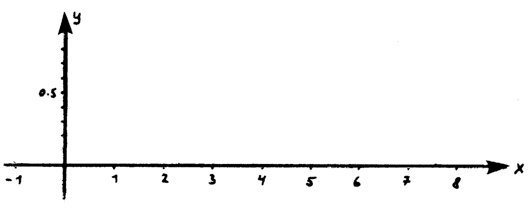
....

Vertrautheit mit der Normalverteilung erwirbt man sich durch Übung. Skizzieren Sie zwei Normalverteilungen:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

a) $\sigma_1 = 1$ und $\mu = 5$;

b) $\sigma_2 = 0{,}5$ und $\mu = 1$



Hinweis: für die Skizze Werte abschätzen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$$

-------------------------------- ▷ 62

18

Sebastian muß den Versuch 7mal wiederholen. Behält er jedesmal recht, ist Mathias zufrieden.

Versuche richtige Identifikation	1 ja	2 ja	3 ja	4 ja	5 ja	6 ja	7 ja
Zufallswahrscheinlichkeit für richtige Identifikation $p = (\frac{1}{2})^n$	0,5	0,25	0,13	0,06	0,03	0,016	0,0078

Die Wahrscheinlichkeit, daß Sebastian in sieben aufeinanderfolgenden Versuchen zufällig immer die richtige Zuordnung trifft, ist demnach 0,0078. -------------------- ▷ 19

40

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{K} p_i x_i$$

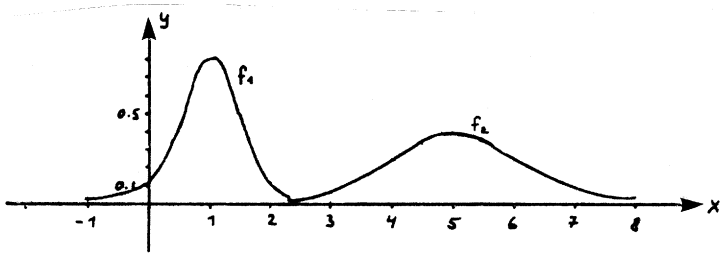
Eine Messung habe das Ergebnis

Meßwert	relative Häufigkeit
$x_1 = 4$	$h_1 = 0{,}1$
$x_2 = 5$	$h_2 = 0{,}3$
$x_3 = 6$	$h_3 = 0{,}4$
$x_4 = 7$	$h_4 = 0{,}2$

Der Mittelwert ist $\bar{x} =$ ....

-------------------------------- ▷ 41

62



Hier kam es darauf an, einige Werte abzuschätzen und den Kurvenverlauf zu skizzieren. Die Unterschiede beider Kurven liegen in der Lage des Mittelwertes und in der Breite.

-------------------------------- ▷ 63

19

Angenommen, Sie schreiben einen Test, der sich auf den Inhalt des Kapitels „Komplexe Zahlen" bezieht. Der Test bestehe aus zehn multiple choice (Auswahlantwort) Aufgaben. In jeder Aufgabe ist die richtige Lösung aus vier angebotenen auszuwählen.

Weiter sei angenommen, Sie haben das Kapitel über „Komplexe Zahlen" nicht bearbeitet. Dennoch entschließen Sie sich, den Test mitzuschreiben und verlassen sich darauf, zufällig die richtigen Antworten anzukreuzen.

Der Test sei erfolgreich absolviert, wenn Sie mindestens 80% der Aufgaben richtig haben.

Wie groß ist Ihre Chance dieses Ziel zufällig zu erreichen ....

Hinweis und Rechengang -------------------------------- ▷ 20
Lösung -------------------------------- ▷ 24

41

$$\begin{aligned}\bar{x} &= p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4\\ &= 0{,}14 + 1{,}5 + 2{,}4 + 1{,}4\\ &= 5{,}7\end{aligned}$$

....

Berechnen Sie die mittlere Augenzahl bei Würfeln mit einem Würfel.

Mittlere Augenzahl = ...

-------------------------------- ▷ 42

63

Im Lehrbuch ist auf den Seiten 263 - 265 die Binomialverteilung abgeleitet. Im Anhang A und B werden die notwendigen Integrale berechnet. Diese Abschnitte richten sich an den Leser, den sich der Mathematiker wünscht. Einen Leser nämlich, der kein Ergebnis ungeprüft übernimmt. Der Beweis ist nicht schwer. Die Binomialverteilung lag auch dem Problem im Leitprogramm zugrunde, als nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wurde, in einem Test mindestens 80% der Aufgaben richtig zu beantworten.

Ob Sie diese Abschnitte studieren, liegt bei Ihnen. Ein Argument bei dieser Entscheidung ist die zur Verfügung stehende Zeit. Oft reicht sie nicht aus. Dann können Sie hier Zeit einsparen und gleich weitermachen. Falls Sie diese Abschnitte bearbeiten, ist es nötig, mitzurechnen.

-------------------------------- ▷ 64

20

Die Zufallsvariable x für eine Aufgabe kann zwei Werte annehmen:

1 = richtig 0 = falsch

Die Aufgabenlösungen erfolgen unabhängig voneinander.

Die Wahrscheinlichkeit p, die richtige Lösung bei 4 Antwortmöglichkeiten zufällig anzukreuzen ist

$p(x = 1) =$ ....

Die Wahrscheinlichkeit, eine falsche Lösung zufällig anzukreuzen, ist

$p(x = 0) =$ ....

--------------------------------- ▷ 21

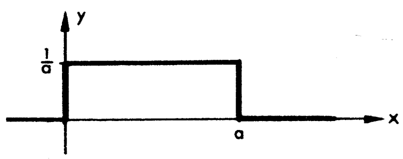
42

Mittlere Augenzahl $= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3{,}5$

....

Eine Zufallsvariable besitze die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Berechnen Sie den Mittelwert der Zufallsvariablen x. (Integrale kann man abschnittsweise berechnen.) $\bar{x} =$ ....

--------------------------------- ▷ 43

64

Wer kein passionierter Mathematiker ist, und die sind selten, hat bisher eine erhebliche Arbeitsleistung aufgebracht und in vielen Entscheidungen nicht den bequemsten Weg gewählt. Auch dies ist ein Grund dafür, sich einmal selbst auf die Schulter zu klopfen, wenn es kein anderer tut.

Aber danach die Übungsaufgaben auf Seite 268 nicht ganz vergessen. Am besten nach einigen Tagen rechnen.

--------------------------------- ▷ 65

21

$p(x=1)=\frac{1}{4}$

$p(x=0)=\frac{3}{4}$

Die Wahrscheinlichkeit, zufällig alle 10 Aufgaben richtig anzukreuzen, ist

$p(z=10)=$ ....

Die Wahrscheinlichkeit, zufällig 9 Aufgaben richtig anzukreuzen, ist

$p(z=9)=$ ....

▷ 22

43

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_{0}^{a} x\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{a}{2}$$

Weitere Übung erwünscht ▷ 44

Ohne weitere Übung geht es weiter mit ▷ 46

65

Der Hinweis, sich nach einer guten Arbeitsleistung selbst auf die Schulter zu klopfen, ist ganz ernst gemeint. Es ist eine Leistung, einen größeren Studienabschnitt oder ein anspruchsvolles Arbeitspensum durchzuhalten. Sie verdient Anerkennung und wer könnte diese Leistung besser einschätzen, als Sie selbst. Sich gelegentlich die geleistete Arbeit und die bereits erreichten Studienfortschritte bewußt zu machen, stärkt Ihr Selbstvertrauen und stabilisiert Ihre Motivation. Psychologen nennen diese Technik „Selbstverstärkung“ oder „Selbstbekräftigung“ und ihre förderliche Wirkung auf das Studierverhalten ist belegt.

▷ 66

22

$p(z=10)=(\frac{1}{4})^{10} = 0{,}000\,001$

$p(z=9)=(\frac{1}{4})^{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot 10 = 0{,}000\,03$ Hinweis: 9 richtige und eine falsche Lösung kann auf 10 verschiedene Möglichkeiten erreicht werden.

Allgemein gilt für die Wahrscheinlichkeit $z = a$ richtige Lösungen zu erhalten.

$$p(z=a)=\binom{N}{a}\cdot p(x=1)^{a}\cdot p(x=0)^{N-a}$$

$p(z=8)=$ ....

Dieser Ausdruck ist identisch mit der Binomialverteilung.

-------------------------------- ▷ 23

44

Der Mittelwert $\bar{x}$ einer kontinuierlichen Zufallsvariablen mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(x)$ ist definiert als

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Die Integrationsgenzen sind durch den Definitionsbereich der Zufallsvariablen x bestimmt. Geben Sie den Mittelwert der Zufallsvariablen x mit folgender Wahrscheinlichkeitsdichte an:

$$f(x)=\begin{cases} 2(1-x) \text{ für } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

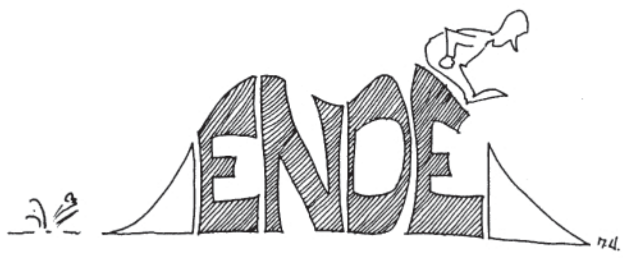
$\bar{x} =$ ....

-------------------------------- ▷ 45

66

Es ist hilfreich, in Abständen innezuhalten, die erreichten Fortschritte wahrzunehmen und sich kleine Belohnungen für Teilziele auszusetzen.

Alles kann man übertreiben. Wer ein Teilziel erreicht hat, hat immer noch eine Wegstrecke vor sich und darf sich nicht zu lange ausruhen, also einem *„vorzeitigen Lorbeereffekt"* erliegen.



des Kapitels erreicht.