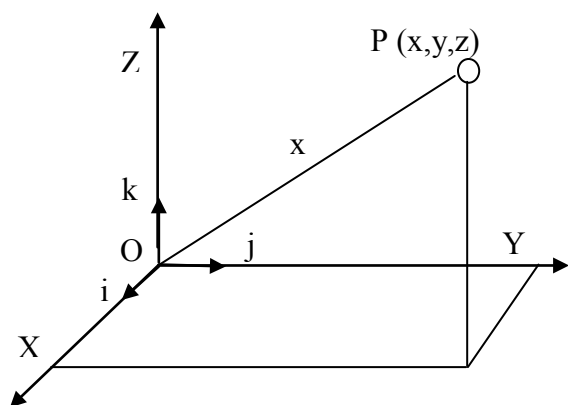


# APPENDICI

## A1. Sistemi di coordinate

### Coordinate Cartesiane



**Fig. 1.** Una terna destra Cartesiana

Una terna Cartesiana destra, o levogira, ha gli assi disposti come le tre dita della mano destra, pollice secondo x, indice secondo y, medio secondo z. Un osservatore che guardi il piano XY dalla parte positiva dell'asse Z vede X ruotare verso Y in senso antiorario. Analogamente, un osservatore disposto secondo X vedrà Y ruotare in senso antiorario per sovrapporsi a Z, infine da Y si vedrà Z ruotare in senso antiorario verso X. La posizione di un generico punto P di coordinate x,y,z è rappresentata dal vettore **OP** le cui componenti sono le coordinate Cartesiane di P:

$$\mathbf{OP} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

La posizione di **P** può anche essere espressa per mezzo dei versori **i,j,k** degli assi X,Y,Z attraverso l'espressione  $\mathbf{OP} = x*\mathbf{i} + y*\mathbf{j} + z*\mathbf{k}$ . È frequente indicare il vettore posizione del punto P semplicemente con la lettera **P** in grassetto. Per rendere più agevoli le trasformazioni tra diversi sistemi di coordinate spesso s'introduce una quarta coordinata, impiegata nelle trasformazioni lineari, affini e prospettiche. Le coordinate di questo tipo prendono il nome di coordinate omogenee. Esse sono di uso comune nella *computer graphics* e verranno estensivamente impiegate in questo testo. Ad esempio, la posizione di un punto in un riferimento Cartesiano è rappresentata, in coordinate omogenee, da un vettore 4x1 come il seguente:

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

Dove  $\alpha$  è una costante. Le coordinate Cartesiane del punto si ottengono dividendo le coordinate omogenee  $x^*, y^*, z^*$  per  $\alpha$ . Ricordiamo che le coordinate Cartesiane x,y,z sono le lunghezze delle proiezioni del vettore  $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$  sugli assi coordinati, proiezioni date dal prodotto scalare di **r** per i versori **i,j,k**. Avremo quindi:  $x = \mathbf{r} \circ \mathbf{i}$   $y = \mathbf{r} \circ \mathbf{j}$   $z = \mathbf{r} \circ \mathbf{k}$  avendo indicato con il simbolo  $\circ$  il prodotto scalare. Se si conoscono le coordinate degli estremi A, B il vettore **AB** è rappresentato da:

$$\mathbf{AB} = \begin{Bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{Bmatrix}$$

Un vettore **AB** può essere indicato con i simboli **AB**, **(B-A)**, **r<sub>AB</sub>**. In questo testo i vettori saranno sempre indicati in **grassetto**, nella letteratura sono anche comuni i simboli  $\vec{r}, \overline{r}, \underline{r}$  con eventuali indici. Nelle costruzioni grafiche e nelle figure di questo testo l'informazione sulla direzione e verso

del vettore è data dal segmento che lo rappresenta, il nome del vettore sarà quindi scritto in caratteri normali.

## Coordinate polari

Non sempre le coordinate Cartesiane rispondono bene alle esigenze di rappresentazione di un problema. Quando lo spazio in cui il problema è definito ha simmetria circolare, cilindrica o sferica, si ricorre spesso a sistemi di riferimento che semplificano la scrittura delle equazioni. Consideriamo ad esempio un sistema radar per il controllo dello spazio aereo. Assumendo che il moto del velivolo avvenga in un piano, la sua posizione è univocamente determinata nel piano dal valore della distanza  $\rho$ , misurata attraverso il tempo di ritorno del segnale radar riflesso dal velivolo, e dall'angolo  $\theta$ . Considerando un sistema Cartesiano locale solidale all'aereo, rappresentato dai versori  $\lambda, \mu, \nu$  si ha:

$$\mathbf{p} = \rho \boldsymbol{\lambda} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\rho} \boldsymbol{\lambda} + \rho \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\rho} \boldsymbol{\lambda} + \rho (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda}) = \dot{\rho} \boldsymbol{\lambda} + \omega \rho \boldsymbol{\mu}$$

Nella relazione precedente è stata impiegata l'espressione della derivata di un versore unitario rispetto al tempo, ricavabile attraverso le considerazioni seguenti:

$$\boldsymbol{\lambda}^2 = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\lambda} = 1$$

derivando rispetto al tempo si ha:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \circ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 2 * (\dot{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}) = 0$$

Se quindi il prodotto scalare della derivata  $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$  per  $\boldsymbol{\lambda}$  è nullo i due vettori sono ortogonali. Si ha quindi:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{\lambda}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{|\Delta \boldsymbol{\lambda}|}{\Delta \theta} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{2 * \sin(\frac{\Delta \theta}{2})}{\Delta \theta} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right) = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Il modulo della derivata di  $\boldsymbol{\lambda}$  è quindi  $\omega$ . Ne segue che la derivata di un versore non è un versore, cioè non ha modulo unitario. La direzione della derivata di  $\boldsymbol{\lambda}$  è perpendicolare alla direzione di  $\boldsymbol{\lambda}$  e al vettore  $\omega \boldsymbol{\nu}$  che rappresenta la velocità angolare di  $\boldsymbol{\lambda}$ . La derivata sarà quindi diretta secondo il versore  $\boldsymbol{\mu}$  e si avrà:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \omega \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\lambda} = \omega \boldsymbol{\mu}$$

In cui  $\omega$  è la velocità angolare di  $\boldsymbol{\lambda}$ , diretta secondo  $\boldsymbol{\nu}$ . La derivata di un vettore generico  $\mathbf{p}$ , variabile anche in modulo si ottiene utilizzando la relazione precedente:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\rho \boldsymbol{\lambda})}{dt} = \dot{\rho} \boldsymbol{\lambda} + \rho \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\rho} \boldsymbol{\lambda} + \omega \times \rho \boldsymbol{\lambda} = \dot{\rho} \boldsymbol{\lambda} + \omega \times \mathbf{p}$$

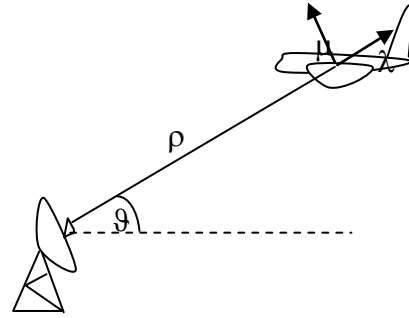


Fig. 2. Coordinate polari

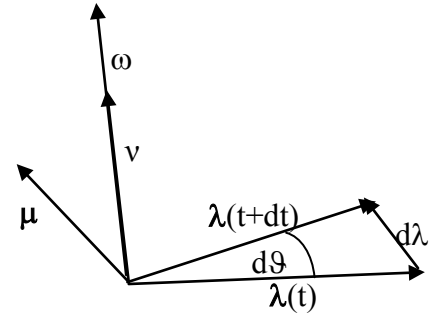


Fig. 3. Derivata di un versore

La velocità dell'aereo è quindi somma di due componenti, una radiale, diretta come  $\lambda$ , l'altra tangenziale, diretta secondo  $\mu$ . Per calcolarle occorre conoscere le leggi di variazione della distanza  $\rho$  e dell'angolo  $\vartheta$  con il tempo, fornite dalla strumentazione radar. L'accelerazione si ottiene come derivata dell'espressione della velocità scritta prima.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\rho}\lambda + \rho\dot{\omega} \times (\omega \times \mu) + \dot{\omega} \times \rho\lambda + 2\omega \times \dot{\rho}\lambda = (\ddot{\rho} - \omega^2\rho)\lambda + (\dot{\omega}\rho + 2\omega\dot{\rho})\mu$$

### Esempio

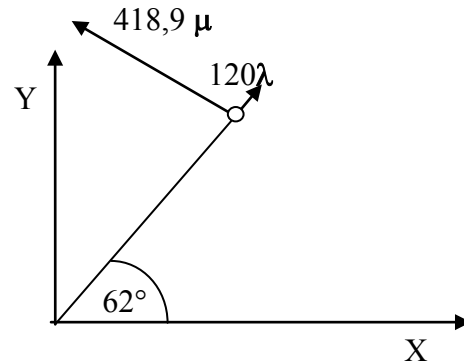
Un aereo, che si immagina in movimento nel piano XY, è rilevato dal radar ad una distanza  $\rho$  di 60 km, con un angolo  $\vartheta$  pari a  $62^\circ$ . Si abbia inoltre dal radar:

$$\dot{\rho} = 120 \text{ m/s e } \dot{\vartheta} = 0,4^\circ/\text{s}.$$

Si vogliano determinare la velocità orizzontale e quella ascensionale del velivolo.

Applicando le formule precedenti, per la velocità nel sistema locale si ha:

$$\mathbf{v} = 120\lambda + 0,4 * \frac{\pi}{180} * 60.000\mu = 120\lambda + 418,9\mu$$



**Fig. 4.** Rilievo di posizione in coordinate polari

Per trovare le componenti di velocità secondo X e Y, come richiesto, è sufficiente applicare una semplice trasformazione di coordinate per passare dal sistema locale a quello globale. Si ha quindi:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(62^\circ) & -\sin(62^\circ) \\ \sin(62^\circ) & \cos(62^\circ) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_\lambda \\ v_\mu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(62^\circ) & -\sin(62^\circ) \\ \sin(62^\circ) & \cos(62^\circ) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 120 \\ 418,9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -313 \\ 302,6 \end{Bmatrix}$$

Il velivolo sta quindi procedendo in senso orizzontale nella direzione negativa dell'asse X e sta salendo nella direzione positiva di Y.

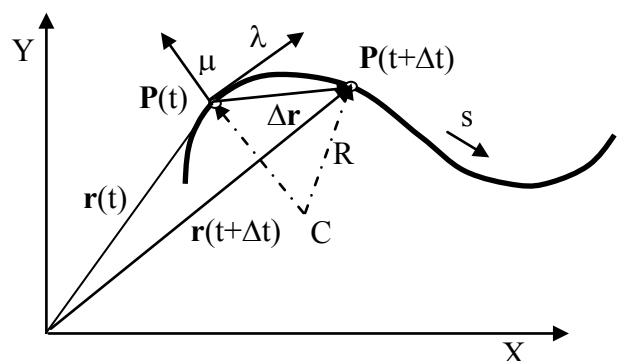
### Coordinate locali

Come è stato visto in precedenza, nello studio del moto di un punto, è spesso conveniente ricorrere ad un sistema di riferimento Cartesiano, solidale al punto nella sua evoluzione. Si consideri un punto materiale, che percorra una traiettoria curvilinea. Sulla traiettoria sia definito un sistema di coordinate curvilinee  $s$  che misura la distanza percorsa dal punto mobile, a partire da una posizione assunta come riferimento. Si ha:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{v}_P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

La direzione del vettore  $\Delta \mathbf{r}$ , al tendere di  $\Delta t$  a zero, tende a quella del versore  $\lambda$ , tangente alla



**Fig. 5.** Coordinate locali

traiettoria nel punto P, il modulo della velocità è dato dal rapporto  $\frac{ds}{dt}$ , si ha quindi:

$$\mathbf{v}_P = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\lambda}$$

L'accelerazione del punto P si ottiene derivando l'espressione precedente:

$$\mathbf{a}_P = \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \boldsymbol{\lambda} + \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda} = \frac{d^2s}{dt^2} \boldsymbol{\lambda} + \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda} = \frac{d^2s}{dt^2} \boldsymbol{\lambda} - \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R} \boldsymbol{\mu}$$

essendo  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt}$

Velocità e accelerazione sono quindi espresse in funzione di un sistema di riferimento mobile con origine nella posizione del punto materiale nell'istante considerato e versori  $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$ , con  $\boldsymbol{\lambda}$  tangente alla traiettoria nel punto P,  $\boldsymbol{\mu}$  diretto come la congiungente il centro di curvatura della traiettoria con la posizione del punto,  $\boldsymbol{\nu}$  perpendicolare ai primi due e orientato in modo da formare con questi una terna destra.

## Coordinate Cilindriche

Nella figura è rappresentato un sistema di riferimento cilindrico. Le coordinate sono l'angolo di rotazione  $\theta$  della proiezione  $r$  del vettore  $\mathbf{r}_P$  sul piano XY rispetto all'asse di riferimento X, l'altezza  $z$  del punto P sul piano XY, la distanza  $r$  del punto P', proiezione del punto P sul piano XY, dall'origine. Le tre coordinate cilindriche possono essere convertite in coordinate cartesiane con le formule:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

Se conosciamo le leggi di variazione delle coordinate cilindriche rispetto al tempo sarà semplice ricavare le componenti della velocità del punto in coordinate Cartesiane.

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{z} = \dot{z}$$

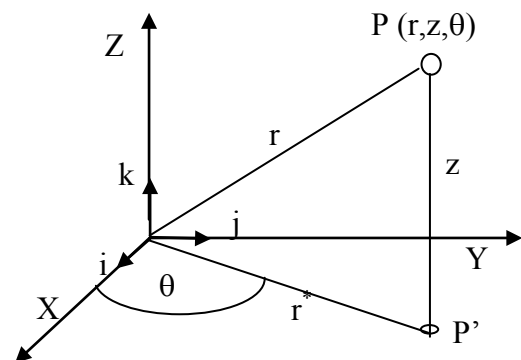


Fig. 6. Coordinate cilindriche

Scrivendo l'espressione precedente come prodotto matriciale si ha:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}$$

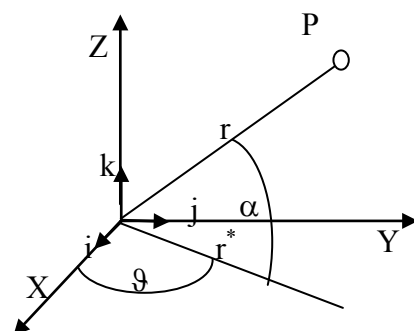


Fig. 7. Coordinate sferiche

La matrice che lega le derivate delle coordinate nei due sistemi prende il nome di Jacobiano.

### *Coordinate sferiche*

La figura a sinistra mostra un riferimento sferico nel quale le coordinate del punto P sono gli angoli  $\alpha, \vartheta$  e la distanza  $r$  del punto considerato dall'origine del sistema di riferimento. Le formule di passaggio dalle coordinate sferiche a quelle Cartesiane sono le seguenti:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \alpha \cos \vartheta \\y &= r \cos \alpha \sin \vartheta \\z &= r \sin \alpha\end{aligned}$$

Per quanto riguarda le relazioni tra le velocità espresse nei due sistemi si ha, derivando:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -r \sin \alpha \cos \vartheta * \dot{\alpha} - r \cos \alpha \sin \vartheta * \dot{\vartheta} + \cos \alpha \cos \vartheta \dot{r} \\ \dot{y} &= -r \sin \alpha \sin \vartheta * \dot{\alpha} + r \cos \alpha \cos \vartheta * \dot{\vartheta} + \cos \alpha \sin \vartheta \dot{r} \\ \dot{z} &= r \cos \alpha * \dot{\alpha} + \sin \alpha \dot{r}\end{aligned}$$

Le relazioni precedenti possono essere scritte evidenziando la matrice Jacobiana:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \alpha \cos \vartheta & -r \cos \alpha \sin \vartheta & \cos \alpha \cos \vartheta \\ -r \sin \alpha \sin \vartheta & r \cos \alpha \cos \vartheta & \cos \alpha \sin \vartheta \\ r \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{r} \end{Bmatrix}$$

La relazione tra accelerazioni si ottiene in modo analogo derivando primo e secondo membro rispetto al tempo.

## **A2. Richiami di algebra lineare**

I vettori rappresentano grandezze fisiche, come forze, velocità, accelerazioni. Le forze sono applicate su specifici punti di un corpo, perciò si parla di vettori applicati. Un vettore applicato è definito da modulo, direzione, verso e punto d'applicazione, un vettore libero soltanto da modulo direzione e verso. Si tenga presente che un vettore che rappresenta una forza applicata ad un corpo non può essere traslato parallelamente a se stesso senza che cambi l'effetto prodotto dalla forza stessa. Le grandezze cinematiche come spostamenti, velocità ed accelerazioni sono in genere vettori liberi. Le operazioni su vettori, definite nel seguito, possono riferirsi a vettori liberi e applicati. Graficamente un vettore è rappresentato da un segmento orientato nel quale la lunghezza corrisponde al modulo, mentre direzione e verso corrispondono alle analoghe caratteristiche della grandezza presa in considerazione. I vettori possono essere confrontati soltanto se si riferiscono alla stessa grandezza fisica espressa nelle stesse unità di misura. Due vettori sono uguali se hanno uguali modulo direzione e verso. Un vettore con eguale modulo e direzione e verso opposto ad un altro vettore  $\mathbf{a}$ , si indica con  $-\mathbf{a}$ . Il modulo di un vettore  $\mathbf{a}$  si indicherà con la lettera  $a$  oppure con  $|\mathbf{a}|$ . Un versore è un vettore di modulo unitario. Qualunque vettore nello spazio tridimensionale può essere normalizzato cioè reso di modulo unitario con l'operazione:

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

## Spazi Vettoriali

Uno spazio vettoriale lineare  $V$  è un insieme non vuoto di vettori definito in un campo di numeri reali  $\mathbf{R}$  che soddisfa le seguenti condizioni di addizione, e moltiplicazione per gli scalari:

1. La somma di due vettori qualsiasi di  $V$  è un vettore che appartiene a  $V$ .
2. L'addizione di due vettori qualunque di  $V$  gode della proprietà commutativa.
3. L'addizione vettoriale di tre vettori di  $V$  gode della proprietà associativa.
4. Esiste un unico elemento detto vettore zero in  $V$  tale che per ciascun elemento  $\mathbf{a} \in V$  si ha  
 $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
5. Per ogni vettore  $\mathbf{a} \in V$  esiste un unico vettore  $-\mathbf{a} \in V$  tale che:  
 $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
6. Per ogni vettore  $\mathbf{a} \in V$  e per qualunque scalare  $k \in F$  il prodotto di  $k$  e  $\mathbf{a}$  è un altro vettore appartenente a  $V$ . Se  $k=1$  si ha:  
 $k\mathbf{a} = 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
7. Per qualunque scalare  $k_1$  e  $k_2$  in  $F$  e per qualsiasi vettore  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  in  $V$ , la moltiplicazione per gli scalari gode della proprietà distributiva.  
 $k_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k_1\mathbf{a} + k_1\mathbf{b}$                        $(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$
8. Per qualunque scalare  $k_1$  e  $k_2$  in  $F$  e per qualsiasi vettore  $\mathbf{a}$  in  $V$ :  
 $k_1(k_2\mathbf{a}) = k_2(k_1\mathbf{a}) = k_1k_2\mathbf{a}$

Sono esempi di spazi vettoriali lineari gli insiemi di tutti i vettori mono, bi e tridimensionali.

## Dipendenza e indipendenza lineare

Si dice che un insieme di vettori  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  in  $V$  è linearmente indipendente se, e soltanto se, esistono  $n$  quantità scalari  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  in  $F$ , non tutte nulle, tali che:

$$c_1\mathbf{x}_1, c_2\mathbf{x}_2, \dots, c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

Se la relazione precedente può essere soddisfatta soltanto se tutte le  $c_i$  sono nulle, l'insieme di vettori si dice linearmente indipendente. Due vettori linearmente dipendenti in uno spazio bidimensionale sono collineari, cioè giacciono sulla stessa linea. Tre vettori linearmente dipendenti nello spazio tridimensionale sono complanari, cioè giacciono sullo stesso piano. Consideriamo ad

esempio i tre vettori  $\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$     $\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$     $\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ . Questi vettori sono linearmente dipendenti

perché soddisfano l'equazione  $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Si riconosce facilmente che il primo rappresenta il versore dell'asse  $X$  in una terna Cartesiana, il secondo il versore dell'asse  $Y$ , il terzo il versore di una retta inclinata a  $45^\circ$  nel piano  $XY$ . I tre vettori sono complanari.

## Combinazioni lineari e basi

Se esiste un sottoinsieme di vettori  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  in  $V$  tale che ogni altro vettore di  $V$  possa essere espresso come:

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{e}_1, c_2\mathbf{e}_2, \dots, c_n\mathbf{e}_n$$

Diciamo che  $\mathbf{x}$  è una combinazione lineare di  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ . L'insieme dei vettori  $\mathbf{e}_i$  attraversa lo spazio vettoriale  $\mathbf{V}$ . Se i vettori  $\mathbf{e}_i$  sono linearmente indipendenti, l'insieme  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  costituisce una base dello spazio vettoriale  $\mathbf{V}$ . La base rappresenta quindi un insieme minimo di vettori indipendenti che attraversa lo spazio vettoriale. In uno spazio vettoriale possono esistere diverse basi. Una volta che una base sia stata assunta, ogni vettore  $\mathbf{x}$  di  $\mathbf{V}$  potrà essere rappresentato come combinazione lineare dei vettori della base. Le dimensioni di uno spazio vettoriale sono date dal numero di vettori di base che lo attraversano. Pertanto uno spazio vettoriale  $n$ -dimensionale ha  $n$  vettori di base. Uno spazio di questo genere verrà rappresentato col simbolo  $\mathbf{V}_n$ .

### Sistemi di coordinate Cartesiane

Dato un insieme di vettori di base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$   $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  che attraversano uno spazio vettoriale  $\mathbf{V}$ , qualunque vettore  $\mathbf{r}$  di  $\mathbf{V}$  può essere espresso come combinazione lineare dei vettori di base:

$$\mathbf{r} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \dots + c_n \mathbf{e}_n$$

Se  $n=3$ , qualunque terna di vettori non complanari può essere utilizzata come base. Se i vettori  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  hanno la stessa origine  $O$  e sono mutuamente ortogonali, essi definiscono un sistema di coordinate rettangolare o Cartesiano. Se ciascuno dei vettori di base è un versore, ovvero ha lunghezza unitaria, il sistema di coordinate viene definito ortonormale. È comune indicare i versori della base con la notazione  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  in ambito scientifico. Sono possibili due scelte nella sequenza degli assi  $XYZ$  su cui giacciono i versori  $\mathbf{j}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

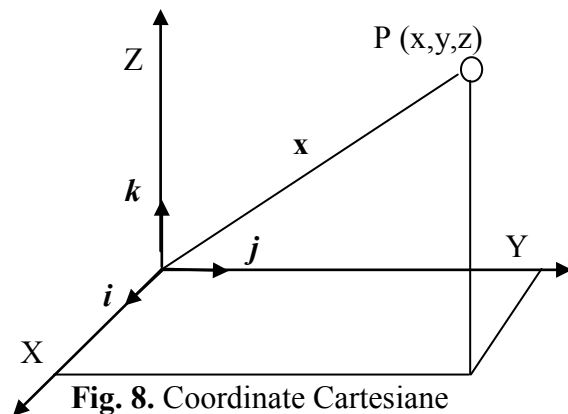


Fig. 8. Coordinate Cartesiane

### Operazioni sui vettori

#### Somma e sottrazione

Le operazioni di somma e differenza (la differenza di due vettori è equivalente alla somma del primo con l'opposto del secondo) di due o più vettori sono legate a semplici concetti fisici. Se su un corpo agiscono due o più forze, l'effetto da queste prodotto, un'accelerazione se il corpo è libero di muoversi, o l'insorgere di forze di reazione se il corpo è vincolato, non cambia se al sistema di forze sostituiamo la loro somma, che prende il nome di risultante. L'affermazione precedente non è vera se consideriamo corpi deformabili, in quanto in questo caso le deformazioni indotte nel corpo dal sistema di forze originario sono diverse da quelle che produrrebbe la risultante.

Se i vettori rappresentano delle velocità, la loro somma porta alla velocità risultante del corpo.

La somma di due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , rappresentati dalle due matrici colonna  $\begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}$ ,  $\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$ , si effettua

sommando termine a termine le componenti:

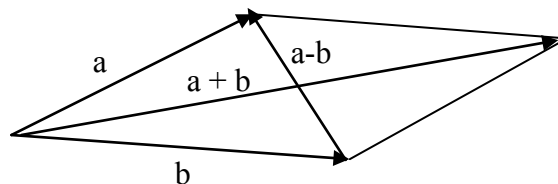
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{Bmatrix} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

L'addizione di due vettori gode della proprietà commutativa. La somma di tre o più vettori gode della proprietà associativa:

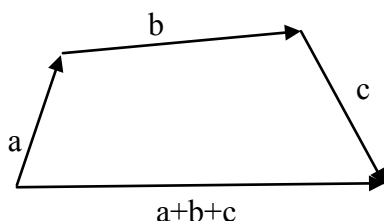
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x + c_x \\ b_y + c_y \\ b_z + c_z \end{Bmatrix}$$

In modo analogo si opera la differenza. Graficamente i vettori si possono sommare riportandoli a partire da un punto comune e costruendo un parallelogramma di cui si individuano le due diagonali.

La diagonale che va dall'inizio comune dei due vettori al vertice opposto del parallelogramma, rappresenta la somma, l'altra diagonale, diretta dalla punta di b alla punta di a, rappresenta la differenza  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ . Si può anche costruire la risultante di uno o più vettori riportandoli uno di seguito



**Fig. 9.** Somma e differenza di due vettori



**Fig. 10.** Poligono dei vettori

per cui la risultante debba passare. Per risolvere questo problema si applicano alcune proprietà della risultante che saranno espone nel seguito.

### *Prodotto di un vettore per uno scalare*

Il prodotto di un vettore  $\mathbf{a}$  per uno scalare  $k$  ha come risultato un vettore il cui modulo è eguale ad  $a \cdot k$ . Il verso del vettore sarà quello originario o opposto secondo che sia  $k > 0$  o  $k < 0$ . Abbiamo quindi:

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a}$$

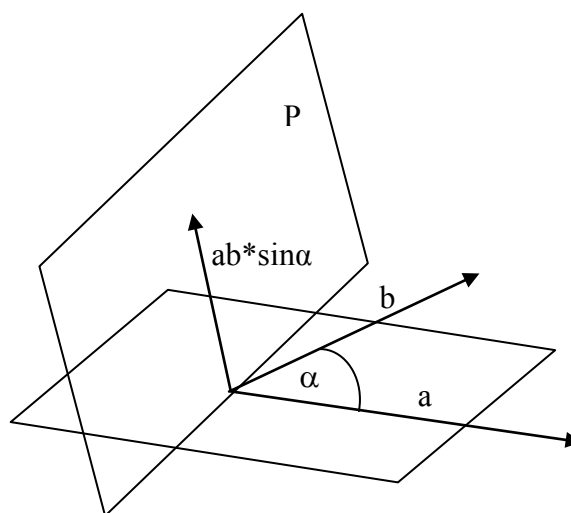
$$|\mathbf{b}| = |k| |\mathbf{a}|$$

$$k_1(k_2\mathbf{a}) = k_1k_2\mathbf{a}$$

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

$$(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$$

Dove  $k_1$  e  $k_2$  sono scalari.



**Fig. 11.** Prodotto vettoriale

### *Prodotto vettoriale*

Il prodotto vettoriale richiede come fattori due o più vettori. Il risultato è sempre un vettore. Attraverso il prodotto vettoriale si può ad esempio ottenere il momento di una forza rispetto ad un punto. Se, ad esempio, un corpo è libero di ruotare rispetto ad un punto fisso, l'applicazione di una forza non passante per quel punto, provocherà l'insorgere di un'accelerazione angolare del corpo. In



analogia con quanto visto per le forze, la somma dei momenti delle forze rispetto ad un punto prende il nome di momento risultante.

Il prodotto vettoriale  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  di due vettori concorrenti è anch'esso un vettore di modulo pari a  $ab \sin(\alpha)$ , essendo  $\alpha$  l'angolo formato dai due vettori. Il vettore prodotto è perpendicolare al piano individuato dai due vettori che vengono moltiplicati e verso tale da costituire una terna destra con questi. In termini di componenti il prodotto vettoriale  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  è dato da:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{Bmatrix} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Le componenti del vettore prodotto possono anche esprimersi come minori rispetto a  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  della

matrice:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}.$$

Il prodotto vettoriale rappresenta l'area del parallelogramma che ha come lati i due vettori. Esso gode della proprietà distributiva ma non di quella commutativa. Si ha:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

### Prodotto scalare

Il prodotto scalare di due vettori  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  è dato dalla quantità:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

In altre parole il prodotto scalare è espresso dal prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo compreso. Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa e distributiva. Se rappresentiamo geometricamente i due vettori, vediamo che il prodotto scalare è uguale al prodotto di  $a$  per la proiezione di  $b$  su  $a$ , o anche al prodotto di  $b$  per la proiezione di  $a$  su  $b$ . Ricordando che il lavoro compiuto da una forza è dato dal prodotto della componente della forza lungo la direzione dello spostamento del suo punto d'applicazione per lo spostamento stesso, deduciamo quindi che il lavoro di una forza è dato dal prodotto scalare del vettore che la rappresenta per il vettore spostamento del suo punto d'applicazione. Il prodotto scalare di due vettori è una quantità scalare.

Il prodotto scalare è commutativo, cioè:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

Se il prodotto scalare è nullo allora uno, o ambedue i vettori saranno nulli, oppure i due vettori sono ortogonali. Pertanto due vettori non nulli sono ortogonali soltanto se il loro prodotto scalare è nullo. Poiché il prodotto scalare può essere nullo anche quando i vettori da moltiplicare sono diversi da zero, non è ammessa la divisione per un vettore. Inoltre se:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

non si può concludere che  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$  ma soltanto che  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$  e quindi o  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ , oppure  $\mathbf{b} - \mathbf{c}$  è ortogonale ad  $\mathbf{a}$ . Se i due vettori hanno la stessa direzione ed  $\alpha = 0$  il loro prodotto scalare è eguale al

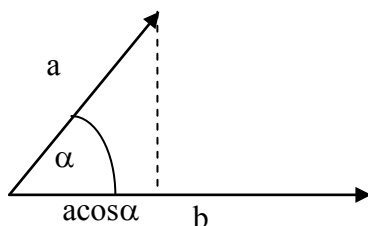


Fig. 12. Prodotto scalare

prodotto delle loro lunghezze. In particolare se  $a = b$   $a \circ b = a^2$ . Il prodotto scalare è distributivo per l'addizione, si ha cioè:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{c} \\ (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \circ \mathbf{a} &= \mathbf{b} \circ \mathbf{a} + \mathbf{c} \circ \mathbf{a} \end{aligned}$$

Applicando le regole del prodotto scalare e vettoriale ai versori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \circ \mathbf{i} &= \mathbf{j} \circ \mathbf{j} = \mathbf{k} \circ \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \circ \mathbf{j} &= \mathbf{j} \circ \mathbf{k} = \mathbf{k} \circ \mathbf{i} = 0 \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \end{aligned}$$

### Prodotto misto di tre vettori

Il prodotto di tre vettori si presenta usualmente nelle forme:

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{c} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \circ \mathbf{c} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

La prima espressione è pari al prodotto di una quantità scalare  $ab \cdot \cos \alpha$  per il vettore  $\mathbf{c}$ . Il risultato è quindi ancora un vettore il cui modulo è  $ab \cdot \cos \alpha \cdot c$ , la direzione quella del vettore  $\mathbf{c}$  e verso eguale o opposto a quello di  $\mathbf{c}$  secondo che sia  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$  positivo o negativo.

Il prodotto misto di tre vettori  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \circ \mathbf{c}$  è uno scalare il valore misura il volume del parallelepipedo costruito sui vettori dati:

$$s = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \circ \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

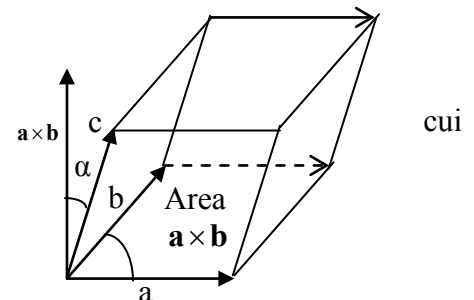


Fig. 13. Prodotto misto

Se il prodotto misto si annulla i vettori sono complanari.

Il volume di un parallelepipedo è indipendente dalla faccia scelta come base. Quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \circ \mathbf{c} &= \mathbf{b} \times \mathbf{c} \circ \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \circ \mathbf{b} \quad \text{e anche} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} \circ \mathbf{c} &= -\mathbf{c} \times \mathbf{b} \circ \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{c} \circ \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \circ \mathbf{c} \end{aligned}$$

Le espressioni precedenti possono essere ottenute permutando le lettere a,b,c nei due sensi possibili. Il prodotto triplo scalare può essere impiegato per verificare se tre vettori sono complanari oppure se due di essi sono eguali. In ambedue i casi il volume del parallelepipedo costruito a partire dai tre vettori risulta nullo. Se  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è la base di un sistema Cartesiano, il prodotto triplo scalare  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_3 \neq 0$ . Questo prodotto viene spesso indicato semplicemente come  $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$ . Esso risulta  $>0$  quando la terna è destra  $<0$  quando la terna è sinistra.

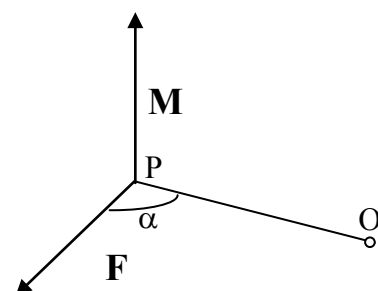


Fig. 14. Momento di un vettore rispetto a un punto

### Prodotto vettoriale triplo

Il prodotto vettoriale triplo  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  è un vettore perpendicolare a  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  che giace sul piano di  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ . Da questo risulta:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = m\mathbf{b} + n\mathbf{c}$$

Poiché il vettore  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  è anche perpendicolare al vettore  $\mathbf{a}$ , moltiplicando l'espressione precedente scalarmente per  $\mathbf{a}$  si otterrà zero:

$$\mathbf{a} \circ [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = m(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} \circ \mathbf{c}) = 0$$

quindi

$$\frac{m}{\mathbf{a} \circ \mathbf{c}} = \frac{-n}{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}} = k$$

In cui  $m, n, k$  sono scalari. Si ha quindi:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = k[(\mathbf{a} \circ \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{c}]$$

Si può dimostrare che  $k=1$ . Da questo consegue:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \circ \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Si ha anche per quanto visto in precedenza:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{c} \circ \mathbf{a})\mathbf{b}$$

### Momento di un vettore rispetto ad un punto (Fig. 14)

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{PO} = \mathbf{OP} \times \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \\ z_P - z_O \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_O - x_P \\ y_O - y_P \\ z_O - z_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y(z_O - z_P) - F_z(y_O - y_P) \\ F_z(x_O - x_P) - F_x(z_O - z_P) \\ F_x(y_O - y_P) - F_y(x_O - x_P) \end{Bmatrix}$$

se il punto O coincide con l'origine delle coordinate:

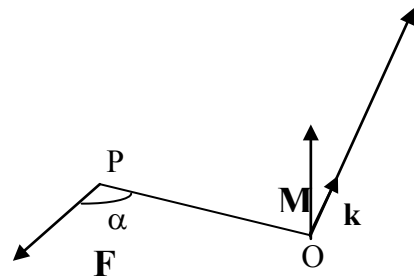
$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{PO} = \mathbf{OP} \times \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_z y_P - F_y z_P \\ F_x z_P - F_z x_P \\ F_y x_P - F_x y_P \end{Bmatrix}$$

Il momento  $\mathbf{M}$  è un vettore diretto come la normale al piano individuato da  $\mathbf{O}$  e da  $\mathbf{F}$  e modulo  $F \cdot PO \cdot \sin(\alpha)$ .

### Momento di un vettore rispetto ad un asse (Fig. 15)

Se  $\mathbf{k}$  è il versore dell'asse rispetto al quale si calcola il momento, questo è dato dal prodotto triplo:

$$M_k = \mathbf{F} \times \mathbf{PO} \circ \mathbf{k}$$



**Fig. 15.** Momento di un vettore rispetto ad un asse

In sostanza il momento rispetto all'asse è dato dalla proiezione sull'asse del momento del vettore rispetto a qualunque punto dell'asse.

Per i vettori applicati è consentita l'operazione di trasporto del vettore parallelamente a se stesso per ottenere la risultante a condizione che si aggiunga al sistema delle forze e coppie una coppia di trasporto, opportunamente calcolata. La risultante sarà applicata in un punto particolare che può essere determinato ricordando che il momento risultante del sistema dei vettori, cioè la somma dei momenti dei singoli vettori rispetto ad un polo arbitrario, deve essere eguale al momento della risultante rispetto allo stesso polo (Teorema di Varignon).

### *Derivate di funzioni vettoriali*

Se un vettore è dato in coordinate Cartesiane dall'espressione:

$$\mathbf{r}_p = x_p \mathbf{i} + y_p \mathbf{j} + z_p \mathbf{k}$$

Derivando rispetto al tempo si ha:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{x}_p \mathbf{i} + \dot{y}_p \mathbf{j} + \dot{z}_p \mathbf{k}$$

L'espressione precedente merita un breve commento. La derivata rappresenta la variazione della grandezza vettoriale rispetto al tempo. È evidente che questa variazione non è indipendente dal sistema di riferimento. Se ad esempio il vettore  $\mathbf{r}$  rappresenta la posizione di un punto nello spazio può accadere che questa posizione sia immutabile rispetto ad un sistema di riferimento, mentre cambi rispetto ad un altro. Se consideriamo una persona, rappresentabile come un punto materiale, ferma all'interno di un veicolo il quale si muove rispetto ad un riferimento fisso ancorato alla terra, la derivata della posizione della persona rispetto ad un riferimento solidale al veicolo sarà nulla, la derivata rispetto al sistema di riferimento terrestre sarà in genere diversa da zero. L'operazione di derivazione richiede quindi che sia implicitamente o esplicitamente definito il sistema rispetto al quale si deriva. Nell'espressione precedente questo si traduce nella costanza o variabilità dei versori degli assi di riferimento. Se consideriamo la posizione della persona rispetto al veicolo che si muove rispetto agli assi solidali al terreno, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{x}_p \mathbf{i} + \dot{y}_p \mathbf{j} + \dot{z}_p \mathbf{k} + x_p \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_p \frac{d\mathbf{j}}{dt} + z_p \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \\ &= \dot{x}_p \mathbf{i} + \dot{y}_p \mathbf{j} + \dot{z}_p \mathbf{k} + x_p (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + y_p (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}) + z_p (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) = \dot{x}_p \mathbf{i} + \dot{y}_p \mathbf{j} + \dot{z}_p \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times (x_p \mathbf{i} + y_p \mathbf{j} + z_p \mathbf{k}) \\ &= \dot{x}_p \mathbf{i} + \dot{y}_p \mathbf{j} + \dot{z}_p \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

Utilizzando i risultati precedenti si possono ottenere le seguenti regole di derivazione:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{b}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(m\mathbf{a}) &= m \frac{d\mathbf{a}}{dt} \\ \frac{d(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \frac{d\mathbf{b}}{dt} \\ \frac{d(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \\ \frac{d[\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \circ (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \circ \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \times \mathbf{c}\right) + \mathbf{a} \circ \left(\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt}\right) \\ \frac{d[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \times \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \times \mathbf{c}\right) + \mathbf{a} \times \left(\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt}\right)\end{aligned}$$

### Integrazione di funzioni vettoriali

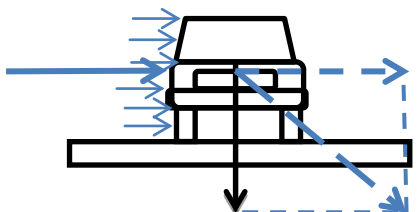
$$\text{Se } \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{b} \text{ si ha } \mathbf{a}(t) = \int \mathbf{b}(\tau) d\tau + \mathbf{c}$$

In cui  $\mathbf{c}$  è un vettore costante. Se  $\mathbf{b}(t)$  può essere espresso mediante le sue componenti in un sistema Cartesiano si ha:

$$\begin{aligned}a_x(t) &= \int b_x(\tau) d\tau + c_x \\ a_y(t) &= \int b_y(\tau) d\tau + c_y \\ a_z(t) &= \int b_z(\tau) d\tau + c_z\end{aligned}$$

### Ricerca della risultante e del momento risultante di sistemi di forze

Se un corpo è rigido, le forze ad esso applicate possono scorrere lungo la loro retta d'azione senza alterare l'effetto che esse producono. Per ottenere graficamente la risultante di un sistema di forze complanari, si può sommarle due a due dopo averle fatte scorrere sulla loro retta d'azione. Analiticamente basterà sommare algebricamente le componenti omologhe. Un esempio servirà a chiarire quanto detto. Un'auto è soggetta ad una forza verticale pari al peso della vettura e del suo carico, applicato nel baricentro, ed alla spinta del vento agente lateralmente. La costruzione della risultante si ottiene graficamente spostando la forza orizzontale lungo la sua linea d'azione sino ad incontrare la linea d'azione della forza peso. Nel caso esaminato la risultante è inclinata verso il basso ed interseca il piano stradale in un punto esterno al segmento compreso tra le due ruote. Questa condizione provocherebbe il ribaltamento della vettura. Osserviamo che la forza orizzontale è a sua volta la risultante di un sistema di forze parallele, generate dall'azione del vento sulla fiancata della vettura.



**Fig. 16.** Costruzione della risultante di un sistema di forze

### Esempio

Il sistema di vettori  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$  giace nel piano XY. Le componenti e i punti d'applicazione sono:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

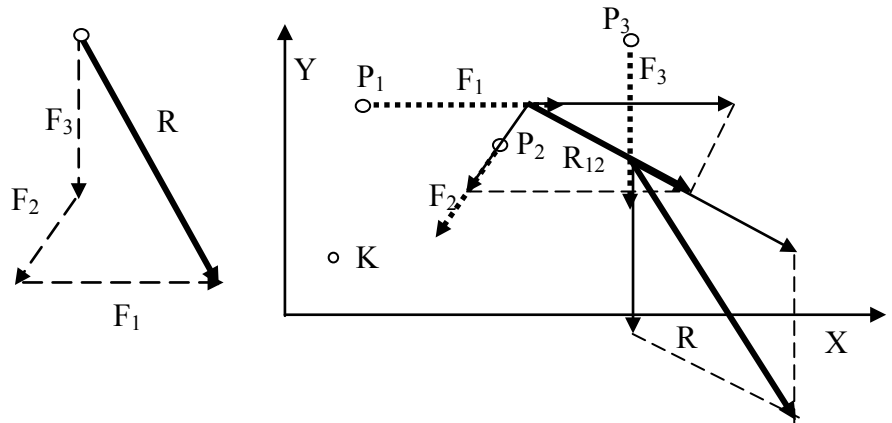
Si voglia calcolare la risultante e il momento risultante rispetto al punto  $\mathbf{K} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ .

*Risposta.* La risultante è la somma dei tre vettori

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Per via grafica le costruzioni che abbiamo descritto permettono di trovare la risultante sommando i vettori a due a due, come mostrato in figura. Per via analitica, la risultante viene calcolata

sommando le componenti omologhe delle forze date. Per ottenere analiticamente almeno un punto per cui la retta d'azione della risultante deve passare, si ricorre alla proprietà per la quale, essendo la risultante equivalente al sistema di forze iniziale, il momento della risultante rispetto ad un polo arbitrario è uguale alla somma dei momenti delle forze date rispetto allo stesso polo. Abbiamo quindi:



**Fig. 17.** Operazioni grafiche per ottenere la risultante

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{Bmatrix} \times \{\mathbf{K} - \mathbf{P}_1\} + \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{Bmatrix} \times \{\mathbf{K} - \mathbf{P}_2\} + \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{3z} \end{Bmatrix} \times \{\mathbf{K} - \mathbf{P}_3\} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} \times \{\mathbf{K} - \mathbf{P}_R\}$$

La relazione precedente fornisce due equazioni scalari (la terza è un'identità  $0=0$ , in quanto le componenti secondo z delle forze e della risultante sono nulle, il problema è piano):

$$\begin{aligned} F_{1x} * (y_K - y_1) + F_{2x} * (y_K - y_2) + F_{3x} * (y_K - y_1) &= R_x * (y_K - y_R) \\ -F_{1y} * (x_K - x_1) - F_{2y} * (x_K - x_2) - F_{3y} * (x_K - x_3) &= -R_y * (x_K - x_R) \end{aligned}$$

Applicando le relazioni precedenti al nostro caso si ha:

$$\begin{aligned} 5 * (1 - 7) - 4(1 - 6) &= 1 - y_R \quad y_R = 11 \\ 3(1 - 5) + 6(1 - 8) &= 9(1 - x_R) \quad x_R = 7 \end{aligned}$$

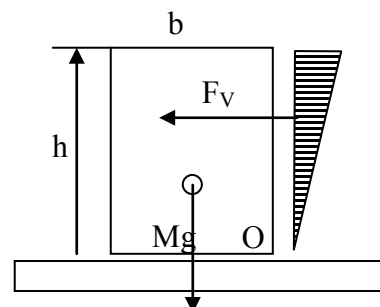
La figura precedente mostra a sinistra la costruzione grafica della risultante e a destra la risultante ottenuta prolungando la linea d'azione delle forze.

### Esempio

Un oggetto a forma di parallelepipedo, di base  $b$ , altezza  $h$ , profondità unitaria e massa  $M$ , è investito dal vento che esercita sulla parete verticale una pressione, variabile con l'altezza, data dalla legge  $p = p_0 \frac{y}{h}$ . Determinare la risultante e il momento risultante, rispetto allo spigolo  $O$ , delle azioni del vento sull'oggetto.

*Risposta.* La risultante delle azioni del vento si ottiene integrando le pressioni sulla superficie verticale, si ha quindi:

$$F_V = \int_0^h p_0 \frac{y}{h} * 1 * dy = \frac{p_0}{h} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^h = p_0 \frac{h}{2}$$



**Fig. 18.** Ricerca della risultante di un sistema di forze

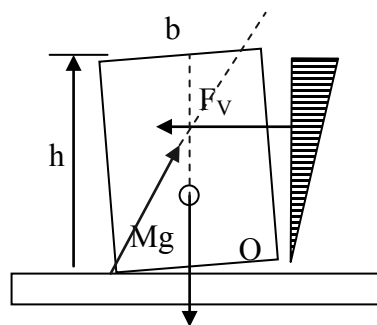
Il risultato precedente sembrerebbe erroneo in quanto una forza si ottiene moltiplicando una pressione per un'area, non si deve dimenticare che nell'espressione della forza è anche presente, anche se non visibile, la profondità unitaria del parallelepipedo. Il modulo del momento risultante rispetto ad  $O$  si ottiene con un'integrazione dei momenti elementari delle singole forze di pressione:

$$M_V = \int_0^h p_0 \frac{y}{h} y * 1 * dy = \frac{p_0}{h} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^h = p_0 \frac{h^2}{3} = R_V y_R$$

$$y_R = \frac{\frac{p_0 h^2}{3}}{\frac{p_0 h}{2}} = \frac{2}{3} h$$

La risultante delle azioni del vento ha quindi come modulo il prodotto della pressione del vento a metà altezza per la superficie esposta, ed è applicata a  $2/3$  dell'altezza  $h$ . Si può osservare che essa può provocare il ribaltamento dell'oggetto, se il momento risultante delle pressioni del vento supera quello del peso e delle azioni trasmesse all'oggetto dal terreno. Se l'azione del vento è forte e la massa del corpo non troppo elevata, si arriva ad una situazione di incipiente ribaltamento intorno allo spigolo sinistro.

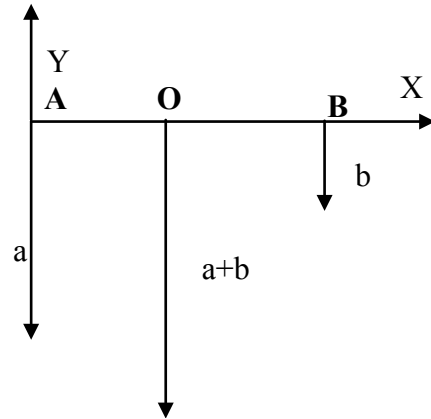
Supponendo che l'azione del vento sia appena sufficiente per tenere il corpo in equilibrio, questo è soggetto alla risultante delle azioni del vento, al suo peso e alla reazione del terreno, passante per lo spigolo sinistro del corpo. Queste tre forze, per l'ipotesi fatta sarebbero in equilibrio. Ma se tre forze nel piano sono in equilibrio, la risultante di due di queste deve essere uguale e contraria alla terza. Perché questo sia possibile le rette d'azione delle tre forze devono incontrarsi in un punto. Nel nostro caso si ha la situazione schematizzata nella figura, nella quale il corpo si "impunta" sullo spigolo sinistro. Se l'attrito tra il corpo e il terreno non è sufficiente la situazione precedente non si verifica, perché prima che il corpo si ribalti, avviene uno scorrimento orizzontale del corpo stesso.



**Fig. 19.** Incipiente ribaltamento intorno allo spigolo sinistro

### Forze parallele

Quando due o più forze sono parallele, la loro risultante è rappresentata da un vettore il cui modulo è la somma dei moduli dei vettori dati, con una retta d'azione parallela alle rette d'azione dei vettori da sommare. Per definire la retta d'azione del vettore risultante è necessario che sia dato almeno un suo punto. Poiché la risultante ed i vettori da sommare sono due sistemi equivalenti, il momento della risultante rispetto ad un polo assunto a piacere sarà eguale alla somma dei momenti dei vettori dati rispetto allo stesso polo. Si consideri ad esempio il sistema di due forze **a**, **b** in figura.



**Fig. 20.** Risultante di due forze parallele

Scegliendo un sistema di riferimento come quello in figura e come polo dei momenti il punto O per cui passa la risultante, la cui distanza da A, origine degli assi, è incognita si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_O - x_A \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_O - x_B \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(a+b) \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ricordando che  $x_A=0$ , l'equazione vettoriale precedente si riduce ad un'equazione scalare (le restanti due sono identità):

$$a * x_O + b * (x_O - x_B) = 0$$

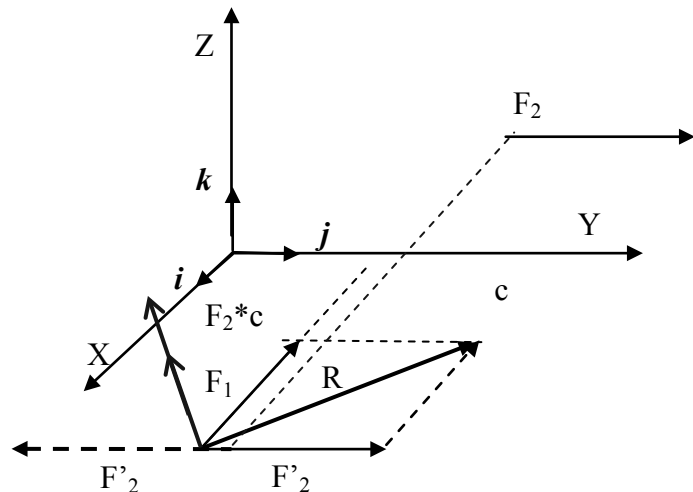
Da cui:

$$x_O = \frac{b * x_B}{a + b}$$

Il lettore cerchi di indicare, sulla base di quanto esposto dove passerebbe la linea d'azione della risultante se le due forze **a** e **b** fossero discordi.

### Sistema di forze arbitrarie

Un sistema di forze arbitrarie, comunque distribuite nello spazio e non tutte concorrenti in un punto, danno origine con operazioni di somma e trasporto ad una forza risultante e ad una coppia risultante. Come esempio si prendano due forze sghembe, la prima diretta



**Fig. 21.** Somma di vettori arbitrari

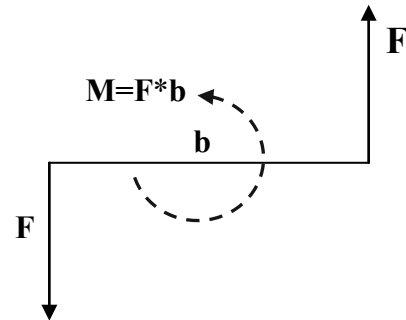
secondo l'asse X e giacente sul piano XY, la seconda giacente lungo l'asse Y ma non complanare con la prima. Potremo, senza alterare la situazione, liberamente sommare al vettore **F**<sub>1</sub> i vettori **F**<sub>2</sub> e **-F**<sub>2</sub>, paralleli a **F**<sub>2</sub>, la cui somma è nulla. Osservando la situazione dopo questa operazione, vediamo che il sistema di forze iniziale è equivalente ad uno costituito dalla risultante **R** delle forze **F**<sub>1</sub> ed **F**<sub>2</sub>, ora concorrenti in un punto e da una coppia il cui momento è il prodotto di **F**<sub>2</sub> per la lunghezza **c** dello spostamento compiuto. Una coppia può essere indicata con una freccia a due



punte, perpendicolare al piano sul quale la coppia agisce, come in figura, o con il simbolo circolare indicato nella figura seguente, questa volta giacente nel piano della coppia.

### Coppia

Una coppia è un sistema di due forze eguali in modulo, parallele e di verso opposto. La sua risultante è nulla, il suo momento rispetto a qualunque polo è il momento della coppia. Ricordiamo che il momento di una coppia è un vettore la cui direzione è perpendicolare a quella del piano che contiene le due forze della coppia, il modulo è  $F \cdot b$ , prodotto del modulo delle forze per il braccio  $b$ , verso tale che un osservatore diretto come il vettore momento vede la coppia ruotare in senso antiorario. Una coppia si rappresenta nei disegni come un arco di circonferenza, dotato di verso, come nella Fig. 22.



**Fig. 22.** Rappresentazione di una coppia e valore del momento

## A3. Richiami di algebra matriciale

Una matrice  $\mathbf{A}$  di ordine  $m, n$  è un insieme ordinato di elementi disposti in  $m$  righe e  $n$  colonne.

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

La trasposta della matrice  $\mathbf{A}$  si indica con il simbolo  $\mathbf{A}^T$  si ottiene con scambiando la posizione delle righe e delle colonne. In questo modo la matrice  $\mathbf{A}$  di ordine  $m, n$  diventa una matrice  $\mathbf{A}^T$  di ordine  $n, m$ .

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m$$

La trasposta di una colonna è una matrice riga e viceversa. Una matrice quadrata ha il numero di righe eguale a quello delle colonne, cioè  $m=n$ . Una matrice diagonale è una matrice quadrata di ordine  $n$  i cui elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli. Si ha cioè:

$$a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \text{ per } i, j = 1, 2, \dots, n$$

Una matrice unitaria è una matrice diagonale con tutti gli elementi della diagonale eguali ad uno. Si ha quindi per una matrice unitaria, indicata spesso come matrice identità  $\mathbf{I}_n$ :

$$a_{ii} = 1 \text{ se } i = j \quad a_{ij} = 0 \text{ per } i \neq j \text{ per } i, j = 1, 2, \dots, n$$

Una matrice simmetrica è una matrice quadrata di ordine  $n$  identica alla propria trasposta. Si ha cioè  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^T$  e  $a_{ij} = a_{ji}$  per tutte le  $i$  e tutte le  $j$ . Una matrice simmetrica è tale che la matrice sia eguale alla sua trasposta, cioè  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^T$  e  $a_{ij} = a_{ji}$  per tutti gli  $i$  e  $j$ . Una matrice antisimmetrica è tale che per tutti gli  $i$  e  $j$  si abbia  $a_{ij} = -a_{ji}$  e  $a_{ii} = 0$  per  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Se una matrice è antisimmetrica si ha  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ . Da una matrice antisimmetrica  $\mathbf{A}$  si può ricavare una matrice simmetrica  $\mathbf{C}$  ponendo:

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2}$$

Una matrice nulla è una matrice i cui elementi sono tutti eguali a zero. Due matrici dello stesso ordine sono eguali se tutti gli elementi corrispondenti sono uguali. Si ha cioè  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  se  $a_{ij} = b_{ij}$  per tutti gli  $i$  e  $j$ .

### *Somma di matrici*

Due matrici dello stesso ordine  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  possono essere sommate o sottratte per ottenere una terza matrice  $\mathbf{C}$  i cui elementi siano la somma o la sottrazione degli elementi corrispondenti di  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . si ha cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} & \quad \text{o} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{per la somma} \\ \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C} & \quad \text{o} \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad \text{per la sottrazione} \end{aligned}$$

La somma delle matrici ha proprietà simili a quelle dei numeri reali:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \\ \mathbf{A} + \mathbf{0} &= \mathbf{A} \quad \quad \quad \mathbf{0} \text{ è la matrice nulla} \\ \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

### **Moltiplicazione di matrici**

Il prodotto di uno scalare per una matrice si ottiene moltiplicando ciascun elemento della matrice per lo scalare, cioè:

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k = [ka_{ij}] = [a_{ij}k] \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Valgono le regole seguenti:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= a\mathbf{A} + a\mathbf{B} \\ (a + b)\mathbf{A} &= a\mathbf{A} + b\mathbf{A} \\ a(b\mathbf{A}) &= (ab)\mathbf{A} \\ 1\mathbf{A} &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

la moltiplicazione tra due matrici è possibile soltanto se il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda. La matrice prodotto avrà un numero di righe pari a quello di  $\mathbf{A}$  e un numero di colonne pari a quello di  $\mathbf{B}$ :

$$(A_{mn})(B_{np}) = C_{mp} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdot \quad \cdot \quad a_{in}\} \left\{ \begin{matrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{jn} \end{matrix} \right\}$$

Possiamo dire che nella formula precedente **A** è pre-moltiplicato per **B** o che **B** è post-moltiplicato per **A**. L'elemento della riga i-esima e colonna j-esima di **C** si ottiene moltiplicando gli elementi della riga i-esima di **A** per gli elementi della colonna j-esima di **B** e sommando i prodotti parziali ottenuti. Il prodotto di due matrici non gode della proprietà commutativa **AB** ≠ **BA**. Il prodotto della matrice unitaria per qualunque matrice dello stesso ordine è commutativo **IA** = **AI** = **A**. La moltiplicazione delle matrici gode delle proprietà associativa e distributiva:

$$(kA)B = k(AB) = A(kB)$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$C(A + B) = CA + CB$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

La seconda eguaglianza mostra che per moltiplicare tre matrici si può indifferentemente moltiplicare il prodotto delle prime due per la terza o la prima per il prodotto delle ultime due. Quando il prodotto di due matrici **A** e **B** è nullo, questo non implica necessariamente **A**=0 o **B**=0. Ricordiamo anche le seguenti regole per stabilire l'ordine del prodotto di due matrici:

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{mn} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{np} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{mp}$$

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{mn} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{m1} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{m1} \text{ (matrice colonna)}$$

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{1n} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{n1} = \text{scalare}$$

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{1m} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{mn} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{1n} \text{ (matrice riga)}$$

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{m1} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{1n} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{mn} \text{ (colonna per riga = matrice)}$$

È abbastanza frequente il caso in cui le matrici su cui si opera vengano divise in sottomatrici e le operazioni relative vengano compiute su queste sottomatrici invece che sugli elementi singoli.

### *Determinanti*

Il determinante di una matrice **A** viene indicato con:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Il determinante si calcola come somma dei prodotti degli elementi di una riga o colonna per i rispettivi cofattori, cioè:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

$A_{ij}$  è il cofattore di  $a_{ij}$  la cui espressione è:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

dove  $M_{ij}$  è il determinante del minore complementare dell'elemento  $a_{ij}$ , minore ottenuto eliminando dalla matrice la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna. Dalla definizione precedente un determinante di ordine  $n$  dipende da  $n-1$  determinanti di ordine  $n-1$ , ciascuno dei quali dipende da  $n-2$  determinanti di ordine  $n-2$ , e così via finché viene raggiunto un determinante di ordine 1. Per matrici di ordine 2 o 3 le espressioni del determinante sono le seguenti:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

Per i determinanti valgono le seguenti proprietà:

- Se tutti gli elementi di una qualsiasi riga o colonna di  $\mathbf{A}$  sono nulli, il determinante di  $\mathbf{A}$  nullo.
- Se due righe o colonne di  $\mathbf{A}$  vengono scambiate fra loro il valore del determinante resta invariato.
- Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono di ordine  $n$ , allora  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ .
- Se tutti gli elementi di una qualsiasi riga o colonna di  $\mathbf{A}$  vengono moltiplicati per uno scalare  $k$  il determinante di  $\mathbf{A}$  viene moltiplicato per  $k$ .
- Se il rango, cioè l'ordine della più grande sottomatrice di una matrice  $\mathbf{A}$  di ordine  $n$ , con determinante diverso da zero, è inferiore a  $n$ , il suo determinante è nullo.
- Se il multiplo di una riga o colonna viene sommato a un'altra riga o colonna, il determinante resta inalterato. In altre parole il determinante non cambia se a una riga o colonna si somma una combinazione lineare di altre righe e colonne.

### *Rango di una matrice*

In generale se le righe di una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  di ordine  $n$  sono linearmente indipendenti, allora il determinante di quella matrice è diverso da zero e la matrice è detta non singolare. Se il determinante di una matrice quadrata di ordine  $n$  è zero, la matrice è singolare e le righe della matrice non sono linearmente indipendenti. Il valore del determinante può quindi essere impiegato per valutare la singolarità di una matrice. Il rango di una matrice di ordine  $m \times n$  è uguale all'ordine della più grande sottomatrice di  $\mathbf{A}$  con determinante diverso da zero. Pertanto una matrice di ordine  $m \times n$  può avere un rango uguale al valore più basso di  $m$  ed  $n$ , o inferiore. Il rango di una matrice indica il numero di righe o colonne linearmente indipendenti.

### *Matrici aggiunte e inverse*

Se  $\mathbf{A}$  è una matrice quadrata e  $A_{ij}$  è il determinante del cofattore  $A_{ij}$ , allora la trasposta della matrice costituita dai determinanti dei cofattori  $A_{ij}$  si chiama aggiunta di  $\mathbf{A}$  e si ha:

$$[A_{ij}]^T = [A_{ji}] \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

spesso l'aggiunta di  $\mathbf{A}$  viene indicata col l'espressione  $\text{adj}(\mathbf{A})$ .

L'inversa di una matrice quadrata non singolare  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^{-1}$ , è l'aggiunta di  $\mathbf{A}$  divisa per il valore del suo determinante, cioè:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|}$$

Il prodotto, in qualunque ordine di una matrice  $\mathbf{A}$  di ordine  $n$  per la sua inversa è pari alla matrice identità  $\mathbf{I}_n$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$$

Si ha quindi :

$$\text{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{A}(\text{adj}(\mathbf{A})) = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_n$$

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

Se  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$  son matrici quadrate di ordine  $n$ , l'inversa del loro prodotto è il prodotto delle inverse delle singole matrici in ordine inverso.

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\dots\dots\dots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$

Analogamente per la trasposta del prodotto di più matrici:

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_n)^T = \mathbf{A}_n^T\mathbf{A}_{n-1}^T\dots\dots\dots\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_1^T$$

Una matrice 2x2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ha come inversa:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Analogamente una matrice 3x3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

ha l'inversa:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{aei - dhc - gfb - afh - dbi - gec} \begin{bmatrix} (ei - fh) & -(bi - ch) & (bf - ce) \\ -(di - fg) & (ai - cg) & -(af - cd) \\ (dh - ge) & -(ah - bg) & (ae - bd) \end{bmatrix}$$

Una conseguenza importante delle proprietà descritte in precedenza è la seguente:

$$[\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^T\mathbf{C}\mathbf{B}]^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}^T[\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^{-1}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}$$

### Traccia di una matrice

la traccia di una matrice quadrata di ordine  $n$  è la somma degli elementi della sua diagonale principale:

$$\text{Traccia}(\mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

alcune utili proprietà dell'operatore di traccia sono le seguenti:

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{A}^T)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{B})$$

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$$

$$\text{Tr}(\mathbf{ABC}^T) = \text{Tr}(\mathbf{CB}^T \mathbf{A}^T)$$

## A.4 Richiami di matematica

### Trigonometria piana

Dato un cerchio trigonometrico di raggio unitario valgono le seguenti relazioni di uso generale:

$$\sin \alpha = \overline{HP} \quad \cos \alpha = \overline{KP} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

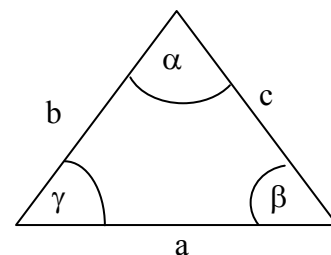
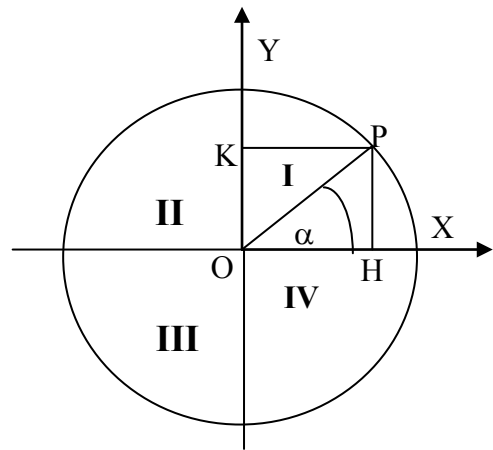
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

### Risoluzione di triangoli piani

Dato un triangolo avente lati di lunghezza  $a, b, c$  ai quali si oppongono rispettivamente gli angoli  $\alpha, \beta, \gamma$ , valgono le formule generali:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (\text{teorema dei seni})$$



**Fig. 23.** Risoluzione di triangoli

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \sin \alpha \text{ (teorema di Carnot)}$$

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\csc \alpha$	+	+	-	-
$\sec \alpha$	+	-	-	+
$\cot \alpha$	+	-	+	-

Segni delle funzioni trigonometriche nei vari quadranti.

*Sviluppi in serie*

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots [x^2 < 1]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots [x^2 < \infty]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots [x^2 < \infty]$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots [x^2 < \infty]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots [x^2 < \infty]$$

Sviluppo in serie di Fourier.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\text{con } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad -l \leq x \leq l$$

*Derivate*

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad \frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \Delta x = \sin(dx) = \tan(dx) = dx$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x = \cos dx = 1 \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \quad \frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x \quad \frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x \quad \frac{d \tanh x}{dx} = \sec^2 x$$

## Integrali

Regole per l'integrazione di funzioni generiche:

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int f(x) g(x) dx = f(x) \int g(x) dx - \int (d[f(x)] \int g(x) dx) dx$$

$$\int f(x) g(x) dx = f(x) \int g(x) dx - \int (d[f(x)] \int g(x) dx) dx$$

Funzioni razionali:

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{per } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

Logaritmi:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \log_b x dx = x \log_b x - x \log_b e + C$$

Funzioni esponenziali:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Funzioni irrazionali:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arc} \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arc} \cosh x + C$$



*Funzioni trigonometriche:*

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

*Funzioni iperboliche:*

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x \, dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$\int \operatorname{csch} x \, dx = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \arctan(\sinh x) + C$$

$$\int \operatorname{coth} x \, dx = \ln |\sinh x| + C$$

$$\int \operatorname{arccosh} x \, dx = x \operatorname{arccosh} x - \sqrt{x^2 - 1} + C$$

$$\int \operatorname{arcsinh} x \, dx = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{x^2 + 1} + C$$

$$\int \operatorname{arctanh} x \, dx = x \operatorname{arctanh} x + \frac{\log(1 - x^2)}{2} + C$$

*Cenno sulle trasformate di Laplace*

Data una funzione  $f(t)$  definita sull'insieme continuo  $t \geq 0$ , si definisce sua *trasformata* la funzione definita sull'insieme continuo  $s$ :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

essendo  $e$  il numero di Nepero ed il parametro  $s$  un numero complesso:

$$s = \sigma + i\omega$$

con  $\sigma$  e  $\omega$  numeri reali.

Questa trasformata integrale ha numerose proprietà che la rendono utile per l'analisi dei sistemi dinamici lineari. Il vantaggio più significativo è che l'integrale e la derivata di una funzione diventano rispettivamente una divisione e una moltiplicazione per la variabile complessa, analogamente al modo in cui i logaritmi cambiano la moltiplicazione di numeri nella loro addizione.

Essa trasforma le equazioni integrali e le equazioni differenziali in equazioni polinomiali, che sono più immediate da risolvere.

Anche la risposta (l'uscita) di un sistema dinamico lineare può essere calcolata come prodotto di convoluzione della sua risposta impulsiva unitaria con il segnale d'ingresso. Sviluppando questo calcolo nello spazio di Laplace la convoluzione diventa una moltiplicazione, che spesso rende il problema più semplice. Per maggiori informazioni si veda la Teoria del controllo.

Ci si può riferire anche alla sua versione *bilatera* definita per  $t > 0$  come

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

La trasformata di Laplace tipicamente esiste per tutti i numeri reali  $\text{Re}(s) > a$ , dove  $a$  è una costante (chiamata *ascissa di convergenza*) che dipende dalla funzione originaria e che costituisce la cosiddetta *regione di convergenza*. La trasformata di Laplace può anche essere usata per risolvere le equazioni differenziali e trova numerose applicazioni nell'ingegneria elettrica.

### Trasformata inversa

L'inversa della trasformata di Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$ , detta antitrasformata, è l'integrale di Bromwich (o di Bromwich-Mellin o anche di Riemann-Fourier) il quale è un integrale complesso. Essa è la funzione:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{g\}(t)$$

dove  $\mathcal{L}$  è la trasformata di Laplace.

Si prova che se una funzione  $g(s)$  ha la trasformata inversa  $f(t)$ , ovvero  $f$  è una funzione continua a tratti che soddisfa la condizione

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = g(s)$$

allora  $f(t)$  è univocamente determinata.

### Proprietà

#### ▪ Linearità

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

#### ▪ Derivata

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\mathcal{L}\{f\}'(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \mathcal{L}\{f\}(\sigma) d\sigma$$

- Integrale

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\}(s-a)$$

- Traslazione complessa

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f\}(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f\}(s-a)\} = e^{-at}f(t)$$

- Traslazione nel tempo

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\theta(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\mathcal{L}\{f\}\} = f(t-a)\theta(t-a)$$

dove  $\theta(t)$  è il gradino di Heaviside.

- Moltiplicazione per  $t$  alla  $n$ -esima potenza

$$(-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n} [\mathcal{L}\{f\}(s)]$$

- Prodotto di convoluzione

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$$

- Funzione periodica di periodo  $p$

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st}f(t)dt$$

### *Teorema del valore iniziale e del valore finale*

Analogamente a quanto si fa per la trasformata zeta, anche per la trasformata di Laplace si possono enunciare due teoremi che permettono di conoscere il valore iniziale e il valore finale della funzione partendo dalla sua trasformata. Essi valgono per funzioni di classe  $C^1$ , causali (cioè nulle per  $t < 0$ ) e con ascissa di convergenza  $A < \infty$ :

- Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{L}\{f\}(s)$$

- Teorema del valore finale

$$\text{se esiste } f(\infty), \text{ allora } f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}\{f\}(s)$$

### *Trasformate di alcune funzioni notevoli*

- Delta di Dirac

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

- Funzione gradino di Heaviside

$$\mathcal{L}\{\theta(t)\} = \frac{1}{s}$$

- Funzione esponenziale

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{s + \alpha}$$

- Seno

$$\mathcal{L}\{\sin(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

- Coseno

$$\mathcal{L}\{\cos(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

- Seno iperbolico

$$\mathcal{L}\{\sinh(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$$

- Coseno iperbolico

$$\mathcal{L}\{\cosh(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2 - \alpha^2}$$

- Logaritmo naturale

$$\mathcal{L}\{\ln(t)\} = -\frac{\ln(s) + \gamma}{s}$$

- Radice  $\alpha$ -esima (detta  $\Gamma$  la gamma di Eulero)

$$\mathcal{L}\{\sqrt[\alpha]{t}\} = s^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

- Funzioni di Bessel ordinarie

$$\mathcal{L}\{J_a(t)\} = \frac{(s + \sqrt{1 + s^2})^{-\alpha}}{\sqrt{1 + s^2}}$$

- Funzioni di Bessel modificate

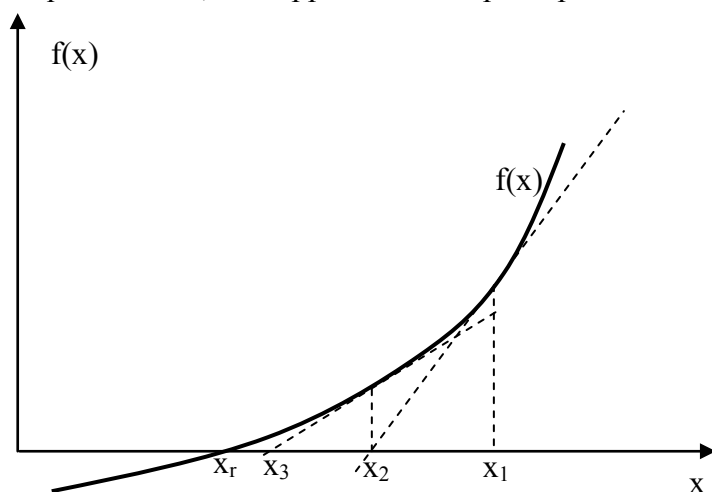
$$\mathcal{L}\{I_a(t)\} = \frac{(s + \sqrt{-1 + s^2})^{-\alpha}}{\sqrt{-1 + s^2}}$$

- Funzione degli errori

$$\mathcal{L}\{\text{erf}(t)\} = \frac{e^{-\frac{s^2}{4}} \text{erfc}(s/2)}{s}$$

### Equazioni algebriche non trattabili elementarmente con formule risolutive

Frequentemente, nell'applicazione di principi della meccanica, si perviene a equazioni algebriche o



**Fig. 24.** Risoluzione grafica di equazioni algebriche

trascendenti che non sono risolvibili (o facilmente risolvibili) in forma chiusa. In questi casi un metodo iterativo, come quello di Newton rappresenta un potente strumento per trovare le radici dell'equazione. Per prima cosa si ponga l'equazione da risolvere nella forma  $f(x) = 0$ . La figura mostra una funzione arbitraria per valori della variabile indipendente  $x$  in vicinanza della radice cercata  $x_r$ . Si supponga di poter tracciare in un grafico la funzione. È evidente che la radice cercata non è altro che il punto sull'asse delle ascisse

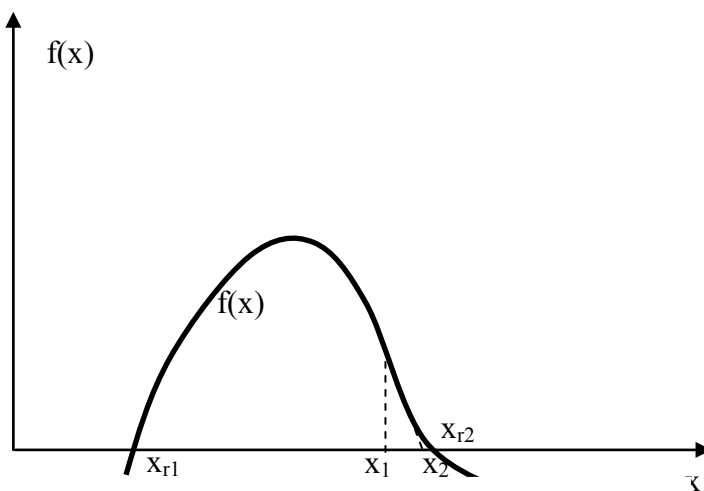
in cui il grafico della funzione interseca questo asse. Supponendo di avere una stima grossolana della radice, a es.  $x_1$ , se questo valore non corrisponde a un massimo o un minimo, è possibile ottenere una migliore approssimazione della radice tracciando la tangente alla curva in  $x_1$  e calcolando l'ascissa dell'intersezione della tangente tracciata con l'asse delle ascisse. Supponendo che quest'ascissa sia  $x_2$ , in base alla figura possiamo scrivere:

$$\tan \vartheta = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

in cui  $f'(x_1)$  denota il valore della derivata della funzione  $f(x)$  valutata in  $x_1$ . Risolvendo l'equazione precedente per  $x_2$  si ottiene  $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ . Il termine  $\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$  rappresenta la correzione alla stima iniziale della radice, cioè ad  $x_1$ . Calcolato  $x_2$  si può procedere a un'ulteriore approssimazione calcolando  $x_3$  e così via. La formula generale recursiva è la seguente:

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  L'equazione è applicata iterativamente sino a ottenere un valore sufficientemente approssimato della radice cercata, cioè sin quando  $f(x_n)$  non è abbastanza prossimo a zero. In genere si fissa in anticipo un livello di scostamento  $\varepsilon$  e il calcolo si considera finito quando  $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ . Il metodo è valido per qualunque segno delle  $x_k$ , della funzione  $f(x_k)$  e della derivata  $f'(x_k)$ .

È opportuno far notare che il metodo non procede se il valore della derivata diventa zero. In questo caso la tangente alla curva non interseca l'asse  $x$  essendo parallela a questo. Infatti se la derivata è nulla il corrispondente punto della curva è un punto di massimo o minimo e in questo punto la tangente è orizzontale. Se la derivata è non nulla ma molto piccola la tangente interseca l'asse delle ascisse in un punto la cui ascissa può essere una peggiore approssimazione del punto precedente. Per questo è conveniente limitare l'entità della correzione. Se quella trovata è superiore al massimo stabilito, si assume la massima correzione invece di quella calcolata:



**Fig. 25.** Risoluzione grafica di equazioni

- se in un piccolo intervallo delle  $x$  esistono numerose radici occorre essere piuttosto vicini alla radice cercata per convergere su questa. La figura mostra un caso in cui la convergenza avviene su una radice successiva a quella cercata;
- può anche avvenire un'oscillazione intorno al valore cercato se la funzione è antisimmetrica rispetto a una radice che costituisce un flesso della curva. In questi casi l'impiego di una correzione dimezzata può essere un buon artificio per arrivare alla convergenza.

#### *Esempio*

Cominciando da una stima iniziale  $x_1=5$  trovare la radice dell'equazione:

$$e^x - 10\cos x - 100 = 0$$

La tabella seguente riporta i risultati delle iterazioni compiute nella ricerca della radice. La ricerca è stata arrestata quando il valore assoluto della correzione è diventato inferiore a  $10^{-6}$ .

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1}-x_k=-f(x_k)/f'(x_k)$
1	5,000.000	45,576537	138,823916	-0,328305
2	4,671.695	7,285610	96,887065	-0,075197
3	4,596.498	0,292886	89,203650	-0,003283
4	4,593.215	0,000527	88,882536	-0.000006
5	4,593.209	$-2 \cdot 10^{-8}$	88,881956	$2,25 \cdot 10^{-10}$

#### *Calcolo di aree mediante integrazione grafica*

È spesso necessario valutare l'area sottostante a una curva che rappresenta il grafico di una funzione. È noto che quest'area rappresenta l'integrale della funzione rispetto alla variabile indipendente riportata nelle ascisse. La procedura si riassume nei passi seguenti:

- si divide l'intervallo delle ascisse sottostante alla curva in intervalli, eguali o diversi. Intervalli diversi possono essere giustificati dall'esigenza di suddividere finemente dove la curva varia rapidamente, grossolanamente dove la curva ha un andamento più regolare;
- per ciascun'area elementare corrispondente a una divisione s'individua l'ordinata media. Se la curva può essere considerata assimilabile a un segmento nell'intervallo dell'ascissa considerato, l'ordinata media è semplicemente data dalla semisomma dei valori estremi della funzione.

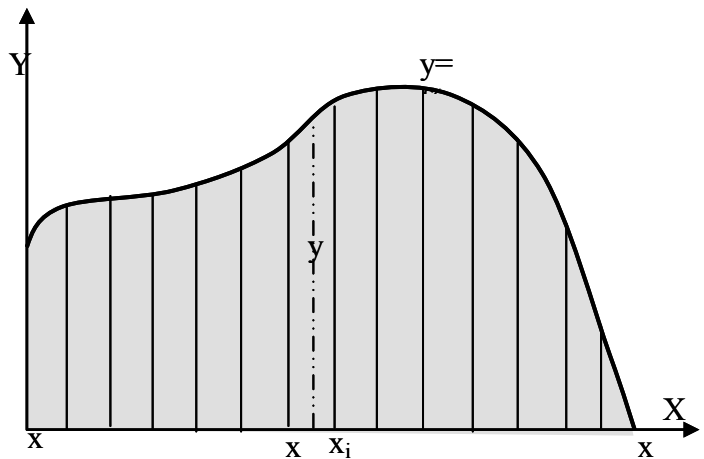


Fig. 26. Calcolo di aree

L'area dell'intervallo i-esimo è data dal prodotto:

$$\Delta A_i = \Delta x_i * y_{mi} = \Delta x_i * \frac{(y_i + y_{i+1})}{2}$$

e l'area complessiva è: 
$$A = \int_{x_1}^{x_{n+1}} y_m dx = \sum_i \Delta x_i * \frac{(y_i + y_{i+1})}{2}$$

La formula presentata è una delle regole di quadratura che permettono di calcolare un'area suddividendola in trapezi elementari.

### Integrazione grafica

Nel caso in cui si desideri integrare una funzione  $f(t)=dy/dt$ , ma la funzione sia difficile da integrare analiticamente, o semplicemente sia data in forma tabellare, si può ricorrere all'integrazione grafica di Eulero, basata sul fatto che se la funzione  $f(t)$  fosse lineare o potesse approssimarsi come una funzione lineare in un intervallo  $t_1-t_2$  abbastanza piccolo, si avrebbe:

$$y(t_2) = y(t_1) + f(t_1) * (t_2 - t_1)$$

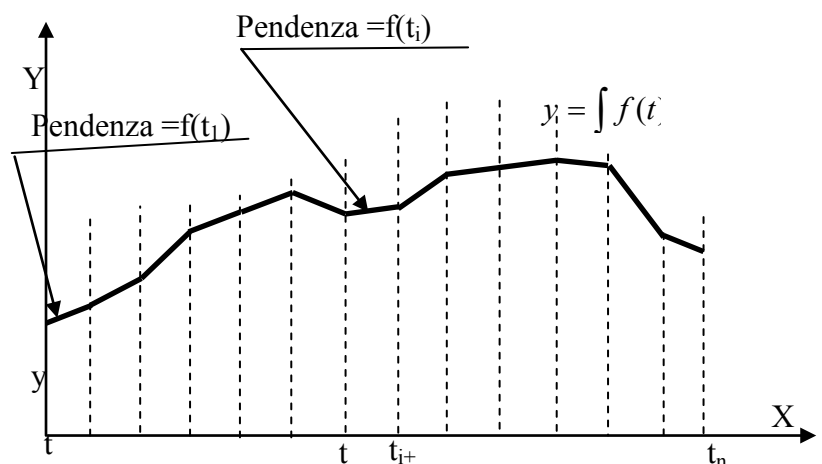


Fig. 27. Integrazione grafica

la formula può essere applicata iterativamente per ottenere di seguito  $y(t_3)$  e tutti i valori successivi della funzione cercata  $y(t)$ . Perché il processo possa partire è necessario fissare le condizioni iniziali, cioè il valore di  $y_1$ . Ciò corrisponde nella teoria dell'integrazione a fissare il valore della costante d'integrazione. Tracciato quindi un segmento verticale di ordinata  $y_1$  si traccia, a partire dall'estremità superiore di questo, un segmento con inclinazione pari a  $f(t_1)$  sino a incontrare la linea verticale corrispondente all'ascissa  $t_2$ . Il processo continua poi sino alla fine dell'ultimo intervallo. È opportuno notare che se la funzione  $f(t)$  fosse

costante il processo grafico porterebbe a un valore esatto dell'integrale, prescindendo dagli inevitabili errori di tracciamento grafico. Se la funzione è invece di tipo diverso, si avrà sempre un errore, tanto più grande quanto maggiori saranno gli intervalli elementari. Questi non devono in ogni caso diventare troppo piccoli per non cadere nei rilevanti errori di troncatura dovuti all'elevato numero d'operazioni aritmetiche da compiere all'elaboratore elettronico.

Oltre a quello presentato, basato sull'approssimazione lineare della funzione da integrare sono presenti numerosi altri metodi di quadratura che permettono di ottenere una migliore approssimazione. Tra questi citiamo il ben noto metodo di Runge-Kutta che tiene appunto conto dei possibili cambi della pendenza della funzione da integrare all'interno di un intervallo elementare.

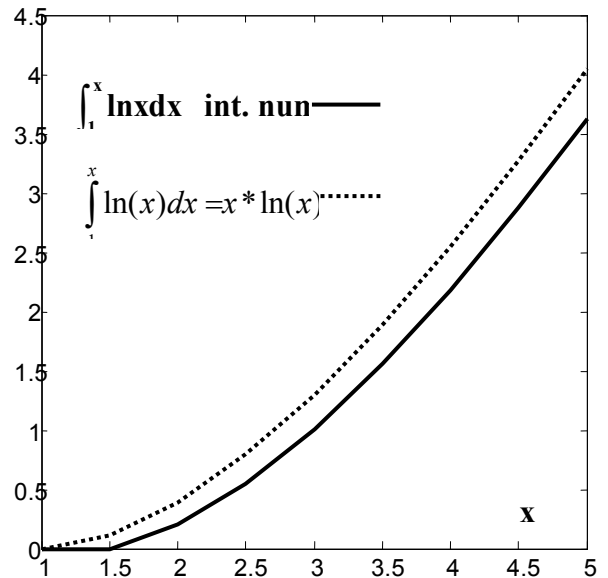


Fig. 28. Confronto tra integrazione

### Esempio

Si voglia integrare la funzione  $\ln(x)$  per  $x$  compreso tra 1 e 5. Si consideri l'intervallo complessivo dei valori di  $x$  diviso in 8 intervalli elementari. La curva inferiore mostra il risultato del processo d'integrazione illustrato precedentemente, quella superiore l'andamento esatto dell'integrale  $\ln(x) = x \cdot \ln(x) - x + C$ , nel quale si è posta la costante di integrazione pari a 1 per far coincidere l'inizio delle due curve. Come si vede il processo di integrazione numerica porta a errori via via crescenti. Ciò non deve stupire, considerato il basso numero di intervalli adottato. Si consiglia di ripetere l'esercizio con un numero d'intervalli più alto.

## A5. Appendice programmi

```
%Programma camsl
% Programma per il calcolo simbolico delle immagini di una serie di punti con telecamera
% inclinata degli angoli alfa, gamma. Il programma fornisce le
% coordinate sul piano immagine di punti riferiti al sistema
% globale. XP,YP,ZP punti globali xp,yp,zp punti immagine
% alfa è l'angolo di inclinazione in gradi, gamma l'angolo panoramico in
% gradi
syms alf gam r0x r0y r0z r1x r1y r1z xp yp zp Xp Yp Zp lamb
% matrice di traslazione r0
R0=[1, 0, 0, r0x ; 0,1, 0, r0y ; 0, 0, 1, r0z ; 0, 0, 0, 1]
MR0=[1, 0, 0, -r0x ; 0,1, 0, -r0y ; 0, 0, 1, -r0z ; 0, 0, 0, 1]
R1=[1, 0, 0, r1x ; 0,1, 0, r1y ; 0, 0, 1, r1z ; 0, 0, 0, 1]
MR1=[1, 0, 0, -r1x ; 0,1, 0, -r1y ; 0, 0, 1, -r1z ; 0, 0, 0, 1]
% matrici di rotazione alfa e gamma
t1=[1 0 0 0 ; 0 cos(alf) -sin(alf) 0;0 sin(alf) cos(alf) 0; 0 0 0 1]
t2=[cos(gam) -sin(gam) 0 0; sin(gam) cos(gam) 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1]
mt1=[1 0 0 0 ; 0 cos(alf) sin(alf) 0;0 -sin(alf) cos(alf) 0; 0 0 0 1]
mt2=[cos(gam) sin(gam) 0 0; -sin(gam) cos(gam) 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1]
% matrice di rototraslazione complessiva
T=R0*t2*t1*R1
MT= MR1*mt1*mt2*MR0
%Matrice prospettica
PR=[1 0 0 0 ; 0 1 0 0 ;0 0 1 0 ; 0 0 -1/lamb 1]
%Matrice totale per la costruzione del punto immagine
TVT=PR*MT
```



```

TVT=simple(TVT)
P=[Xp ; Yp ; Zp ;1]
pim=TVT*P
% pim è il vettore delle coordinate sul piano immagine del punto P. Il
% vettore è espresso in coordinate omogenee. Per avere le coordinate
% Cartesiane è necessaria la trasformazione seguente.
xpim=pim(1)/pim(4)
ypim=pim(2)/pim(4)
% Parametri telecamera
dati = input ('alf gam r0x r0y r0z r1x r1y r1z lamb ')
if (isempty(dati)) dati= [-90 -45 -3 -3 1 0 0 0 0.035]
end
%Matrice dei punti di cui costruire le immagini
pg=input (' matrice puntiglob nx3 es. [X1 Y1 Z1 1; X2 Y2 Z2 1; .....] ')
if (isempty(pg)) pg= [0 0 2 1 ; 15 4 4 1 ; 6 25 0.5 1 ; 13 24 6 1 ; 2.5 12 3
1 ; 12.5 16 4.5 1]
end
spg=size(pg)
spg1=spg(1)
alf=dati(1)*pi/180
gam=dati(2)*pi/180
r0x=dati(3)
r0y=dati(4)
r0z=dati(5)
r1x=dati(6)
r1y=dati(7)
r1z=dati(8)
lamb=dati(9)
for i = 1:spg1
Xp=pg (i,1)
Yp=pg (i,2)
Zp=pg (i,3)
xp(i)=eval (xpim)
yp(i)=eval (ypim)
end
xp=eval(xp)
yp=eval(yp)
% Risultato finale matrice dei punti immagine
img=[xp ; yp]'
%dati telecamera 1 per l'esempio del calciatore (primo esempio del testo) [-90 -45 -3 -3 2.7 0 -0.05 -
0.15 0.035]
%dati telecamera 1 per l'esempio delle dispense [-90 -45 -3 -3 1 0 0 0 0.035]
%dati telecamera 2 per l'esempio delle dispense [-90 45 18 -3 1 0 0 0 0.035]
% dati punti globali
% Posizione calciatore nel primo esempio del testo [10.5 15.2 1.5]
% [0 0 2 1 ; 15 4 4 1 ; 6 25 0.5 1 ; 13 24 6 1 ;
2.5 12 3 1 ; 12.5 16 4.5 1]

% Programma cam1
% Programma per il calcolo delle immagini di una serie di punti con telecamera
% inclinata degli angoli alfa, gamma. Il programma fornisce le
% coordinate sul piano immagine di punti riferiti al sistema
% globale. XP,YP,ZP punti globali xp,yp,zp punti immagine
% alfa è l'angolo di inclinazione in gradi, gamma l'angolo panoramico in
% gradi
% Parametri telecamera
% dati telecamera 1 per calibrazione
% [-90 -45 -3 -3 1 0 0 0 0.035]
% dati telecamera 2 per calibrazione
% [-90 45 18 -3 1 0 0 0 0.035]

```

```

ntel = input('numero telecamera 1 2 null = ingresso nuovi dati ')
if (isempty(ntel)) dati= input('alf gam r0x r0y r0z r1x r1y r1z lamb ')
elseif (ntel==1) dati =[-90 -45 -3 -3 1 0 0 0 0.035]
elseif (ntel==2) dati=[-90 45 18 -3 1 0 0 0 0.035]
end
% pim è il vettore delle coordinate sul piano immagine del punto P. Il
% vettore è espresso in coordinate omogenee.
%Matrice dei punti globali
pg=input(' matrice puntiglob nx3 es. [X1 Y1 Z1 1; X2 Y2 Z2 1; .....] ')
if (isempty (pg)) pg = [0 0 2 1 ; 15 4 4 1 ; 6 25 0.5 1 ; 13 24 6 1 ; 2.5 12
3 1 ; 12.5 16 4.5 1]
end
spg=size(pg)
spg1=spg(1)
alf=dati(1)*pi/180
gam=dati(2)*pi/180
r0x=dati(3)
r0y=dati(4)
r0z=dati(5)
r1x=dati(6)
r1y=dati(7)
r1z=dati(8)
lamb=dati(9)
% matrici di traslazione R0 ed R1 e loro inverse MR0 MR1
R0=[1, 0, 0, r0x ; 0,1, 0, r0y ; 0, 0, 1, r0z ; 0, 0, 0, 1]
MR0=[1, 0, 0, -r0x ; 0,1, 0, -r0y ; 0, 0, 1, -r0z ; 0, 0, 0, 1]
R1=[1, 0, 0, r1x ; 0,1, 0, r1y ; 0, 0, 1, r1z ; 0, 0, 0, 1]
MR1=[1, 0, 0, -r1x ; 0,1, 0, -r1y ; 0, 0, 1, -r1z ; 0, 0, 0, 1]
% matrici di rotazione alfa e gamma t1 e t2 e loro inverse mt1 mt2
t1=[1 0 0 0 ; 0 cos(alf) -sin(alf) 0; 0 sin(alf) cos(alf) 0; 0 0 0 1]
t2=[cos(gam) -sin(gam) 0 0; sin(gam) cos(gam) 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1]
mt1=[1 0 0 0 ; 0 cos(alf) sin(alf) 0; 0 -sin(alf) cos(alf) 0; 0 0 0 1]
mt2=[cos(gam) sin(gam) 0 0; -sin(gam) cos(gam) 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1]
% matrice di rototraslazione complessiva
T=R0*t2*t1*R1
MT= MR1*mt1*mt2*MR0
%Matrice prospettica
PR=[1 0 0 0 ; 0 1 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 -1/lamb 1]
%Matrice totale per la costruzione del punto immagine
TVT=PR*MT
for i = 1:spg1
Xp=pg (i,1)
Yp=pg (i,2)
Zp=pg (i,3)
P=[Xp ; Yp ; Zp ; 1]
pim=TVT*P
xpim=pim(1)/pim(4)
ypim=pim(2)/pim(4)
xp(i)=xpim
yp(i)=ypim
end
% Risultato finale matrice dei punti immagine
if (ntel==1) img1=[xp ; yp]'
elseif (ntel==2) img2 = [xp ; yp]'
elseif (isempty(ntel)) img=[xp ; yp]'
end
% dati punti globali
% posizione giocatore primo esempio testo
% [10.5 15.2 1.5]
% posizione dei sei punti di calibrazione
% [0 0 2 1 ; 15 4 4 1 ; 6 25 0.5 1 ; 13 24 6 1 ; 2.5 12 3 1 ; 12.5 16
4.5 1]

```

```

%Programma calib
% Questo programma permette di calibrare la telecamera date le coordinate
% di 6 punti nel sistema globale e le relative immagini nel sistema focale
% Il programma deve seguire il programma Telecam1 che a partire dai punti
% globali forma la matrice delle immagini.
% Matrice punti globali
pg
% Matrice punti immagine
img=input('nome matrice punti immagine img1 o img2  ')
% Costruzione della matrice dei coefficienti
for i=1:6
    i1=2*(i-1)+1
    i2=i1+1
    coef(i1,1:3)=pg(i,1:3)
    coef(i1,4:8)=[1 0 0 0 0]
    coef(i1,9:11)=[-pg(i,1)*img(i,1) -pg(i,2)*img(i,1) -pg(i,3)*img(i,1)]
    coef(i1,12)=-img(i,1)
    coef(i2,1:4)=[0 0 0 0]
    coef(i2,5:8)=[pg(i,1:3),1]
    coef(i2,9:11)=[-pg(i,1)*img(i,2) -pg(i,2)*img(i,2) -pg(i,3)*img(i,2) ]
    coef(i2,12)=-img(i,2)
end
% Risoluzione del sistema lineare omogeneo
acof=null(coef)
% Ricostruzione dei punti immagine a partire dai coefficienti ottenuti
% e confronto con i valori originari
bcof=[acof(1:4,1)'; acof(5:8,1)'; acof(9:12,1)']
ris= (bcof *pg')
% normalizzazione della matrice dei coefficienti
npar = 1/sqrt(bcof(1,1)^2 +bcof(1,2)^2+ bcof(1,3)^2)
bcof=bcof*npar
% Calcolo dei parametri di rotazione traslazione e prospettiva
gam= atan2(bcof(1,2),bcof(1,1))
alf=atan2(bcof(2,3)*cos(gam),bcof(2,2))
lamb= 1/sqrt(bcof(3,1)^2+bcof(3,2)^2+bcof(3,3)^2)
% Calcolo di Xr0, Yr0, Zr0
dcof=[-cos(gam) -sin(gam) 0 ; cos(alf)*sin(gam) -cos(alf)*cos(gam) -sin(alf) ;
sin(alf)*sin(gam)/lamb -sin(alf)*cos(gam)/lamb cos(alf)/lamb]
dnot=[ bcof(1,4); bcof(2,4); bcof(3,4)-1]
RC0=dcof\dnot
TVTCAL=[cos(gam) sin(gam) 0 -cos(gam)*RC0(1)-sin(gam)*RC0(2) ;
-cos(alf)*sin(gam) cos(alf)*cos(gam) sin(alf) (cos(alf)*sin(gam)*RC0(1)-cos(alf)*cos(gam)*RC0(2)-
sin(alf)*RC0(3));
sin(alf)*sin(gam) -sin(alf)*cos(gam) cos(alf) -sin(alf)*sin(gam)*RC0(1)+sin(alf)*cos(gam)*RC0(2)-
cos(alf)*RC0(3) ;
-1/lamb*sin(alf)*sin(gam) 1/lamb*sin(alf)*cos(gam) -1/lamb*cos(alf) (1-1/lamb*(-
sin(alf)*sin(gam)*RC0(1)+sin(alf)*cos(gam)*RC0(2)-cos(alf)*RC0(3)))]
for i=1:6
    ris(i,1)= ris(i,1)/ris(i,3)
    ris(i,2)=ris(i,2)/ris(i,3)
end
imgc=ris(:,1:2)
img
alf=alf*180/pi;
gam=gam*180/pi;
alf,gam,lamb, RC0, TVTCAL, TVT

% PROGRAMMA globcor
% Segue il programma Calib

```

```

% Programma per il calcolo delle coordinate globali di una serie
% Il programma richiede le matrici di calibrazione della prima e della seconda
% telecamera (programma calib) e le coordinate x,y dei punti immagine sul piano
% focale delle due telecamere.
% Matrice punti immagine telecamera 1 img1 Deve essere presente nel workspace
img1
% Matrice punti immagine telecamera 2 img2 Deve essere presente nel workspace
img2
% Costruzione matrice di riferimento locale rispetto a globale telecamera 1
dati1 = input('alf gam r0x r0y r0z lamb Telecamera 1 ')
if (isempty(dati1)) dati1= [-90 -45 -3 -3 1 0.035]
end
alf=dati1(1)*pi/180
gam=dati1(2)*pi/180
r0x=dati1(3)
r0y=dati1(4)
r0z=dati1(5)
lamb=dati1(6)
R0=[1, 0, 0, r0x; 0,1, 0, r0y; 0, 0, 1, r0z; 0, 0, 0, 1]
% matrici di rotazione alfa e gamma
t1=[1 0 0 0 ; 0 cos(alf) -sin(alf) 0;0 sin(alf) cos(alf) 0; 0 0 0 1]
t2=[cos(gam) -sin(gam) 0 0; sin(gam) cos(gam) 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1]
% matrice di rototraslazione complessiva
T1=R0* t2*t1
dati2 = input('alf gam r0x r0y r0z lamb Telecamera 2 ')
if (isempty(dati2)) dati2 = [-90 45 18 -3 1 0.035]
end
alf=dati2(1)*pi/180
gam=dati2(2)*pi/180
r0x=dati2(3)
r0y=dati2(4)
r0z=dati2(5)
lamb=dati2(6)
R0=[1, 0, 0, r0x; 0,1, 0, r0y; 0, 0, 1, r0z; 0, 0, 0, 1]
% % matrici di rotazione alfa e gamma
t1=[1 0 0 0 ; 0 cos(alf) -sin(alf) 0;0 sin(alf) cos(alf) 0; 0 0 0 1]
t2=[cos(gam) -sin(gam) 0 0; sin(gam) cos(gam) 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1]
% matrice di rototraslazione complessiva
T2=R0* t2*t1
lambd=input(' distanze focali delle due telecamere es [ 0.035 0.035] ')
if (isempty(lambd)) lambd= [0.035 ;0.035]
end
% Calcolo coordinate globali dei centri ottici C1 e c2
c1g=T1*[0; 0 ;lambd(1) ;1]
c2g=T2*[0 ; 0 ;lambd(2) ;1]
c1g=c1g/c1g(4)
c2g=c2g/c2g(4)
c1gb=c1g
% Calcolo coordinate globali dei punti immagine
smg=size(img1)
smg1=smg(1)
for i = 1:smg1
    imglob1=T1*[img1(i,1);img1(i,2);0; 1]
    imglob2=T2*[img2(i,1);img2(i,2);0; 1]
    imglob1=imglob1/imglob1(4)
    imglob2=imglob2/imglob2(4)
    imgb1(:,i)=imglob1
    imgb2(:,i)=imglob2
% Matrice coefficienti del sistema
cxy=[1/(c1g(1)-imglob1(1)) -1/(c1g(2)-imglob1(2)) 0 ; 1/(c2g(1)-imglob2(1)) -1/(c2g(2)-imglob2(2)) 0 ;
1/(c2g(1)-imglob2(1)) 0 -1/(c2g(3)-imglob2(3)) ]
% Matrice termini noti

```

```

tn=[imglob1(1)/(c1g(1)-imglob1(1))-imglob1(2)/(c1g(2)-imglob1(2)); .....
    imglob2(1)/(c2g(1)-imglob2(1))-imglob2(2)/(c2g(2)-imglob2(2));.....
    imglob2(1)/(c2g(1)-imglob2(1))-imglob2(3)/(c2g(3)-imglob2(3))]
cordglob(:,i)=cxy\tn
fx(i)=(pg(i,1)-imglob1(1))/(c1g(1)-imglob1(1))
fy(i)=(pg(i,2)-imglob1(2))/(c1g(2)-imglob1(2))
fz(i)=(pg(i,3)-imglob1(3))/(c1g(3)-imglob1(3))
end

```

*Programma traietsim per il tracciamento di traiettorie.*

```

%Programma traietsim
%questo programma simula la cinematica di un braccio umano con tre gradi di
%liberta' sulla spalla e due sul gomito. La cinematica è simulata mediante
% operazioni di rotazione elementare intorno ai vari assi.
syms alf bet gam delt
TS=eye(4)
TSS=eye(4)
TR=[0 0 1 22; 0 1 0 0 ; -1 0 0 42 ; 0 0 0 1]
l1=input('inserire la lunghezza omero in cm default 34 ')
if isempty( l1 )
    l1=34
end
l2=input('inserire la lunghezza avambraccio in cm default 22 ')
if isempty(l2)
    l2=22
end
AVMB=[1 0 0 l2 ; 0 1 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1]
OMR=[1 0 0 l1 ; 0 1 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1]
a= [1 0 0 0 ; 0 cos(alf) -sin(alf) 0 ; 0 sin(alf) cos(alf) 0 ; 0 0 0 1]
b= [cos(bet) 0 sin(bet) 0 ; 0 1 0 0 ; -sin(bet) 0 cos(bet) 0 ; 0 0 0 1]
c=[cos(gam) -sin(gam) 0 0 ; sin(gam) cos(gam) 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1]
d=[cos(delt) -sin(delt) 0 0 ; sin(delt) cos(delt) 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1]
da=input('escursione angolare rotazione omero in gradi default 0 ')
if isempty(da)
    da=0
end
db=input('escursione angolare abduzione-adduzione in gradi default -3 ')
if isempty(db)
    db=-30
end
dc=input('escursione angolare flessione-estensione in gradi default -30 ')
if isempty(dc)
    dc=-30
end
dd=input('escursione angolare flessione gomito in gradi default 90 ')
if isempty(dd)
    dd=90
end
np=input('numero di passi default 31 ')
if isempty(np)
    np=31
end
nint=input('plotta la posizione ogni nint dati nint? default 5 ')
if isempty(nint)
    nint=5
end
p1=zeros(4,np)
p=zeros(4,np)
dal=da/np*pi/180
dbl=db/np*pi/180

```

```

dcl=dc/np*pi/180
ddl=dd/np*pi/180
T=a*b*c
alf=da1
bet=db1
gam=dcl
delt=ddl
TT=eval(T)
TTT=eval(d)
hold off
clf
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
view(157,12)
grid on
body_vert= [-16 -5 0 ; 16 -5 0 ; 16 5 0 ; -16 5 0 ; -20 -5 45 ; 20 -5 45 ; 20 5
45 ; -20 5 45]
body_faces= [ 1 2 3 4 ; 1 2 6 5 ; 2 3 7 6 ; 3 4 8 7 ; 1 5 8 4 ; 5 6 7 8 ]
patch('Vertices',body_vert, 'Faces', body_faces,'FaceColor','w')
hold on
for i=1:np
    TS=TS*TT
    p(:,i)=TR*TS*[11 ; 0 ; 0 ; 1]
    TSS=TSS*TTT
    p1(:,i)=TR*TS*OMR*TSS*[12 ; 0 ; 0 ; 1]
end
for i=1:nint:np
    plot3([p(1,i); 22], [p(2,i); 0], [p(3,i); 42], 'LineWidth', 2)
    plot3([p1(1,i); p(1,i)], [p1(2,i); p(2,i)], [p1(3,i); p(3,i)], 'LineWidth', 2)
end
plot3(p1(1,:), p1(2,:), p1(3,:), 'color', 'red')

```

## A6. Esercizi

### Sistemi di riferimento

#### Calcolo della lunghezza del passo

Calcolare la lunghezza del passo come modulo della distanza tra le caviglie conoscendo la coordinata della caviglia anteriore  ${}^4P_D$  rispetto al sistema mobile 4. Attenzione al segno degli angoli!

$${}^4P_D = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

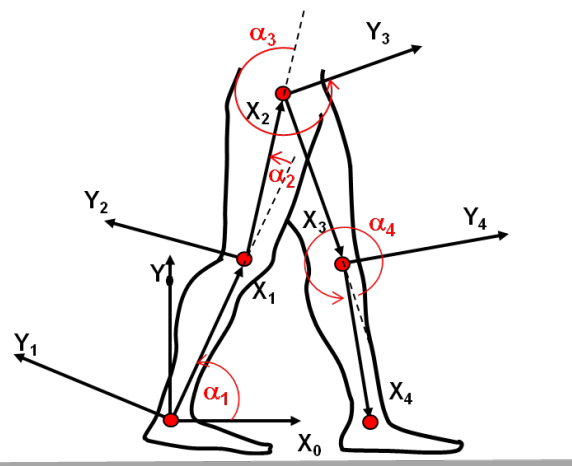
$$\alpha_1 = 60^\circ$$

$$\alpha_2 = 15^\circ$$

$$\alpha_3 = 120^\circ$$

$$\alpha_4 = 25^\circ$$

$$L = \overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 0,5 \text{ [m]}$$



### Soluzione

La soluzione del problema si trova applicando la teoria delle matrici di trasformazione. La matrice globale è definita come segue:

$${}^4_0T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T$$

Dove ogni matrice di trasformazione ha la generica espressione:

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dove } i = 1:4.$$

Calcolando i vari prodotti otteniamo la matrice globale:

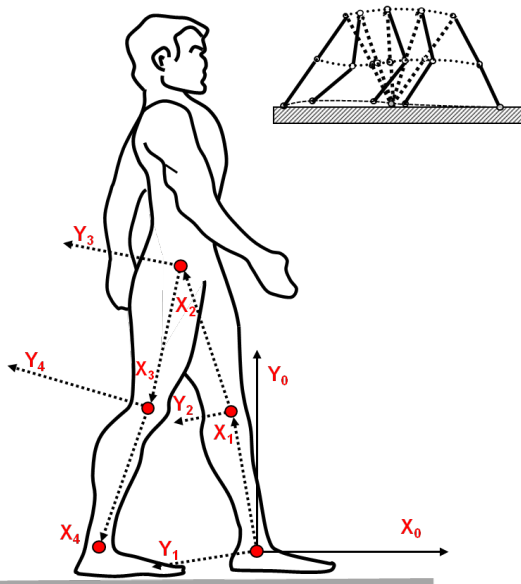
$${}^4_0T = \begin{bmatrix} 0,3420 & 0,9397 & 0 & 0,7330 \\ -0,9397 & 0,3420 & 0 & 0,5624 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le coordinate assolute del punto D si ottengono moltiplicando la matrice globale per le coordinate della caviglia relative al sistema di riferimento locale 4

$${}^0P_D = {}^4_0T \cdot {}^4P_D = \begin{bmatrix} 0,3420 & 0,9397 & 0 & 0,7330 \\ -0,9397 & 0,3420 & 0 & 0,5624 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9040 \\ 0,0926 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### Calcolo della traiettoria della caviglia durante il passo

Assegnata la legge di variazione degli angoli formati tra i vari segmenti, calcolare la traiettoria della caviglia rispetto al tempo.



### Soluzione

La matrice globale è ottenuta come prodotto tra le singole matrici di trasformazione:

$${}^0_4T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T$$

a titolo di esempio riportiamo il prodotto delle prime due matrici  ${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_2) & -\sin(\alpha_2) & 0 & l_1 \\ \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_2\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (\cos(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2)) & (-\sin(\alpha_2) \cdot \cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2)) & 0 & l_1 \cos(\alpha_1) \\ (+\sin(\alpha_2) \cdot \cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2)) & (\cos(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2)) & 0 & l_1 \sin(\alpha_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Attraverso l'utilizzo delle formule di addizione e sottrazione sotto riportate la matrice  ${}^0_2\mathbf{T}$  ha la seguente forma:

$${}^0_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 & l_1 \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 & l_1 \sin(\alpha_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

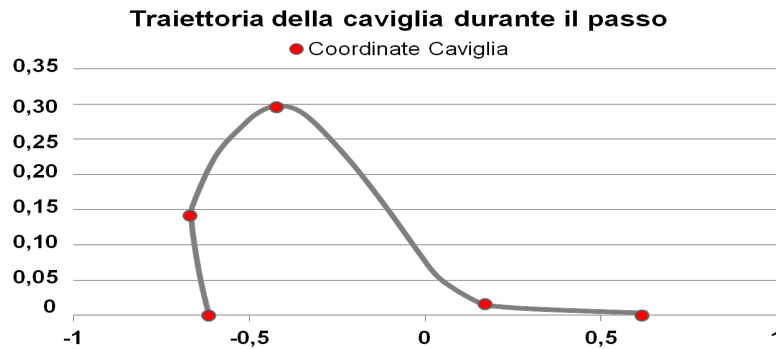
moltiplicando tutte le 4 matrici di trasformazione otteniamo la matrice globale:

$${}^0_4\mathbf{T}_{\text{Globale}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) & 0 & I_1 \cos(\alpha_1) + I_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + I_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) & 0 & I_1 \sin(\alpha_1) + I_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + I_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	Tempo [s]	0	0.25	0.50	0.75	1
Angoli °	$\alpha_1$	110	104.14	90	75.85	70
	$\alpha_2$	0	0	0	0	0
	$\alpha_3$	140	151.71	180	208.28	220
	$\alpha_4$	0	-35	-70	-35	0
	$\alpha_{\text{sum}}$	250	220.86	200	249.14	290

	Tempo [s]	0	0.25	0.50	0.75	1
Coordinate [m]	$X_0$	-0.6156	-0.6702	-0.4229	0.1696	0.6156
	$Y_0$	0	0.142	0.2961	0.0159	0
	$Z_0$	0	0	0	0	0





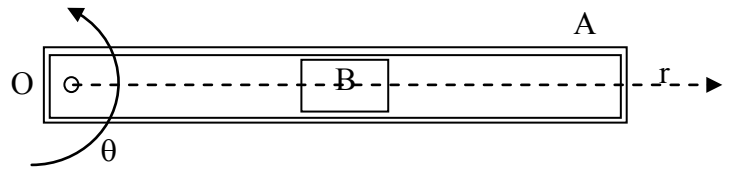
### Velocità e accelerazioni

- La rotazione del braccio OA avviene secondo la legge  $\theta = 0.2*t + 0.02*t^3$ . Nello stesso tempo l'equipaggio mobile B si muove lungo la scanalatura del braccio con la legge  $r = 0.02 + 0.04*t^2$ . Calcolare il modulo della velocità dell'equipaggio mobile per  $t = 3$  s.

### Soluzione

$$\theta = 0.2*t + 0.02*t^3 \quad r = 0.02 + 0.04*t^2$$

La velocità del pattino è la somma della velocità relativa e di quella di trascinamento, la prima diretta secondo l'asse  $r$ , la seconda normale a questo.



$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r$$

$$v_t = \dot{\theta}(0.02 + 0.04t^2) = (0.2 + 0.06t^2)(0.02 + 0.04t^2)$$

$$\text{per } t = 3 \quad v_t = (0.2 + 0.02 * 3 * 9)(0.02 + 0.04 * 9) = 0.28 \text{ m/s}$$

$$v_r = \dot{r}_{t=3} = 2 * 0.04 * 3 = 0.24$$

$$v_p = \sqrt{0.28^2 + 0.24^2} = 0.37 \text{ m/s}$$

- Una vettura di massa pari a 1200 kg percorre al limite dell'aderenza una curva di 45 m di raggio alla velocità di 65 km/h. Determinare l'accelerazione centripeta della vettura.

### Soluzione

L'accelerazione centripeta, diretta dalla posizione della vettura verso il centro della curva ha l'espressione:

$$v_c = \frac{V^2}{R} = \frac{\left(\frac{65}{3.6}\right)^2}{45} = 7.24 \text{ m/s}^2$$

- L'asta in figura ha  $a = 1$  m  $b = 0.5$  m. Determinare l'accelerazione vettoriale del punto P quando l'asta ruota in senso orario con  $\omega = 20$  rad/s e  $\dot{\omega} = 2$  rad/s.

### Soluzione

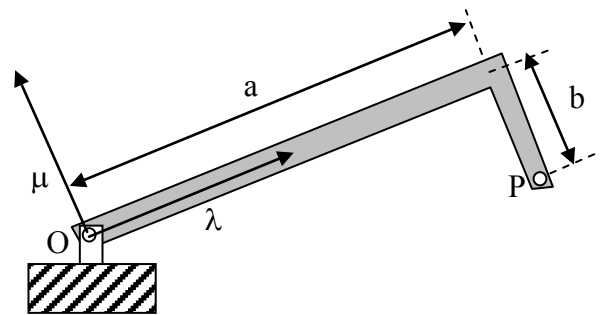
La posizione del punto P rispetto al sistema di riferimento  $\lambda, \mu$  rotante insieme all'asta è:

$$\mathbf{r}_P = \lambda - 0,5\mu$$

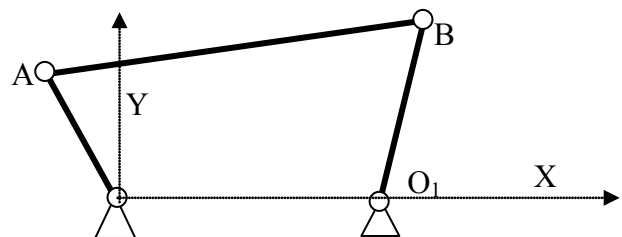
derivando si ha:

$$\mathbf{v}_P = \omega \times \lambda - 0,5\omega \times \mu = -20\mu - 10\lambda$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \dot{\omega} \times \lambda + \omega \times \omega \times \lambda - 0,5\dot{\omega} \times \mu - 0,5\omega \times \omega \times \mu = -2\mu - 400\lambda - \lambda + 200\mu = \\ &= -402\lambda + 198\mu \end{aligned}$$



- Nel quadrilatero articolato mostrato nella figura l'asta OA possiede una velocità angolare pari a 10 rad/s, costante, in senso antiorario. Nella posizione mostrata in figura le coordinate del punto A rispetto a un sistema di assi con origine nel punto O sono  $x_A = -50$  mm,  $y_A = 80$  mm, quelle di B  $x_B = 200$  mm  $y_B = 120$  mm e  $OO_1 = 150$  mm. Determinare per mezzo di una costruzione grafica la velocità e l'accelerazione del punto B.



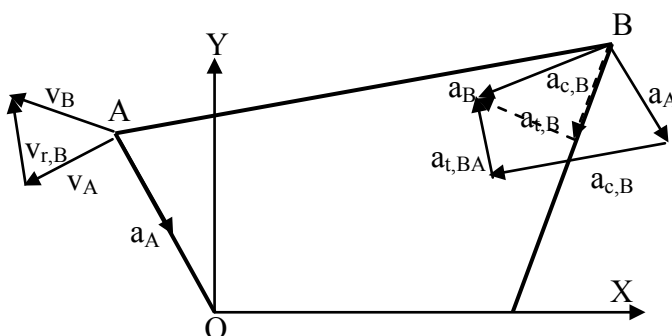
### Soluzione

Si ricordi che  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{r,BA}$ . Si calcoli prima il modulo della velocità del punto A, dato da:

$$v_A = 10 * OA = 10 * \sqrt{(0,06^2 + 0,08^2)} = 1 \text{ m/s}$$

si riporti quindi con una scala opportuna un segmento che rappresenta  $v_A$ , a partire dal punto A con direzione perpendicolare a OA e verso coerente col senso della velocità angolare dato. Si tracci poi in serie al segmento tracciato un segmento indefinito perpendicolare ad AB. Questo segmento rappresenta la direzione della velocità  $\mathbf{v}_{r,AB}$  della velocità relativa di B rispetto ad A. Si tracci infine, sempre a partire dal punto A un segmento indefinito perpendicolare a  $O_1B$ . Questo segmento intersecherà quello precedente in un punto che individua il vettore velocità di B. Per le accelerazioni si ricordi che:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{r,BA} = \mathbf{a}_{cA} + \mathbf{a}_{tA} + \omega_2 \times \omega_2 \times \mathbf{AB} + \dot{\omega}_2 \times \mathbf{AB} = \\ &= \omega_1 \times \omega_1 \times \mathbf{OA} + 0 + \omega_2 \times \mathbf{AB} + \dot{\omega}_2 \times \mathbf{AB} \end{aligned}$$



la costruzione grafica si limita a trasporre la precedente relazione vettoriale in termini geometrici. Si tracci quindi, usando una scala opportuna, un vettore di modulo pari a  $\omega^2 * AB = 100 * 0,1 = 10 \text{ m/s}^2$  diretto secondo OA, con verso da A a O. Il vettore tracciato rappresenta l'accelerazione del punto A che, per l'ipotesi assunta  $\omega_1 = \text{cost}$  coincide con l'accelerazione centripeta di A. si trasporti ora per comodità di costruzione il

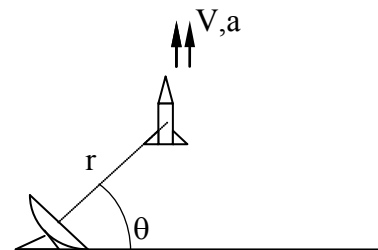
O<sub>1</sub>

segmento tracciato a partire dal punto B. Si tracci in serie al segmento trasportato un altro segmento, nella scala assunta, di modulo pari a  $\omega_2^2 \cdot AB$ , parallelo ad AB e da B verso A. Si tenga presente che il valore di  $\omega_2$  deve essere desunto dal modulo del segmento  $v_{r,BA}$ , pari appunto a  $\omega_2 \cdot AB$ . Dalla punta dell'ultimo vettore tracciato si tracci ancora un segmento indefinito con direzione perpendicolare ad AB. A questo punto si ritorna al punto B per tracciare il vettore che rappresenta la sua accelerazione centripeta, di modulo pari a  $\omega_3^2 \cdot O_1B$ . Il valore di  $\omega_3$  viene calcolato a partire dal segmento che rappresenta la velocità  $v_B$  il cui modulo è appunto  $\omega_3 \cdot O_1B$ . Ovviamente la lunghezza del segmento deve prima essere convertita attraverso la scala delle velocità in m/s, prima di poter calcolare il valore di  $\omega_3$ . A questo punto si traccia ancora un segmento indefinito che rappresenta la linea d'azione dell'accelerazione tangenziale di B. Questo segmento incontrerà quello, anch'esso indefinito che rappresenta l'accelerazione tangenziale relativa di B rispetto ad A. L'intersezione ottenuta rappresenta la punta del vettore che rappresenta l'accelerazione di B. La costruzione grafica è riportata nella figura seguente. Per la costruzione si potranno usare tre scale diverse, la prima per la costruzione del quadrilatero, la seconda per le velocità, la terza per le accelerazioni.

- Un missile è lanciato verticalmente e la sua traiettoria è seguita da un radar. Quando l'angolo di puntamento raggiunge il valore  $\theta = 60^\circ$  il sistema di misura del radar fornisce i seguenti valori:

$$r = 8000 \text{ m} \quad \dot{r} = 21 \text{ m/s} \quad \dot{\theta} = 0,02 \text{ rad/s}$$

Calcolare la velocità e l'accelerazione del missile.



#### Soluzione

Ricordando che il missile si muove secondo una traiettoria verticale e le relazioni tra un sistema di riferimento Cartesiano ortogonale e un sistema polare:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \vartheta & y &= r \cdot \sin \vartheta \\ \dot{x} &= \dot{r} \cdot \cos \vartheta - r \cdot \dot{\vartheta} \cdot \sin \vartheta & \dot{y} &= \dot{r} \cdot \sin \vartheta + r \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos \vartheta \\ \ddot{x} &= \ddot{r} \cdot \cos \vartheta - 2\dot{r} \cdot \dot{\vartheta} \cdot \sin \vartheta - r \cdot \ddot{\vartheta} \cdot \sin \vartheta - r \cdot \dot{\vartheta}^2 \cdot \cos \vartheta \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \cdot \sin \vartheta + 2\dot{r} \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos \vartheta - r \cdot \ddot{\vartheta} \cdot \cos \vartheta - r \cdot \dot{\vartheta}^2 \cdot \sin \vartheta \end{aligned}$$

si ha poi:

$$\dot{x} = \dot{r} \cdot \cos 60^\circ - 8000 \cdot 0,02 \cdot \sin 60^\circ = 0$$

$$\text{si ottiene } \dot{r} = 0,02 \cdot 8000 \cdot \tan 60^\circ = 277,13 \text{ m/s}$$

$$\dot{y} = 277,13 \cdot \sin 60^\circ + 8000 \cdot 0,02 \cdot \cos 60^\circ = 320 \text{ m/s}$$

$$\ddot{x} = \frac{21 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot 277,13 \cdot 0,02 \cdot \sin 60^\circ - 8000 \cdot \ddot{\vartheta} \cdot \sin 60^\circ - 8000 \cdot 0,02^2 \cdot \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = 0$$

$$\ddot{\vartheta} = \frac{21 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot 277,13 \cdot 0,02 \cdot \sin 60^\circ - 8000 \cdot 0,02^2 \cdot \cos 60^\circ}{8000 \cdot \sin 60^\circ} = 2,67 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{y} = 21 \cdot \sin 60^\circ + 2 \cdot 277,13 \cdot 2,67 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 60^\circ - 8000 \cdot 2,67 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 60^\circ - 8000 \cdot 0,02^2 \cdot \sin 60^\circ = 5,47 \text{ m/s}^2$$

- Un treno, lanciato alla velocità di 100 km/h, frena diminuendo la sua velocità del 10% nei primi 40 s dall'applicazione dei freni. Calcolare la velocità alla fine dei successivi 80 secondi, assumendo che, durante l'intero periodo di frenatura, la decelerazione sia proporzionale alla velocità.

### Soluzione

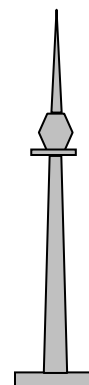
La velocità di 100 km/h corrisponde a 27,78 m/s. Al termine dei primi 40 s la velocità è  $27,78 \cdot 0,9 = 25$  m/s. Se la decelerazione è proporzionale alla velocità, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} a &= -kv \text{ e anche } \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -k dt \text{ da cui si ha :} \\ \ln(v) + c &= -kt \text{ per } t = 0 \quad v = 27,78 \quad c = -\ln(27,78) \text{ per cui :} \\ \ln\left(\frac{v}{27,78}\right) &= -kt \text{ per } t = 40 \quad v = 25 \text{ m/s} \quad \ln\left(\frac{25}{27,78}\right) = -k \cdot 40 \\ k &= -\frac{\ln\left(\frac{25}{27,78}\right)}{40} = 2,63 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Dopo 120 s si ha:

$$\begin{aligned} \ln(v) &= \ln(27,78) - 2,63 \cdot 10^{-3} \cdot 120 = 3,01 \\ v &= e^{3,01} = 20,28 = 73 \text{ km/h} \end{aligned}$$

- L'ascensore principale della torre per comunicazioni CN a Toronto sale di 250 m e per la maggior parte della sua corsa ha una velocità di 22 km/h. Assumere che sia la fase d'accelerazione che quella di decelerazione siano percorse con un'accelerazione costante di  $\frac{1}{4}g$  (positiva la prima e negativa la seconda) e determinare la durata della corsa. *Risposta.*  $t = 43,4$  s.



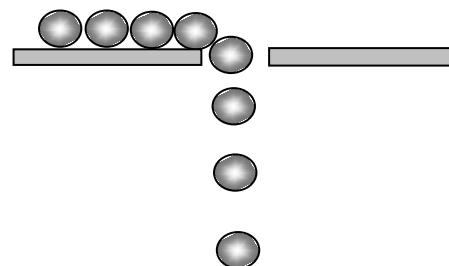
### Soluzione

La velocità di 22 km/h corrisponde a  $22/3,6 = 6,11$  m/s. Con un'accelerazione di  $0,25g$  il tempo necessario per raggiungerla è di  $6,11/(0,25 \cdot 9,81) = 2,49$  s. Lo spazio corrispondente è pari a:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 9,81 \cdot 2,49^2 = 7,60 \text{ m}$$

Poiché lo spazio di accelerazione e quello di decelerazione sono eguali il tratto percorso a velocità costante è pari a  $250 - 2 \cdot 7,60 = 234,8$  m. Questo spazio viene percorso in un tempo di  $234,8/6,11 = 38,43$  s. Questo tempo sommato a quelli d'accelerazione e decelerazione dà  $t = 2 \cdot 2,49 + 38,43 = 43,4$  s.

- Un aereo di massa pari a 50 t atterra su una pista orizzontale alla velocità di 195 km/h con una componente di velocità verticale trascurabile. Subito dopo il contatto all'aeroplano viene applicata una forza frenante data dall'espressione  $(55000 + 4 \cdot V^2)$  N, in cui V è la velocità dell'aereo. Calcolare la lunghezza della corsa di atterraggio.
- Delle piccole sfere d'acciaio cadono da una posizione di riposo al ritmo di 2 al secondo. Trovare la separazione verticale di due sfere consecutive, quando la più bassa è caduta per tre metri. Si trascuri la resistenza dell'aria.



### Soluzione

Il moto delle sfere è naturalmente accelerato. Per cadere di tre metri occorre un tempo che si può calcolare risolvendo l'equazione:

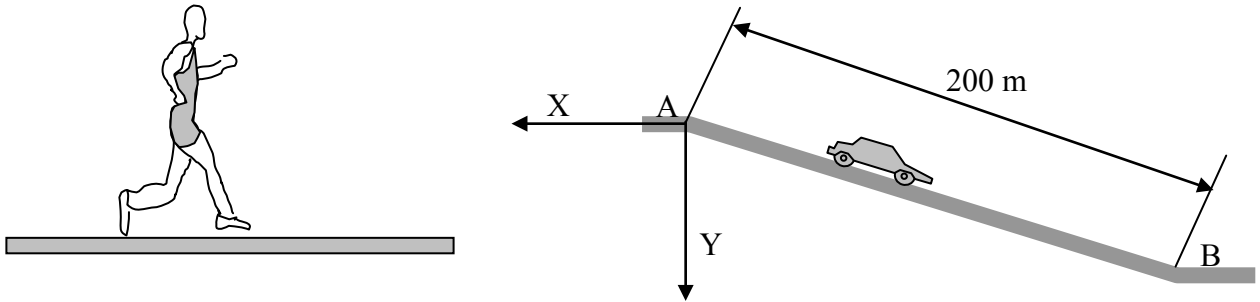
$$h = \frac{1}{2}gt^2 \text{ da cui: } t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81}{9,81}} = 1,41 \text{ s}$$

la sfera precedente è caduta per un tempo corrispondente a  $1,41 - 0,5 = 0,91 \text{ s}$ . Lo spazio percorso è quindi:

$$h_1 = \frac{1}{2}gt^2 = 0,5 \cdot 9,81 \cdot 0,91^2 = 4,07 \text{ m}$$

la distanza tra le sfere nell'istante considerato è quindi di  $3 - 4,07 = -1,07 \text{ m}$ .

- Uno scattista raggiunge la sua massima velocità  $v_{\max}$  in 2,5 s dalla partenza con accelerazione costante. Quindi mantiene la velocità e termina i 100 m in un tempo totale di 10,4 s. Determinare la velocità massima  $v_{\max}$ . R.  $v_{\max} = 10,93 \text{ m/s}$  (vedere la soluzione all'interno del testo). Il conducente di una vettura, inizialmente ferma nel punto A rilascia il freno a mano e lascia andare in folle la vettura con un'accelerazione pari a  $0,981 - 0,013v^2$ , essendo  $v$  la velocità del veicolo. Determinare la velocità in B. Risposta.  $v = 8,66 \text{ m/s}$ .



### Soluzione

Con riferimento al sistema X-Y assunto in figura si ha:

$$\frac{dv}{dt} = 0,981 - 0,013v^2 \text{ si ha poi } \frac{dv}{0,981 - 0,013v^2} = dt$$

$$\text{ponendo } k_1 = 0,981 \text{ } k_2 = 0,013 \text{ e } v = \dot{y} \text{ si ha:}$$

$$\frac{d\dot{y}}{k_1 - k_2\dot{y}^2} = dt = \frac{dy}{\dot{y}} \quad ; \quad \frac{\dot{y}d\dot{y}}{k_1 - k_2\dot{y}^2} = dy$$

Integrando si ha:

$$-\frac{1}{2k_2} \frac{d(k_1 - k_2\dot{y}^2)}{k_1 - k_2\dot{y}^2} = dy \quad -\frac{1}{2k_2} \int_0^v \frac{d(k_1 - k_2\dot{y}^2)}{k_1 - k_2\dot{y}^2} = \int_{y_0}^{y_1} dy = y_1$$

$$-\frac{1}{2k_2} \ln \frac{(k_1 - k_2\dot{y}_{t=t_1}^2)}{(k_1 - k_2\dot{y}_{t=0}^2)} = y_1$$

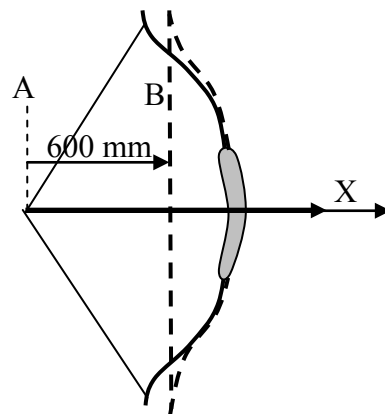
Ricordando che

$$k_1 = 0,981 \quad k_2 = 0,013 \quad y_1 = 200 \text{ m} \quad y_0 = 0 \quad \dot{y}_0 = 0$$

$$-\frac{1}{2 \cdot 0,013} \ln \frac{(0,981 - 0,013 \dot{y}_{t=t_1}^2)}{0,981} = 200$$

$$0,013 \dot{y}_{t=t_1}^2 = 0,981 * (1 - e^{-2 \cdot 0,013 \cdot 200})$$

$$v = \sqrt{\frac{0,981 * (1 - e^{-2 \cdot 0,013 \cdot 200})}{0,013}} = 8,66 \text{ m/s}$$



- In una gara di tiro all'arco l'accelerazione della freccia varia linearmente con la distanza  $s$  dal suo valore iniziale di  $4800 \text{ m/s}^2$  in A al rilascio dell'arco, sino a zero in B, dopo una corsa di  $600 \text{ mm}$ . Calcolare la velocità massima della freccia. *Risposta.*  $53,7 \text{ m/s}$ .

*Soluzione*

Si tratta di un problema nel quale l'accelerazione dipende dalla posizione. È facile osservare che, assumendo che la legge di variazione dell'accelerazione con la posizione della freccia sia lineare si abbia:

$$a = \frac{dv}{dt} = 4800(1 - \frac{x}{0,6}) \quad ; dv = 4800(1 - \frac{x}{0,6}) dt = 4800(1 - \frac{x}{0,6}) \frac{dx}{v}$$

$$v dv = 4800(1 - \frac{x}{0,6}) dx$$

Integrando la relazione precedente si ha:

$$\int_0^v v dv = \frac{1}{2} v^2 = \int_0^{0,6} 4800(1 - \frac{x}{0,6}) dx \quad v = \sqrt{2(4800 * 0,6 - \frac{4800}{2} * \frac{0,6^2}{0,6})} =$$

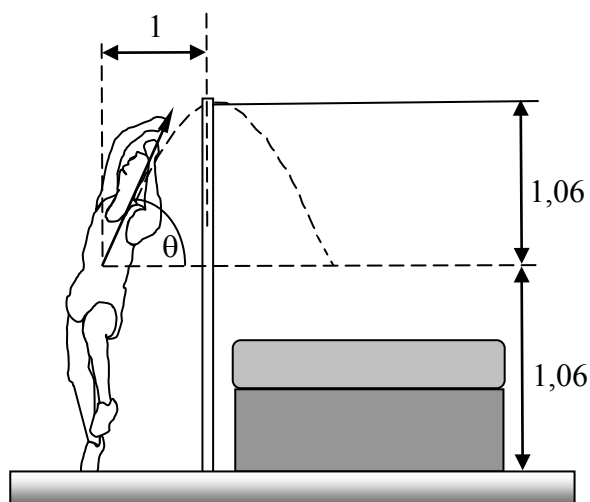
$$= \sqrt{4800 * 0,6} = 53,66 \text{ m/s}$$

- Il baricentro di un saltatore in alto segue la traiettoria in figura. Determinare la velocità  $v_0$  al distacco e l'angolo  $\theta$ , se il culmine della traiettoria è appena al disopra dell'asta.

*Risposta.*  $\theta = 64,7^\circ$ ;  $v_0 = 5,03 \text{ m/s}$ .

*Soluzione*

Possiamo considerare il moto del saltatore come quello di un punto materiale la cui velocità iniziale sia  $v_0$ , inclinata dell'angolo  $\theta$  sull'orizzontale. La traiettoria è un arco di parabola tangente alla sommità con l'asta orizzontale da superare nel salto. Si ha quindi:



$$x = v_0 \cos \theta * t \quad y = v_0 \sin \theta * t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta \quad \dot{y} = v_0 \sin \theta - g t$$

Al momento del passaggio dell'asticella si ha  $x = 1$  e  $y = 1,06$  per cui:

$$0 = v_0 \sin \vartheta - g t_1 \quad t_1 = \frac{v_0 \sin \vartheta}{g}$$

$$y_{t=t_1} = \left( \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{g^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{g} = 1,06$$

$$x_{t=t_1} = v_0 \cos \vartheta * \frac{v_0 \sin \vartheta}{g} = \frac{v_0^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{g}$$

Dividendo membro a membro le relazioni precedenti si ottiene:

$$\tan \vartheta = 2 * 1,06 \quad \vartheta = 64,7^\circ$$

$$e \quad 0 = v_0 \sin \vartheta - \frac{g * 2 * 1,06}{v_0 \sin \vartheta} \quad da \quad cui \quad v_0 = \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{2 * g * 1,06} = 5,03 \, m/s$$

- Un piccolo aeroplano vola orizzontalmente con una velocità di 300 km/h a una quota di 120 m sopra una valle alpina per lanciare medicinali d'emergenza in A. Il pacco ha un paracadute che si apre in B e permette la discesa verticale dei medicinali alla velocità costante di 1,8 km/h. Se il lancio è pianificato in modo tale che il pacco raggiunge il suolo dopo 37 s dopo il rilascio in A, determinare la distanza di anticipo orizzontale in modo tale che il pacco centri il punto d'atterraggio. Trascurare la resistenza dell'aria.

*Soluzione*

Anche in questo caso possiamo considerare che il moto del pacco con paracadute sia assimilabile al moto di un punto materiale la cui componente orizzontale di velocità iniziale è eguale alla velocità dell'aereo. Il moto del pacco è composto di due fasi. Da A a B il pacco compie una traiettoria balistica con le componenti di velocità

$$v_x = 300 / 3,6 = 83,3 \, m/s \quad v_y = g t$$

da B al punto di contatto col suolo il pacco cade con velocità costante di  $1,8 / 3,6 = 0,5 \, m/s$ . Il problema è quindi risolto impostando le equazioni:

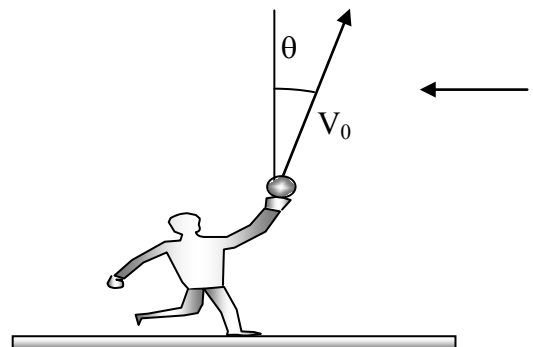
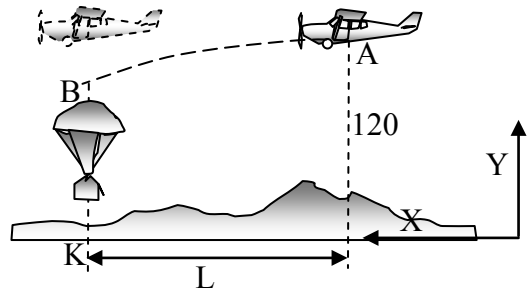
$$x_B - x_A = 83,3 * t_{AB} = L \quad y_B = 0,5 * t_{BK} \quad t_{AB} + t_{BK} = 37$$

$$120 - y_B = \frac{1}{2} 9,81 * t_{AB}^2$$

Si tratta di quattro equazioni nelle quattro incognite  $t_{AB}$ ,  $t_{BK}$ ,  $y_B$ ,  $L$ . Si ha con semplici operazioni:

$$\frac{1}{2} 9,81 * t_{AB}^2 + 0,5 * (37 - t_{AB}) = 120 \quad ; \quad 4,91 * t_{AB}^2 - 0,5 * t_{AB} - 111,5 = 0$$

$$t_{AB} = 4,82 \, s \quad L = 83,3 * 4,82 = 401,2 \, m$$



- Un ragazzo lancia una palla verso l'alto con un'inclinazione  $\theta$  rispetto alla verticale e una velocità di 12 m/s. Il vento produce un'accelerazione orizzontale di  $0,4 \text{ m/s}^2$  verso sinistra. Con quale angolo deve essere lanciata la palla perché ritorni al punto di partenza?  
*Risposta.*  $\theta = 2,33^\circ$ .

#### Soluzione

Si tratta di un problema di moto accelerato. Scrivendo separatamente le espressioni del moto accelerato per la componente x e y si ha:

$$\begin{aligned} v_x &= 12 \sin \theta - 0,4 * t & v_y &= 12 \cos \theta - gt \\ x &= 12 \sin \theta t - \frac{1}{2} 0,4 * t^2 & y &= 12 \cos \theta t - \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned}$$

la palla raggiungerà la massima altezza quando la componente  $v_y$  della velocità si annulla, al tempo  $t_1$  dato dall'espressione:

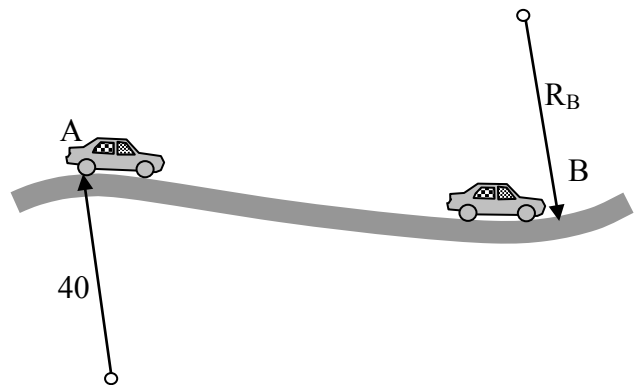
$$0 = 12 \cos \theta - gt_1 \quad t_1 = \frac{12 \cos \theta}{g}$$

È facile osservare che il tempo totale necessario per la salita e la discesa della palla è  $2*t_1$  perché determinato dalla componente verticale della velocità. Sostituendo questo tempo nell'espressione della componente x e imponendo l'annullamento di questa si ha:

$$x = 12 \sin \theta 2t_1 - \frac{1}{2} 0,4 * 4t_1^2 = 12 \sin \theta * 2 * \frac{12 \cos \theta}{g} - \frac{1}{2} 0,4 * 4 * \frac{12^2 \cos^2 \theta}{g^2} = 0$$

$$\text{da cui } \tan \theta = \frac{0,4}{g} \quad \theta = 2,33^\circ$$

- La velocità di un'auto aumenta uniformemente col tempo da 50 km/h in A a 100 km/h in B nell'arco di 10 s. Il raggio di curvatura della strada in A è 40 m. Se il modulo dell'accelerazione complessiva dell'auto è lo stesso in B e in A calcolare il raggio di curvatura della strada in B. Il baricentro dell'auto dista 0,6 m dal fondo stradale. *Risposta.* 156,5 m.



#### Soluzione

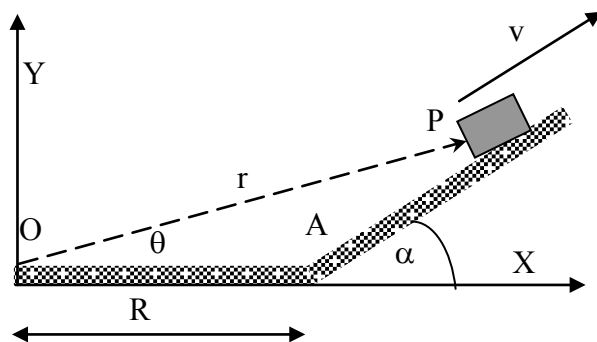
L'accelerazione nel punto A è la somma dell'accelerazione centripeta e di quella tangenziale:

$$a_A = \sqrt{a_{cA}^2 + a_{tA}^2} = \sqrt{\left( \frac{\left( \frac{50}{3,6} \right)^2}{40,6} \right)^2 + \left( \frac{100 - 50}{3,6 * 10} \right)^2} = 4,95 \text{ m/s}^2$$



Nel punto B si ha

$$a_B = a_{cB} = \frac{\left(\frac{100}{3,6}\right)^2}{R_B - 0,6} = 4,95 \text{ m/s}^2 \quad R_B = 156,47 \text{ m}$$



- Il piccolo blocco P parte da fermo al tempo  $t = 0$  in corrispondenza del punto A e sale sul piano inclinato con accelerazione costante. Determinare  $\dot{r}$  in funzione del tempo. R.

$$\dot{r} = \frac{0,5at(2R \cos \alpha + at^2)}{\sqrt{(R^2 + Rat^2 \cos \alpha + \frac{1}{4}a^2t^4)}}$$

*Soluzione*

Si indichi con  $s$  lo spazio percorso dal blocco sul piano inclinato. Questo spazio è espresso in funzione del tempo e dell'accelerazione dall'espressione:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

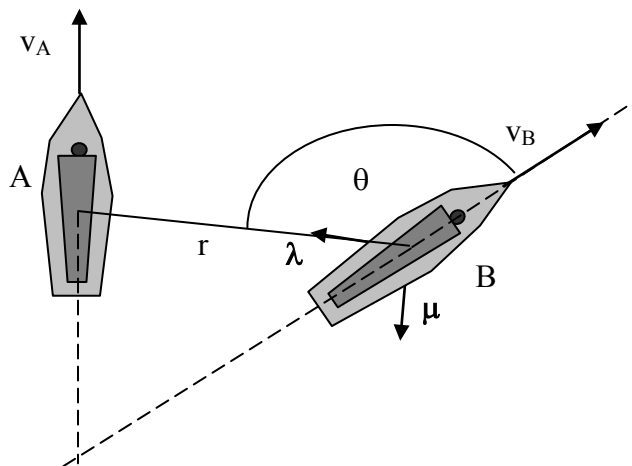
Utilizzando il teorema di Carnot la distanza  $r$  si può esprimere mediante la relazione:

$$r^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}at^2\right)^2 + 2R * \frac{1}{2}at^2 * \cos \alpha$$

Derivando si ha:

$$2r\dot{r} = 2 * \frac{1}{2}at^2 * at + 2R \cos \alpha \frac{1}{2}a * 2t$$

$$\dot{r} = \frac{0,5at(2R \cos \alpha + at^2)}{\sqrt{(R^2 + Rat^2 \cos \alpha + \frac{1}{4}a^2t^4)}}$$



*Moto relativo*

- Due navi A e B si muovono con velocità costante  $v_A$ ,  $v_B$  lungo rotte che si intersecano. Il timoniere di B nota la velocità di variazione della distanza  $r$  tra le navi e l'angolo di rilevamento  $\theta$ . Mostrare che  $\ddot{g} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$   $\ddot{r} = r\dot{\theta}^2$ .

*Soluzione*

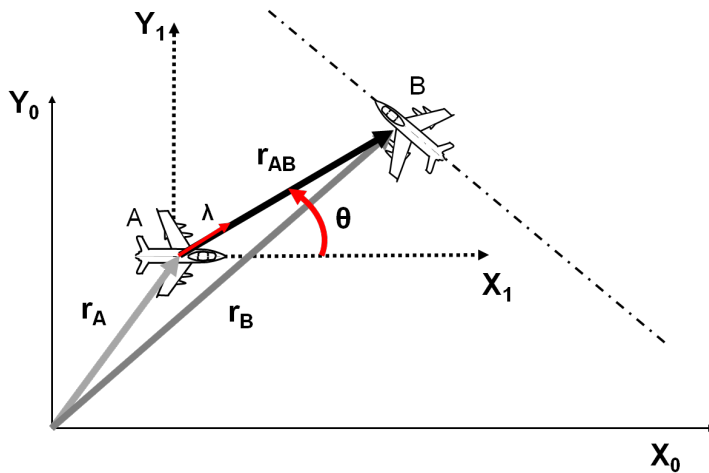
Osserviamo che rispetto alla nave B la posizione della nave A in coordinate polari è definita dalle due coordinate  $r, \theta$ . Per i teoremi del moto relativo, l'accelerazione assoluta di A è data dalla somma dell'accelerazione di trascinato, nulla per la supposta costanza di  $v_B$ , dell'accelerazione relativa e di quella di Coriolis. La somma di queste componenti deve essere nulla per la supposta costanza di  $v_A$ .

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad \text{cioè} \quad 0 = 0 + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

Poiché sia la componente secondo  $\lambda$  che quella secondo  $\mu$  devono essere nulle perché il vettore complessivo sia nullo le due relazioni scritte sopra risultano provate.

#### Moto relativo tra due aerei

- Calcolare: Posizione e velocità assoluta dell'aereo B



$$r_{AB} = 5000 \text{ m}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$\omega = 0,1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\dot{r}_{AB} = 50 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$${}^0\mathbf{r}_A = \begin{Bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 0 \end{Bmatrix}; {}^0\mathbf{v}_A = \begin{Bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

#### Soluzione

Calcolo di  $\mathbf{r}_B$ :

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{r}_{AB} = \begin{Bmatrix} 5000 \cdot \cos(30) \\ 5000 \cdot \sin(30) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4330 \\ 2500 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_A = \begin{Bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_B = \begin{Bmatrix} 6330 \\ 5500 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4330 \\ 2500 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calcolo di  $\mathbf{v}_B$ . Velocità assoluta dell'aereo B può essere calcolata con due procedimenti equivalenti.

$$\mathbf{v}_B = \frac{d(\mathbf{r}_A)}{dt} + \frac{d(\mathbf{r}_{AB})}{dt} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} + \dot{r}_{AB} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{v}_B = \frac{d(\mathbf{r}_A)}{dt} + \frac{d(\mathbf{r}_{AB})}{dt} = \begin{Bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\rho \cdot \omega \cdot \sin(30) \\ \rho \cdot \omega \cdot \cos(30) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{r}_{AB} \cdot \cos(30) \\ \dot{r}_{AB} \cdot \sin(30) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43,5 \\ 458,0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

dove  $\rho = |\mathbf{r}_{AB}|$ .

NB: durante il volo il vettore posizione  $\mathbf{r}_{AB}$  varia in direzione e in modulo. La variazione di quest'ultimo deve essere tenuta in conto durante l'operazione di derivazione.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} + \frac{d(\mathbf{r}_{AB})}{dt} = \begin{Bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 5000 \cdot \cos(30) \\ 5000 \cdot \sin(30) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 50 \cdot \cos(30) \\ 50 \cdot \sin(30) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43,5 \\ 458,0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

*Velocità e accelerazione durante la corsa*

- Calcolare la posizione, la velocità e l'accelerazione assoluta del punto C rappresentativo della caviglia.

$$l_1 = \overline{OG} = 0,45 \text{ m}$$

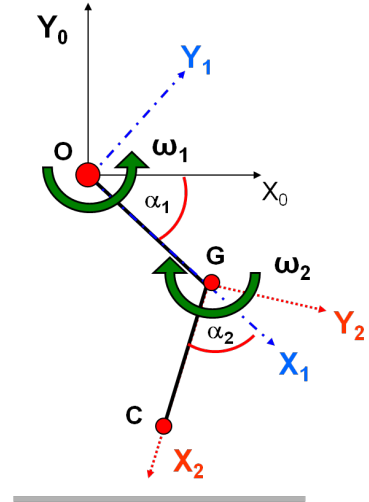
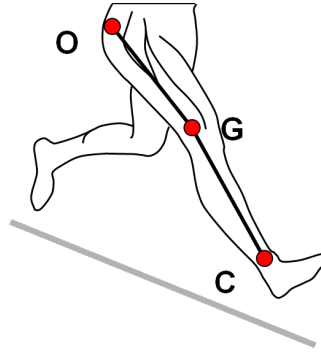
$$l_2 = \overline{GC} = 0,45 \text{ m}$$

$$\alpha_1 = 45^\circ$$

$$\alpha_2 = 60^\circ$$

$$\omega_1 = 1 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

$$\omega_2 = -0,5 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$



*Soluzione*

Calcolo di  $\mathbf{r}_C$ :

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_{OG} + \mathbf{r}_{GC}$$

dove:

$$\mathbf{r}_{OG} = \begin{Bmatrix} l_1 \cdot \cos(\alpha_1) \\ l_1 \cdot \sin(\alpha_1) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_{GC} = \begin{Bmatrix} l_2 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ l_2 \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_C = \begin{Bmatrix} 0,45 \cdot \cos(-45) \\ 0,45 \cdot \sin(-45) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,45 \cdot \cos(-45 - 60) \\ 0,45 \cdot \sin(-45 - 60) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,2011 \\ -0,7547 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calcolo della velocità assoluta del punto C:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{OG} + \mathbf{v}_{GC} = (\boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{r}_{OG} + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_{GC}$$

dove:

$$\omega_1 \times \mathbf{r}_{OG} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l_1 \cdot \cos(\alpha_1) \\ l_1 \cdot \sin(\alpha_1) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \cdot 0,45 \cdot \sin(-45) \\ 1 \cdot 0,45 \cdot \cos(-45) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(\omega_1 + \omega_2) \times \mathbf{r}_{GC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l_2 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ l_2 \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(1 - 0,5) \cdot 0,45 \cdot \sin(-45 - 60) \\ (1 - 0,5) \cdot 0,45 \cdot \cos(-45 - 60) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calcolo dell'accelerazione assoluta del punto C:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{OG} + \mathbf{a}_{GC} = (\boldsymbol{\omega}_1) \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{OG}) + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times [(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_{GC}]$$

dove:

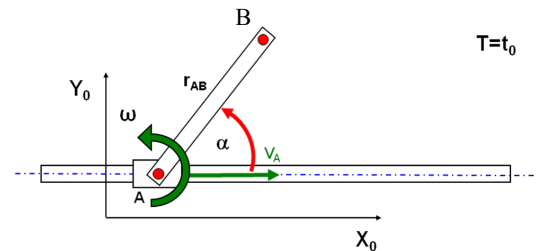
$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{OG} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -1 \cdot 0.45 \cdot \sin(-45) \\ 1 \cdot 0.45 \cdot \cos(-45) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \cdot 0.45 \cdot \cos(-45) \\ -1 \cdot 0.45 \cdot \sin(-45) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{v}_{GC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -(1-0.5) \cdot 0.45 \cdot \sin(-45-60) \\ (1-0.5) \cdot 0.45 \cdot \cos(-45-60) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.5 \cdot (1-0.5) \cdot 0.45 \cdot \cos(-45-60) \\ -0.5 \cdot (1-0.5) \cdot 0.45 \cdot \sin(-45-60) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_{OG} + \mathbf{r}_{GC} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0.2891 \\ -0.7529 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3182 \\ -0.3182 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.1165 \\ -0.4347 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{OG} + \mathbf{v}_{GC} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0.5355 \\ 0.2600 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3182 \\ 0.3182 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0273 \\ -0.0582 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{OG} + \mathbf{a}_{GC} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -0.2891 \\ 0.4269 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.3182 \\ 0.3182 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0291 \\ 0.1087 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



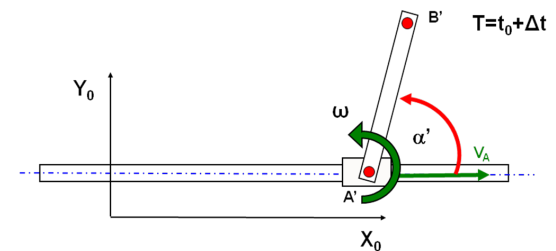
*Sistema in moto roto-traslatorio*

- Calcolare la posizione e velocità assoluta del punto B:

$$r_{AB} = 5 \text{ [m]} \text{ modulo di } \mathbf{r}_{AB}$$

$$\alpha = 35^\circ$$

$$\omega = 0.4 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$



$${}^0r_A = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; {}^0v_A = \begin{Bmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; .$$

*Soluzione*

Calcolo di  $\mathbf{r}_B$ :

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{r}_A = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_{AB} = \begin{Bmatrix} 5 \cdot \cos(35) \\ 5 \cdot \sin(35) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4,00 \\ 2,87 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_B = \begin{Bmatrix} 5,00 \\ 3,87 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4,00 \\ 2,87 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calcolo di  $\mathbf{v}_B$ :

$$\mathbf{v}_B = \frac{d(\mathbf{r}_A)}{dt} + \frac{d(\mathbf{r}_{AB})}{dt} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

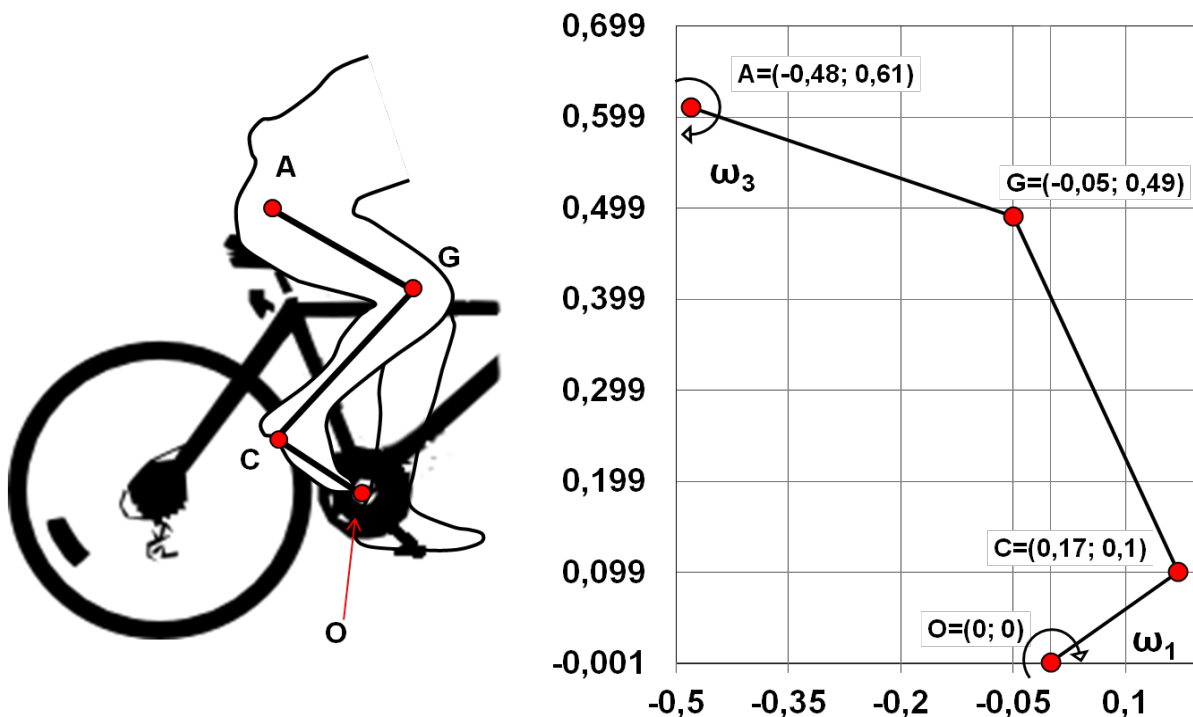
$$\frac{d(\mathbf{r}_A)}{dt} = \mathbf{v}_A = \begin{Bmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \frac{d(\mathbf{r}_{AB})}{dt} = \begin{Bmatrix} -r_{AB} \cdot \omega \cdot \sin(35) \\ r_{AB} \cdot \omega \cdot \cos(35) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,15 \\ +1,63 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_B = \begin{Bmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1,15 \\ 1,63 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,35 \\ 1,63 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

*Velocità e accelerazione durante la pedalata*

- Noto il valore di  $\omega_3 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ , calcolare e tracciare: Il centro istantaneo di rotazione e il valore di  $\omega_1$ ,  $v_G$ ,  $v_C$ ,  $a_C$ . - via grafica e via analitica

**Configurazione della gamba durante la pedalata**



### Soluzione

Definiamo i vettori rappresentativi dei vari segmenti:

$$\mathbf{OC} = \begin{Bmatrix} x_C - x_O \\ y_C - y_O \\ z_C - z_O \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.170 \\ 0.100 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{CG} = \begin{Bmatrix} x_G - x_C \\ y_G - y_C \\ z_G - z_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.220 \\ 0.390 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{AG} = \begin{Bmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.430 \\ -0.120 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le componenti della velocità della caviglia sono calcolate come:

$$\mathbf{v}_C = \omega_1 \times \mathbf{OC}$$

Le componenti dell'accelerazione della caviglia sono calcolate come:

$$\mathbf{a}_C = \omega_1 \times (\omega_1 \times \mathbf{OC}) = -\omega_1^2 \cdot \mathbf{OC}$$

Risolvendo il seguente sistema di equazioni siamo in grado di calcolare il valore di  $\mathbf{v}_G$ ,  $\mathbf{a}_G$ , rispettivamente velocità e l'accelerazione in corrispondenza dell'articolazione del ginocchio, delle velocità angolari  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  e delle rispettive derivate prime  $\dot{\omega}_2$  e  $\dot{\omega}_3$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_G = \mathbf{v}_C + \omega_2 \times \mathbf{GC} \\ \mathbf{v}_G = \omega_3 \times \mathbf{AG} \\ \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_C - \omega_2^2 \cdot \mathbf{CG} + \dot{\omega}_2 \cdot \mathbf{CG} \\ \mathbf{a}_G = -\omega_3^2 \cdot \mathbf{AG} + \dot{\omega}_3 \cdot \mathbf{AG} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

esplicitando le equazioni nelle loro componenti possiamo riscrivere il sistema come sotto:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{v}_G = \begin{Bmatrix} v_{Gx} \\ v_{Gy} \\ v_{Gz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \\ v_{Cz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_G - x_C \\ y_G - y_C \\ z_G - z_C \end{Bmatrix} \\ \\ \mathbf{v}_G = \begin{Bmatrix} v_{Gx} \\ v_{Gy} \\ v_{Gz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{Bmatrix} \\ \\ \mathbf{a}_G = \begin{Bmatrix} a_{Gx} \\ a_{Gy} \\ a_{Gz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \\ a_{Cz} \end{Bmatrix} - \omega_2^2 \cdot \begin{Bmatrix} x_G - x_C \\ y_G - y_C \\ z_G - z_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega}_2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_G - x_C \\ y_G - y_C \\ z_G - z_C \end{Bmatrix} \\ \\ \mathbf{a}_G = \begin{Bmatrix} a_{Gx} \\ a_{Gy} \\ a_{Gz} \end{Bmatrix} &= -\omega_3^2 \cdot \begin{Bmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega}_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{Bmatrix} \end{aligned} \right.$$

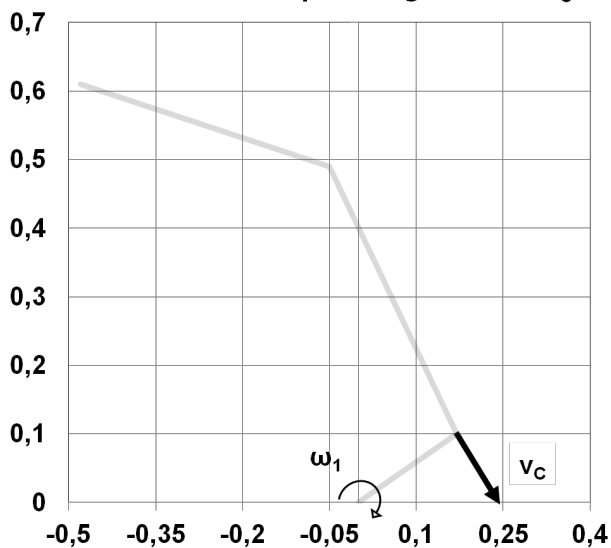
Risultati:

$$\mathbf{v}_C = \begin{Bmatrix} 0,100 \\ -0,173 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v}_G = \begin{Bmatrix} -0,077 \\ -0,275 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,454 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,640 \end{Bmatrix}$$

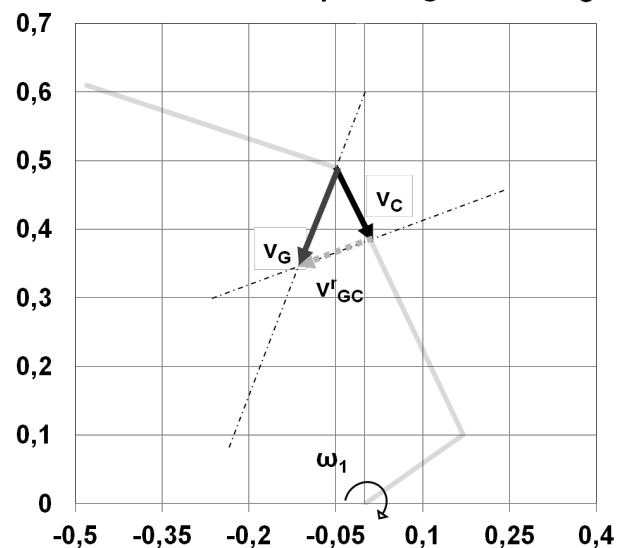
$$\mathbf{a}_C = \begin{Bmatrix} -0,173 \\ -0,100 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_G = \begin{Bmatrix} -0,262 \\ -0,258 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,347 \end{Bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,717 \end{Bmatrix}$$

Risoluzione per via grafica.

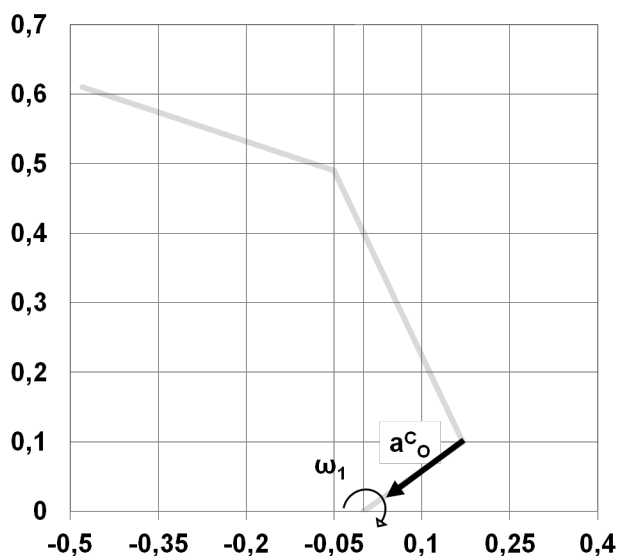
Determinazione per via grafica di  $V_C$



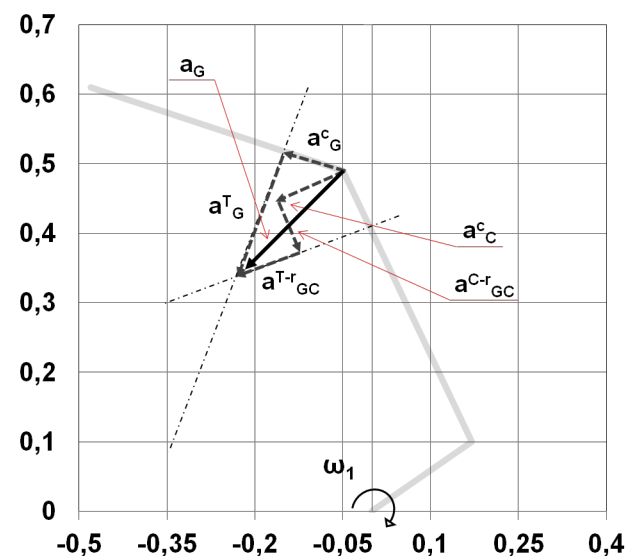
Determinazione per via grafica di  $V_G$



Determinazione per via grafica di  $a_C$

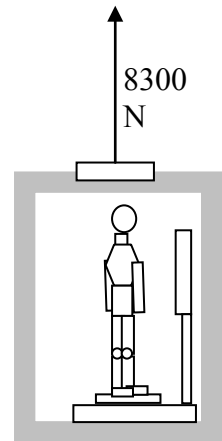


Determinazione per via grafica di  $a_G$



### Equilibrio dinamico

- Una persona di massa pari a 75 kg sta in piedi sopra una bilancia all'interno di un ascensore. Durante i primi 3 s del moto a partire dalla quiete la tensione dei cavi è pari a 8300 N. Trovare il valore in N letto sulla bilancia in questo intervallo di tempo e la velocità verso l'alto dell'ascensore alla fine dei 3 s. La massa totale del sistema, ascensore, persona e bilancia è pari a 750 kg. *Risposta.*  $P=830 \text{ N}$ ;  $v = 3,77 \text{ m/s}$ .



### Soluzione

La forza esercitata dal cavo è eguale alla somma dei pesi sospesi e delle forze d'inerzia, si ha cioè:

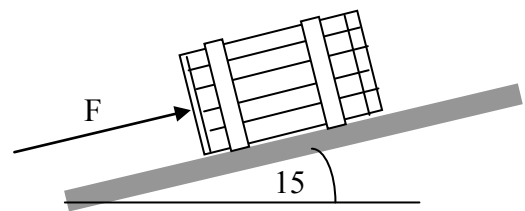
$$8300 = 750 \cdot (a + g)$$

$$a = 1,27 \text{ m/s}^2$$

la velocità dopo 3s e l'indicazione della bilancia in N si ottengono dalle relazioni:

$$v = 1,27 \cdot 3 = 3,77 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad P = 75 \cdot (g + 1,27) = 830 \text{ N}.$$

- La cassa del peso di 50 kg è ferma quando viene applicato il carico. Determinare l'accelerazione della cassa quando  $F = 0$ ,  $F = 150 \text{ N}$  e  $F = 300 \text{ N}$ . Il coefficiente d'attrito di primo distacco  $f_s = 0,20$ , quello durante lo scorrimento della cassa  $f = 0,15$ .



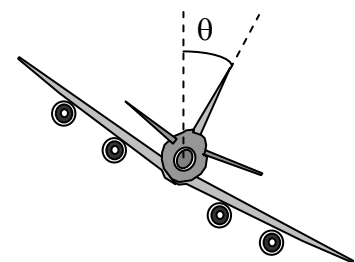
### Soluzione

Per  $F = 0$  si ha  $15^\circ > \varphi_a = \arctan(0,2) = 11,31^\circ$ . La cassa tenderà quindi a muoversi verso il basso con accelerazione pari a  $\frac{P \sin(15^\circ) - f \cdot P \cos(15^\circ)}{50} = 1,12 \text{ m/s}^2$ . Per gli altri valori di  $F$  si ha:

$$\frac{-150 - 0,15 \cdot P \cos(15^\circ) + P \sin(15^\circ)}{50} = -1,88 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{-300 - 0,15 \cdot P \cos(15^\circ) + P \sin(15^\circ)}{50} = -4,88 \text{ m/s}^2$$

- Determinare il corretto angolo  $\theta$  per un velivolo che vola a 600 km/h e compie una virata con raggio di 3 km. Si noti che la forza di portanza esercitata dall'aria sulle ali è normale alle superfici di queste. *Risposta.*  $\theta = 43,3^\circ$ .





### Soluzione

Le tre forze che agiscono sul baricentro del velivolo sono il peso in direzione verticale verso il basso, la forza centrifuga diretta verso l'esterno della traiettoria e di modulo  $m \frac{v^2}{R}$  e la forza di portanza diretta perpendicolarmente alle superfici alari. Il valore dell'inclinazione si determina imponendo le equazioni di equilibrio in direzione orizzontale e verticale:

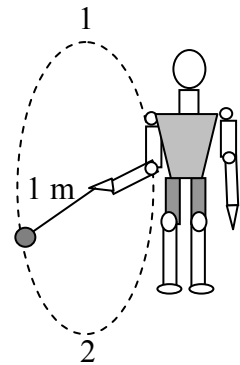
$$L \cos \vartheta - P = 0$$

$$L \sin \vartheta - \frac{mv^2}{R} = 0$$

dividendo:

$$\cot \vartheta = \frac{P}{\frac{mv^2}{R}} = \frac{g \cdot R}{v^2} = \frac{9,81 \cdot 3000}{\left(\frac{600}{3,6}\right)^2} = 1,06 \quad \vartheta = 43,3^\circ$$

- Un ragazzo fa ruotare una palla di massa 50 g attaccata a un filo di 1 m di lunghezza in modo tale che la palla tracci un cerchio nel piano verticale come mostrato in figura. Qual è la minima velocità che deve avere la palla nella posizione 1? Se questa velocità è mantenuta costante durante tutto il giro calcolare la tensione T del filo nel punto 2.



### Soluzione

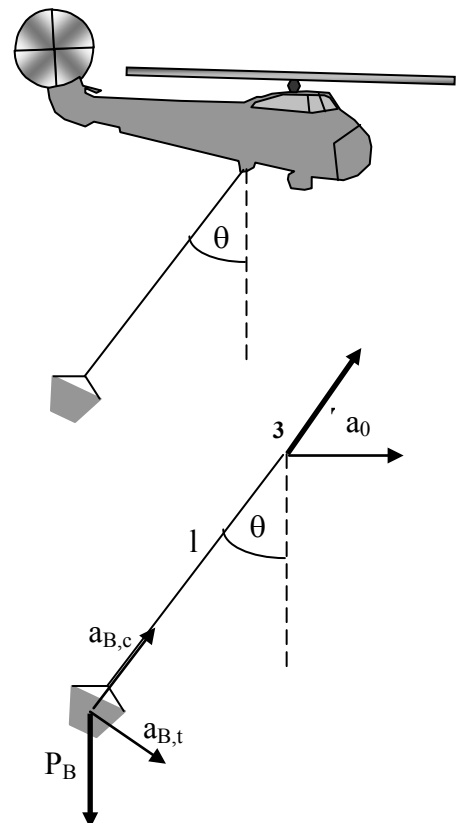
La minima velocità della palla nel punto 1 deve essere sufficiente a generare una forza centrifuga che equilibri il peso della palla. Si ha quindi:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g \quad v = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{9,81 \cdot 1} = 3,13 \text{ m/s}$$

Nel punto 2 la tensione del filo è pari a due volte il peso della palla, cioè:

$$T_2 = 2 \cdot 0,050 \cdot 9,81 = 0,981 \text{ N}$$

- Un elicottero antincendio staziona sopra un lago dove riempie il suo secchio d'acqua. Quindi si solleva lentamente e inizia un volo orizzontale, sostanzialmente da fermo, con un'accelerazione orizzontale  $a_0$ . Si ottenga un'espressione di  $\theta$  per la quale  $\dot{\theta}$  è massimo. Determinare anche la tensione T nel cavo come funzione di  $\theta$  e della massa del secchio riempito.



*Risposta.*  $\theta = 45^\circ, T = P \cos \vartheta + \frac{P}{g} \dot{\vartheta}^2 r$

#### Soluzione

In corrispondenza del secchio nasceranno due accelerazioni, la prima tangenziale  $a_{B,t}$ , la seconda centripeta  $a_{B,c}$ . Le espressioni delle accelerazioni sono le seguenti:

$$a_{B,c} = \dot{\vartheta}^2 l \quad a_{B,t} = a_0 \cos \vartheta - \ddot{\vartheta} l$$

Scrivendo le equazioni di equilibrio del secchio nella direzione del cavo di sospensione e nella direzione normale si ha:

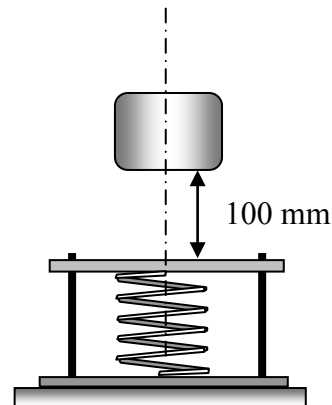
$$\begin{aligned} T &= m \dot{\vartheta}^2 l + P \cos \vartheta & P \sin \vartheta - m_B a_{B,t} &= \\ &= P \sin \vartheta - m(a_0 \cos \vartheta - \ddot{\vartheta} l) = 0 \\ \ddot{\vartheta} &= \frac{g}{l} \sin \vartheta - \frac{a_0}{l} \cos \vartheta \end{aligned}$$

Perché  $\dot{\vartheta}$  sia massimo dovrà essere  $\ddot{\vartheta} = 0$  quindi:

$$\tan \vartheta = \frac{a_0}{g} \quad \text{per} \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_{Max}$$

#### Energia potenziale elastica

- Un cilindro di 6 kg viene rilasciato da una posizione di riposo e cade sulla molla che è stata precaricata inizialmente con una corsa di 50 mm mediante il piattello vincolato mostrato in figura. Se la rigidezza della molla è 4 kN/m calcolare la compressione addizionale della molla provocata dalla caduta del cilindro, prima che questo rimbalzi. *Risposta.*  $\delta = 29,4 \text{ mm}$ .



#### Soluzione

Trascurando le azioni dissipative l'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla nell'istante di massima compressione è data dall'espressione:

$$U = \frac{1}{2} k \left( \frac{x_2^2}{2} - \frac{0,05^2}{2} \right) = 6 * 9,81 * (0,1 + x_2 - 0,05)$$

da cui si trae:

$$\begin{aligned} 4000x_2^2 - 117,7x_2 - 15,89 &= 0 & x_2 &= 0,0794 \text{ m} & \delta &= 0,0794 - 0,05 = 0,0294 \text{ m} = \\ &= 29,4 \text{ mm} \end{aligned}$$

### Urto

- Un palo di 500 kg è spinto da una mazza di 800 kg che cade da 3 m sull'estremità del palo. Il palo avanza di 6 mm e non si ha rimbalzo. Trovare la resistenza opposta alla penetrazione del palo, assunta costante, e l'energia dissipata nella deformazione della cima del palo.

### Soluzione

Osserviamo che la quantità di moto finale della mazza è nulla mentre quella posseduta dalla mazza un istante prima di colpire il palo è:

$$Q_1 = 500 * \sqrt{2 * 9,81 * 3} = 3836 \frac{kg * m}{s}$$

La quantità di moto posseduta dalla mazza viene trasferita al sistema mazza-palo che acquista una velocità al momento dell'impatto derivabile dalla relazione:

$$Q_1 = (m_p + m_m)v_2 \quad v_2 = \frac{3836}{(500 + 800)} = 2,95 \frac{m}{s}$$

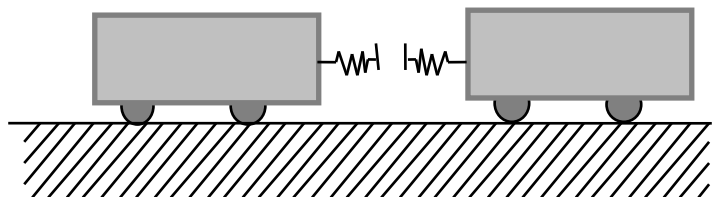
L'energia cinetica posseduta dal sistema mazza-palo si trasforma in lavoro della forza resistente per cui si ha.

$$\frac{1}{2} * 1300 * 2,95^2 = R * 0,006 \quad da \quad cui \quad R = 942.771 N$$

l'energia cinetica persa durante l'impatto è uguale a quella posseduta dalla mazza meno quella posseduta dal sistema mazza-palo subito dopo l'impatto cioè:

$$\Delta E = \frac{1}{2} * 500 * 7,67^2 - \frac{1}{2} * 1300 * 2,95^2 = 9058 J$$

- Il respingente all'estremità di un carro ferroviario ha una rigidità di 0,7 MN/m e si impegna con un respingente identico di un altro carro. Il primo carro ha una massa di 10000 kg e una velocità di 1.8 m/s, il secondo ha una massa di 15000 kg e una velocità di 0.6 m/s nella stessa direzione. Trovare:



- la velocità con cui i carri si muovono durante l'impatto;
- l'energia cinetica perduta dal sistema dei due carri nella fase d'impatto e la compressione di ciascun respingente per immagazzinarla;
- la velocità di ciascun carro alla separazione se solo metà dell'energia immagazzinata è restituita.

### Soluzione

Si applicherà il principio di conservazione della quantità di moto. Inizialmente, prima del contatto, si ha:

$$Q_1 = 10000 * 1,8 + 15000 * 0,6 = 27000 kg * \frac{m}{s}$$

Poiché la quantità di moto del sistema dei due carri resta costante se non esistono forze esterne al sistema che ne provochino la variazione, considerando l'istante in cui i respingenti subiscono la massima compressione e i due carri hanno la stessa velocità, si ha:

$$v_2 = \frac{Q_1}{m_1 + m_2} = \frac{27000}{25000} = 1,08 \frac{m}{s}$$

L'energia cinetica persa è:

$$\Delta E = \frac{1}{2} * (10000 * 1,8^2 + 15000 * 0,6^2) - \frac{1}{2} * 25000 * 1,08^2 = 4320 J$$

Poiché la rigidità di un respingente è 0,7 MN/m la rigidità complessiva dei due respingenti in serie e la compressione complessiva delle due molle sono:

$$K_{tot} = \frac{(0,7 * 10^6)^2}{1,4 * 10^6} = 350.000 \frac{N}{m} \quad \frac{1}{2} * 350.000 * \delta^2 = 4320$$

$$\delta = \sqrt{\frac{4320}{175.000}} = 0,157 m$$

La compressione di ciascun respingente è pari a  $\delta/2$ . Una volta raggiunta la massima compressione dei respingenti, l'energia elastica in essi immagazzinata viene restituita nella misura del 50 % ai carri. Quello che si trova davanti viene accelerato dalla velocità  $v_2$  comune dei due carri alla velocità  $v_2 + \Delta v$ , quello che si trova dietro viene portato alla velocità  $v_2 - \Delta v$ . Si ha anche:

$$\frac{1}{2} 4320 = \frac{1}{2} (m_2 - m_1) \Delta v^2 \quad \Delta v = \sqrt{\frac{4320}{5000}} = 0,93 \frac{m}{s}$$

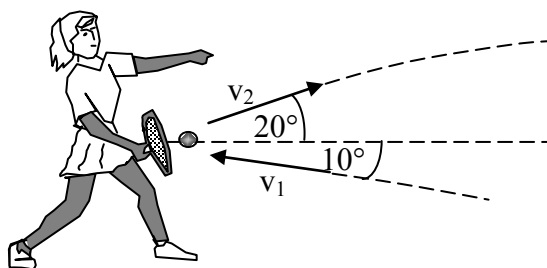
Il carro anteriore alla separazione avrà quindi la velocità di 2,01 m/s, quello posteriore di 0,15 m/s.

- Una tennista colpisce la palla, mentre questa sta ancora salendo. La velocità della palla prima del colpo è  $v_1 = 15$  m/s e dopo il colpo è  $v_2 = 22$  m/s con la direzione mostrata in figura. Se la palla di 60 g. è in contatto con la racchetta per 0,05 s, determinare il modulo della forza media scambiata e l'angolo che essa forma con l'orizzontale. *Risposta.*  $F = 43$  N,  $\alpha = 8,68^\circ$ .

*Soluzione*

Ricordiamo che tra la forza agente sulla palla durante l'impatto e la sua quantità di moto sussiste la relazione

$$\int_0^t F dt = \int_0^t \frac{dQ}{dt} dt = Q_2 - Q_1$$



Se ammettiamo che la forza scambiata durante l'impatto sia costante e che la durata dell'impatto sia pari a 0,05 s, scomponendo la relazione precedente in due relazioni scalari nelle direzioni orizzontale e verticale si ha:

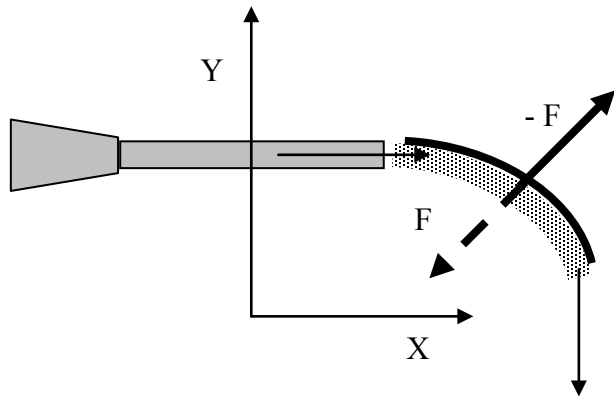
$$F_x = 0,06 * \frac{22 * \cos(20) + 15 * \cos(10)}{0,05} = 42,5 \text{ N}$$

$$F_y = 0,06 * \frac{22 * \sin(20) - 15 * \sin(10)}{0,05} = 6,48 \text{ N}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = 8,67^\circ \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 43 \text{ N}$$

L'esercizio si può risolvere facilmente ricorrendo a una semplice costruzione grafica, consistente nel tracciare due vettori in scala corrispondenti alle quantità di moto della palla prima e dopo l'impatto e fare la differenza dei due vettori dividendo poi questa differenza per la durata dell'impatto. Si lascia al lettore questo esercizio.

- Un getto d'acqua di portata 30 kg/s e velocità 40 m/s incide su una paletta avente un profilo corrispondente a un quarto di circonferenza. Il getto fuoriesce con la stessa velocità ma in direzione verticale dalla paletta. Calcolare la spinta del getto sulla pala.



#### Soluzione

Anche in questo caso abbiamo a che fare con un getto d'acqua che subisce una variazione della sua quantità di moto, soltanto in direzione e non in modulo. Nell'unità di tempo la quantità di moto entrante nella paletta ha la direzione orizzontale e vale:

$$Q_x = 30 * 40 = 1200 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

quella uscente è diretta secondo y e vale:

$$Q_y = -30 * 40 = -1200 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Utilizzando la relazione che lega le componenti della quantità di moto alle componenti della spinta (vedi l'esercizio precedente), si ottiene:

$$F_x = \frac{0 - Q_x}{1} = -1200 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} * \frac{1}{\text{s}} = -1200 \text{ N}$$

$$F_y = \frac{Q_y - 0}{1} = -1200 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} * \frac{1}{\text{s}} = -1200 \text{ N}$$

È molto importante osservare che le componenti ricavate sono quelle che la paletta trasmette alla porzione di massa d'acqua con cui viene a contatto nell'unità di tempo. Si tratta di una forza agente in direzione diagonale, rappresentata dal vettore tratteggiato in figura, di modulo:

$$F = 1200 * \sqrt{2} = 1692 \text{ N}$$

La forza  $-F$  trasmessa dall'acqua alla pala è invece un vettore uguale in modulo e opposto in direzione al vettore precedente. È rappresentato in figura con linea continua.

- L'auto B è inizialmente ferma ed è colpita dall'auto A che si muove con velocità  $v$ . La massa della macchina B è  $pm$ , dove  $m$  è la massa della macchina A e  $p$  è una costante positiva. Se il

coefficiente di restituzione è  $e = 0,1$  trovare le espressioni delle velocità delle due vetture dopo la collisione, in funzione di  $p$  e  $v$ . Si valutino le espressioni trovate per  $p = 0,5$ .



*Soluzione*

Applicando le relazioni:

$$v_1^+ = \frac{(m_1 - em_2)v_1^- + m_2(1+e)v_2^-}{m_1 + m_2}$$

$$v_2^+ = \frac{(m_2 - em_1)v_2^- + m_1(1+e)v_1^-}{m_1 + m_2}$$

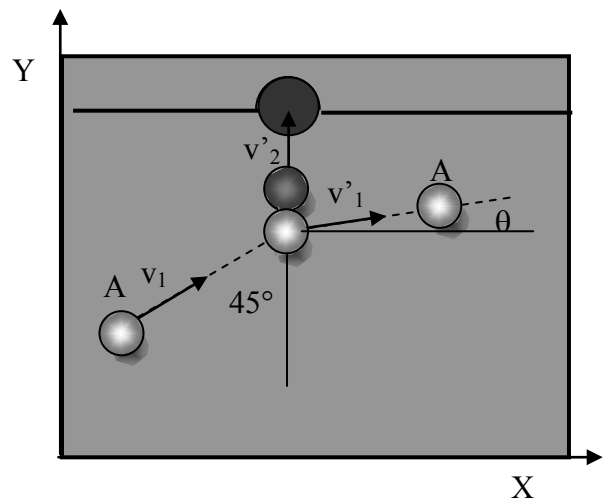
Si ottiene

$$v_1^+ = \frac{(1-0,1p)v}{(1+p)} \quad v_2^+ = \frac{(1,1)v}{(1+p)}$$

: per  $p = 0,5$

$$v_1^+ = \frac{(1-0,1*0,5)v}{(1,5)} = 0,63v \quad v_2^+ = \frac{(1,1)v}{(1,5)} = 0,73v$$

- Nel gioco del biliardo la palla A deve colpire di striscio il pallino nella posizione mostrata in figura per mandarla nella buca con la velocità  $v'_2$ . La palla A ha una velocità  $v_1$  prima dell'impatto e una velocità  $v'_1$  dopo l'impatto. Il coefficiente di restituzione è  $0,9$ . Ambedue le palle hanno la stessa massa e lo stesso diametro. Calcolare l'angolo di rimbalzo  $\theta$  e la frazione di energia cinetica che viene persa in seguito all'impatto. *Risposta.*  $\theta = 2,86^\circ$ ;  $\Delta E/E = 0,0475$ .



*Soluzione*

Per risolvere il problema è necessario estendere le leggi dell'urto, come le abbiamo conosciute sino a ora, al caso in cui le velocità dei due corpi che entrano in collisione cambiano anche in direzione oltre che in modulo. Se osserviamo che, durante l'urto, la forza mutua che nasce alla collisione è diretta secondo  $Y$ , deduciamo che possiamo ancora applicare la legge di conservazione della quantità di moto alla direzione  $Y$ , scrivendo:

$$v_1 \sin(45) = v'_1 \sin(\theta) + v'_2$$

Nella direzione X non nascono forze di collisione pertanto la legge di conservazione della quantità di moto vale per la singola palla. Per la palla A si ha quindi:

$$v_1 \cos(45) = v'_1 \cos(\vartheta)$$

Infine possiamo applicare, sempre in direzione y la legge che esprime il coefficiente di restituzione in funzione delle velocità ottenendo:

$$e = -\frac{v'_1 \sin(\vartheta) - v'_2}{v_1 \sin(45)} = 0,9$$

Le relazioni precedenti risolvono il problema poiché si ottiene:

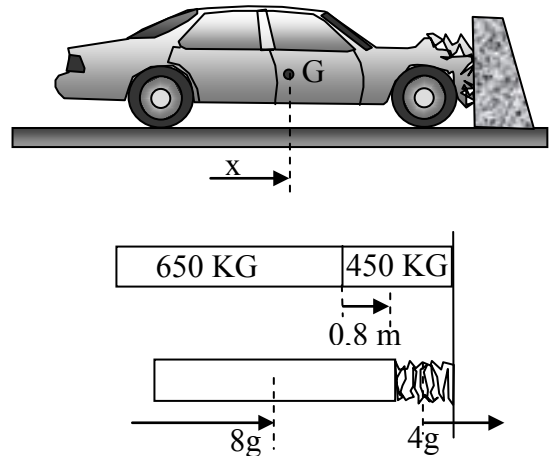
$$v'_1 \sin(\vartheta) + v'_2 = v_1 \sin(45) \quad v'_1 \sin(\vartheta) - v'_2 = -0,9 * v_1 \sin(45)$$

$$2v'_1 \sin(\vartheta) = 0,1 * v_1 * \sin(45) \quad v'_1 \cos(\vartheta) = v_1 \cos(45)$$

$$2 * \tan(\vartheta) = 0,1 \quad \vartheta = 2,86^\circ \quad v'_1 = \frac{0,1 * v_1 * \sin(45)}{2 \sin(\vartheta)} = 0,708 v_1$$

$$v'_2 = v'_1 \sin(\vartheta) + 0,9 * v_1 \sin(45) = 0,671 * v_1 \quad \frac{\Delta E}{E} = 1 - 0,671^2 + 0,708^2 = 0,049$$

- La macchina per prove di collisione della figura viene analizzata dopo un esperimento nel quale la velocità della vettura all'impatto era di 38,9 km/h. La massa della vettura era di 1100 kg e il suo frontale si accorcia nell'urto di 0,8 m. Si calcoli la forza media scambiata con l'ostacolo durante l'urto. Poiché la barriera è immobile, come prima approssimazione si consideri l'auto formata da due parti. La parte non danneggiata trasla di 0,8 m durante l'urto con una decelerazione media di 8g. La parte danneggiata ha una massa di 450 kg e la sua decelerazione è di 4g. Determinare la forza scambiata durante l'urto, analizzando le due parti separatamente e trovare la perdita d'energia durante l'urto. Si consideri prima di tutto che la parte anteriore della vettura ha un'accelerazione media di 8g, quindi per passare dalla velocità di  $38,9/3,6 = 10,8$  m/s alla velocità nulla impiega:



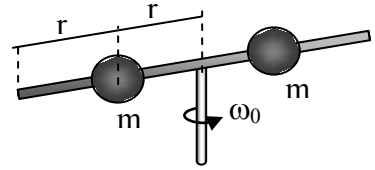
$$t = \frac{10,8}{4g} = 0,28 \text{ s}$$

Durante l'urto la parte anteriore della vettura è soggetta alla forza trasmessa dall'ostacolo rivolta verso la parte posteriore e alla forza d'inerzia della parte posteriore, eguale a  $650 * 8 * 9,81 = 51012$  N. Scrivendo che la variazione della quantità di moto è eguale all'impulso delle forze esterne agenti, si ha:

$$Q_2 - Q_1 = 0 - 450 * 10,8 = (650 * 8 * 9,81 - F_c) * 0,28 = 6,84 * 10^4 \text{ N}$$

### Conservazione del momento della quantità di moto

- Le due sfere di massa eguale possono anche scorrere lungo la guida radiale. Se esse sono inizialmente poste alla distanza  $r$  dall'asse di rotazione con il sistema rotante con velocità angolare  $\omega_0$ , trovare il nuovo valore della velocità angolare dopo che le sfere vengono rilasciate e si portano al raggio  $2r$ . Trovare anche la frazione d'energia cinetica che viene persa in questa operazione. Si trascuri la piccola porzione di energia cinetica posseduta dalle aste.  
*Risposta.*  $\omega = \omega_0/4$ ;  $\Delta E/E = 0,75$ .



### Soluzione

Vale il principio di conservazione del momento angolare per cui si ha:

$$J_1 \omega_0 = J_2 \omega_2 \quad \text{con} \quad J_1 = 2m \cdot r^2 \quad J_2 = 2m \cdot 4r^2 = 8mr^2$$

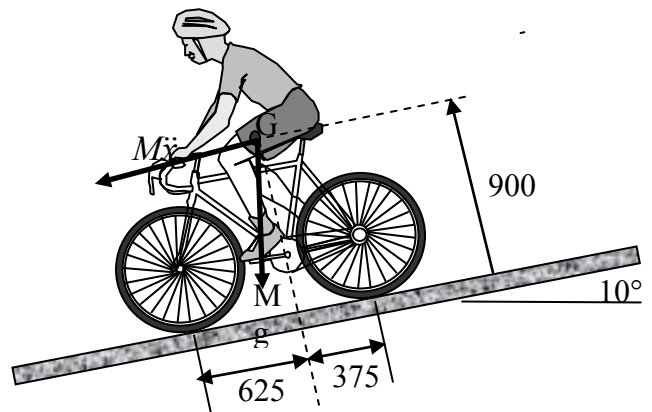
$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2} \omega_0 = \frac{\omega_0}{4}$$

La perdita relativa di energia cinetica vale:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}(J_0 \omega_0^2 - J_1 \omega_1^2)}{\frac{1}{2} J_0 \omega_0^2} = \frac{(2mr^2 - \frac{8mr^2}{16})}{2mr^2} = 0,75$$

### Equilibrio dinamico

- Il ciclista frena durante la discesa su un pendio inclinato di  $10^\circ$ . Quale decelerazione potrebbe causare la possibilità di ribaltamento in avanti, intorno alla ruota anteriore? Il baricentro dell'intero sistema ciclista più bici è in G. *Risposta.*  $0,510 \text{ g}$ .

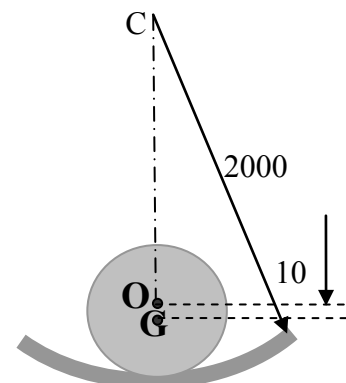


### Soluzione

Nel baricentro del sistema ciclo-ciclista sono applicate la forza peso, verticale e diretta verso il basso, di modulo  $Mg$  e la forza d'inerzia diretta secondo la direzione di marcia della bici, di modulo  $M\ddot{x}$ . In caso di incipiente ribaltamento la reazione vincolare sulla ruota posteriore viene a mancare per cui scrivendo l'equazione di equilibrio dinamico alla rotazione rispetto al punto di contatto della ruota anteriore col terreno si ha:

$$-Mg \cdot \cos(10) \cdot 0,625 + (M\ddot{x} + Mg \cdot \sin(10)) \cdot 0,9 = 0$$

$$\ddot{x} = g \cdot \frac{(\cos(10) \cdot 0,625 - 0,9 \cdot \sin(10))}{0,9} = 0,51g$$





- Il baricentro del disco di massa 10 kg e raggio 150 mm è fuori asse di 10 mm. Se G è nella posizione indicata in figura quando la ruota rotola senza strisciare sul fondo della guida, con velocità angolare di 10 rad/s, calcolare la forza P scambiata tra la ruota e la guida. *Risposta.* P = 100,3 N.

#### Soluzione

Per calcolare l'accelerazione del punto O è richiesta l'accelerazione di O che percorre una traiettoria circolare intorno a C con velocità angolare:

$$\omega_1 = \frac{10 * 0,15}{1,85} = 0,811 \frac{rad}{s}$$

L'accelerazione di O è quindi puramente centripeta, diretta da O verso C e di modulo  $a_O = 0,811^2 * 1,85 = 1,22 \frac{m}{s^2}$ . L'accelerazione di G è la somma di quella di O e dell'accelerazione nel moto relativo di G rispetto a o:

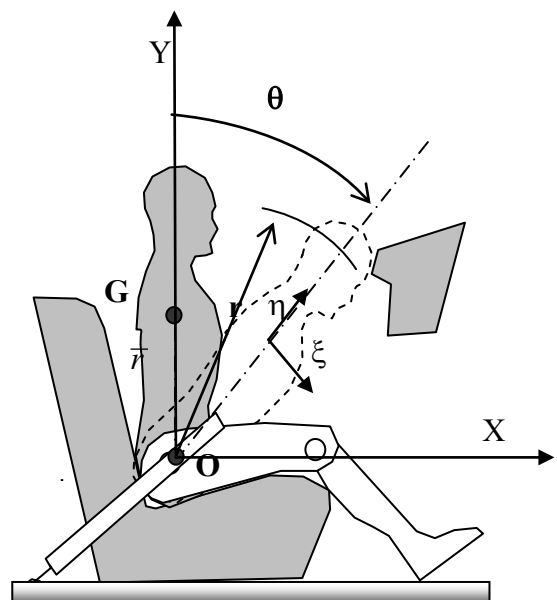
$$a_G = 1,22 - 10^2 * 0,01 = 0,22 \frac{m}{s^2}$$

La forza esercitata dal disco sulla guida è quindi uguale al peso del disco meno la forza d'inerzia del disco, cioè:

$$F = -P - 0,22 * 10 = 98,1 + 2,2 = 100,3 N$$

Si osservi che l'accelerazione del baricentro del disco è rivolta verso l'alto, quindi la forza d'inerzia del disco si somma alla sua forza peso.

- In uno studio del danno fisico durante l'impatto della testa contro il pannello della strumentazione durante arresti improvvisi o incidenti, nel quale vengono usate cinture alla vita senza passanti sul torace, viene analizzato il modello umano della figura. L'anca viene assunta come fissa rispetto alla macchina e il torso sopra l'anca viene considerato come un corpo rigido di massa m ruotante liberamente intorno a o. Il centro di gravità del torso è G con il segmento OG verticale al momento dell'impatto. Il raggio d'inerzia del torso intorno a o sia  $k_0$ . Se la vettura si arresta bruscamente con una decelerazione costante a, determinare la velocità v relativa alla macchina con cui la testa del modello colpisce il pannello degli strumenti. Si considerino i valori  $m = 50 \text{ kg}$ ,  $\bar{r} = 450 \text{ mm}$ ,  $r = 800 \text{ mm}$ ,  $k_0 = 550 \text{ mm}$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\alpha = 10g$ , e si calcoli v. *Risposta.*  $v = 11,49 \text{ m/s}$ .



#### Soluzione

L'accelerazione nel baricentro, necessaria per calcolare la forza d'inerzia è data dall'espressione:  $\mathbf{a}_G = a_O \mathbf{i} - \ddot{\theta} \bar{r} \boldsymbol{\lambda}$  dove  $\mathbf{i}$  e  $\boldsymbol{\lambda}$  sono i versori degli assi X e  $\xi$ . L'equazione d'equilibrio dinamico alla rotazione intorno al punto O è:

$$J_G \ddot{\vartheta} - ma_0 \bar{r} \cos \vartheta + m \bar{r}^2 \ddot{\vartheta} = 0$$

L'equazione scritta contiene la coppia d'inerzia dovuta alla presenza di un'accelerazione angolare, e il momento rispetto al punto O della forza d'inerzia applicata nel baricentro  $-m\mathbf{a}_G$ . È facile vedere che  $J_G + m\bar{r}^2 = J_O$  quindi l'equazione precedente assume la forma:

$$J_O \ddot{\vartheta} = ma_0 \bar{r} \cos \vartheta$$

Integrando l'espressione di  $\ddot{\vartheta}$  che si ottiene dall'equazione precedente, si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{45} \ddot{\vartheta} d\vartheta &= \int_0^t \ddot{\vartheta} * \dot{\vartheta} dt = \frac{1}{2} \dot{\vartheta}^2 = \int_0^{45} ma_0 \bar{r} \frac{\cos \vartheta}{J_O} d\vartheta = \frac{ma_0 \bar{r} \sin 45}{J_O} \quad \dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{ma_0 \bar{r} \sin 45}{J_O}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 * 50 * 10 * 9,81 * 0,45 * \sin 45}{50 * 0,55^2}} = 14,36 \frac{rad}{s} \end{aligned}$$

La velocità d'impatto sul cruscotto sarà quindi:  $v = 14,36 * 0,8 = 11,49 \frac{m}{s}$

- Una barra di 0,6 m di lunghezza è posta in rotazione nel suo punto medio da un albero collegato a un motore. La barra, di massa trascurabile, porta alle sue estremità due sfere di massa 3 e 2 kg. I centri delle sfere distano 0,3 m dall'asse di rotazione. Determinare la forza orizzontale che grava sui cuscinetti quando la barra è posta in rotazione da una coppia di 10 Nm.

*Soluzione*

Il momento d'inerzia delle due masse rispetto all'asse di rotazione è uguale a  $J_0 = 3 * 0,3^2 + 2 * 0,3^2 = 0,45 \text{ kgm}^2$ .

L'equazione di equilibrio dinamico alla rotazione è:

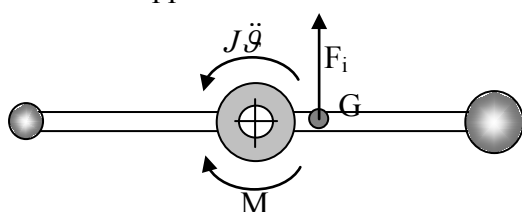
$$0,45 * \ddot{\vartheta} = 10 \quad e \quad \ddot{\vartheta} = \frac{10}{0,45} = 22,22 \frac{rad}{s^2} \quad \text{Il baricentro}$$

del sistema delle due masse si trova alla distanza dall'asse di rotazione data dalla relazione:

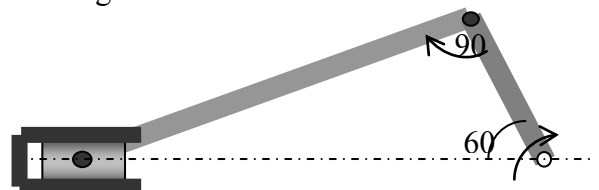
$$r_G = \frac{-0,3 * 2 + 0,3 * 3}{5} = 0,06 \text{ m} \quad \text{il baricentro si trova quindi a 6 cm dall'asse di rotazione dalla parte}$$

della massa più elevata. Nel momento in cui la barra inizia a ruotare con accelerazione di  $22,2 \frac{rad}{s^2}$  nel baricentro, nasce una forza d'inerzia orizzontale pari a  $F_i = -5 * 22,2 = 111 \text{ N}$  che è

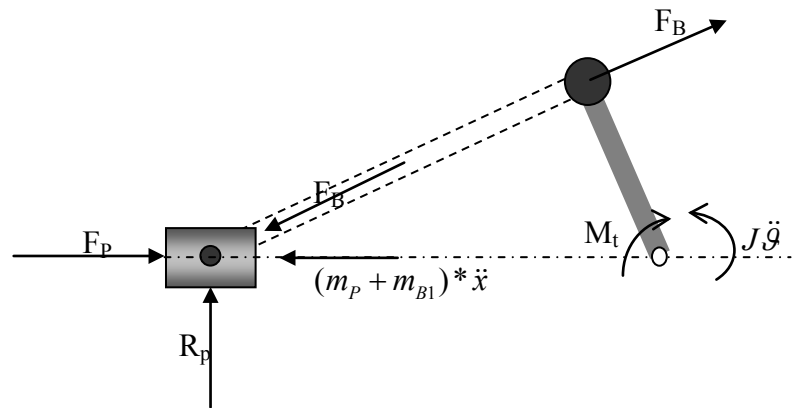
equilibrata dalle reazioni dei cuscinetti. La figura mostra una vista dall'alto della barra con la forza d'inerzia rappresentata vettorialmente.



È appena opportuno notare che insieme alla forza d'inerzia è presente una coppia d'inerzia, anch'essa rappresentata nel disegno.



- Nel manovellismo in figura il raggio della manovella è  $r = 120 \text{ mm}$ , la lunghezza della biella  $260 \text{ mm}$ , la massa della biella  $2,5 \text{ kg}$ , quella del pistone  $1,8 \text{ kg}$ , la massa della manovella, costituita da un'asta sottile omogenea,  $2,0 \text{ kg}$ , il diametro del pistone  $150 \text{ mm}$ . Supponendo di poter approssimare la biella con un sistema equivalente di due masse uguali, una nel piede di biella, l'altra nel perno di manovella e considerando una pressione di  $85 \text{ bar}$  all'interno del cilindro e ammettendo che il sistema sia inizialmente in quiete, si calcoli la coppia motrice e l'accelerazione angolare della manovella.



### Soluzione

Riproponendo il disegno con le approssimazioni fatte per la distribuzione delle masse si ha:

Equilibrio dinamico del pistone. In direzione orizzontale sussiste la relazione:

$$85 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} - F_b \cos(30^\circ) - (1,25 + 1,8) \cdot \ddot{x} = 0$$

Equilibrio dinamico alla rotazione della manovella. La biella trasmette due forze uguali e opposte rispettivamente al pistone e alla manovella. L'equilibrio dinamico alla rotazione di quest'ultima è espresso dalla relazione:

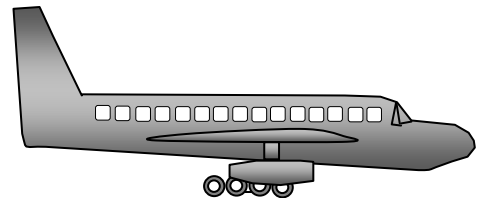
$$F_b \cdot r - \left( m_m \frac{r^2}{3} + m_{B2} \cdot r^2 \right) \cdot \ddot{\theta} = 0$$

Il primo termine della relazione precedente rappresenta proprio il momento motore cercato ma la sua determinazione non è ancora possibile perché nelle due relazioni scritte sono presenti tre incognite  $F_b, \ddot{\theta}, \ddot{x}$ . Osservando il disegno si può vedere che l'accelerazione tangenziale dell'estremità libera della manovella è:

$$a_m = \ddot{\theta} r \quad e \quad \ddot{x} = \ddot{\theta} r \cos(30)$$

L'ultima relazione scritta permette di risolvere il problema proposto. Si lascia al lettore di trovare il valore numerico del momento motore.

- Un aereo da trasporto passeggeri al decollo a pieno carico ha massa totale pari a  $360 \text{ t}$  e la portanza è pari al  $60 \%$  del peso dell'aereo a  $200 \text{ km/h}$ . Complessivamente i carrelli del velivolo hanno  $16$  ruote con diametro  $d = 1150 \text{ mm}$ , con coefficiente di attrito volvente pari a  $f = 0,01 + 1,5 \cdot 10^{-6} \omega^2$ , essendo  $\omega$  la velocità angolare delle ruote in  $\text{rad/s}$ . Calcolare la forza orizzontale resistente in corrispondenza di ogni ruota all'inizio del decollo e a  $200 \text{ km/h}$ .



### Soluzione

Il peso che grava su una singola ruota al decollo è:

$$\frac{360.000}{16} \cdot 0,4 \cdot 9,81 = 88290 \text{ N}$$

si ha poi:

$$v = \frac{200}{3,6} = 55,55 \frac{m}{s} \quad \omega = \frac{v}{1,075} = 51,67 \frac{rad}{s} \quad f = 0,01 + 1,5 \cdot 10^{-6} \cdot 51,67^2 = 0,014$$

$$F_r = f \cdot 88290 = 0,014 \cdot 88290 = 1236 N$$

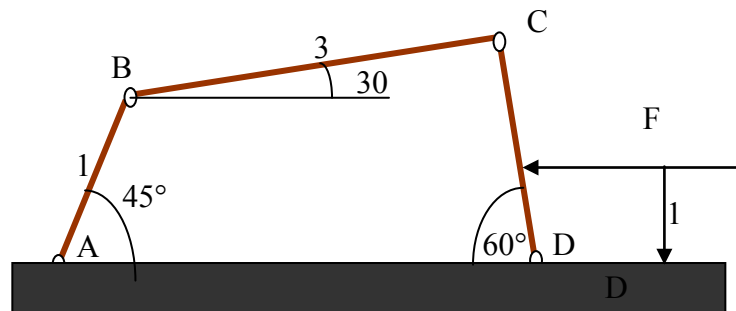
Il dato precedente si riferisce alla velocità di 200 km/h mentre all'inizio del decollo si ha:

$$f = 0,01 \quad F_r = 883 N.$$

- Nel quadrilatero articolato in figura, di cui è completamente nota la geometria, una forza di 10 N insiste sul lato CD. Calcolare la coppia da applicare all'asta AB per mantenere il quadrilatero in equilibrio statico. Calcolare anche le reazioni in A e D.

*Soluzione*

Osserviamo che l'asta BC non è caricata lungo la sua estensione per cui sarà soggetta soltanto a carichi disposti lungo il suo asse. Con semplici considerazioni geometriche si ha:

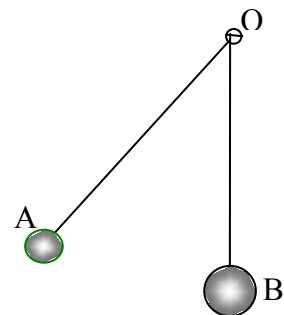


$$l_{CD} = \frac{1 \cdot \sin 45 + 3 \cdot \sin 30}{\sin 60} = 2,55 m \quad F_{BC} \cdot 2,55 = 10 \quad F_{BC} = 3,92 N$$

$$3,92 \cdot \cos 30 \cdot \sin 45 - 3,92 \sin 30 \cdot \cos 45 = M = 1,01 Nm$$

Il lettore potrà esercitarsi a trovare la soluzione anche per via grafica.

- La massa del pendolo A in figura è di 2 kg, quella del pendolo B di 5 kg. Il filo di sospensione è lungo 2 m per ambedue. L'inclinazione iniziale del pendolo A è di 30°. Trovare l'angolo a cui si portano le due masse dopo l'urto assumendo un coefficiente di restituzione pari a 0.5.



*Soluzione*

La collisione si può trattare con le leggi dell'urto centrato in quanto le due sfere si toccano sulla verticale del punto di sospensione O. Ricordando

$$v_1^+ = \frac{(m_1 - em_2)v_1^- + m_2(1+e)v_2^-}{m_1 + m_2}$$

$$v_2^+ = \frac{(m_2 - em_1)v_2^- + m_1(1+e)v_1^-}{m_1 + m_2}$$

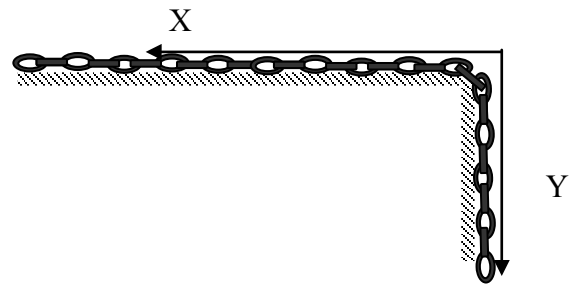
e sostituendo i valori reali delle masse e del coefficiente di restituzione si ha:

$$mgl(1 - \cos 30) = \frac{1}{2} 2 \cdot v_A^2 \quad v_A^- = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2(1 - \cos 30)} = 2,29 \frac{m}{s}$$

$$v_A^+ = \frac{(2 - 2,5) \cdot 2,29}{7} = -0,82 \frac{m}{s}$$

$$v_B^+ = \frac{2,5 \cdot (1,5) \cdot 2,29}{7} = 1,23 \frac{m}{s}$$

- Una catena flessibile priva di attrito, di lunghezza totale pari a 3 m è poggiata su un gradino sporgente in modo tale che solo un metro di essa si trovi in giacitura verticale. Determinare il tempo richiesto dalla catena per scivolare completamente dal gradino, una volta rilasciata.



#### Soluzione

La forza che provoca lo scorrimento della catena è il peso del tratto verticale. Utilizzando un sistema di riferimento come quello in figura si ottiene:

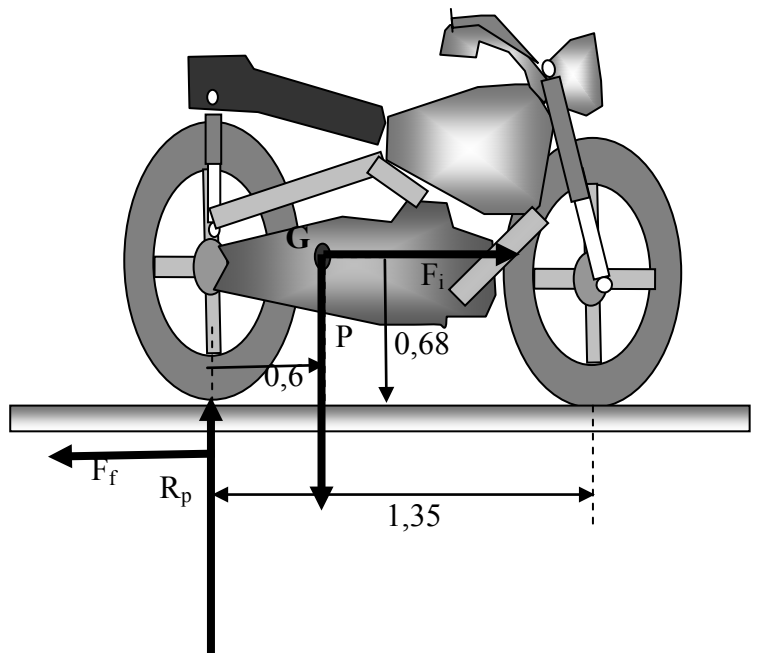
$$\ddot{x} = \ddot{y} = \frac{y}{L} \frac{Mg}{M} = \frac{g}{L} y \quad ; \quad \ddot{y} - \frac{g}{L} y = 0$$

La soluzione dell'equazione differenziale a coefficienti costanti scritta è del tipo:

$$y = y_0 e^{\alpha t} \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{g}{L} \quad e \quad y_0 = 1$$

quando:  $y = 3m \quad 3 = e^{\frac{g}{L}t} \quad t = \ln 3 * \frac{3}{g} = 1,09 \text{ s}.$

- Nella moto rappresentata in figura, di massa pari a 250 kg considerando anche il conducente, gli assi delle ruote distano di 1.35 m. Il baricentro della moto si trova 0.6 m avanti alla ruota posteriore e 0.68 m sopra il livello del terreno. Se si frena solo con la ruota posteriore determinare la massima decelerazione assumendo un coefficiente d'attrito pari a 0.4:
  - quando la moto viaggia in rettilineo;
  - quando la moto viaggia in una curva di 60 m di raggio a 65 km/h;
  - trascurare l'inclinazione della moto in curva.



#### Soluzione

Per il rettilineo si consideri che la moto è soggetta alla forza peso del sistema moto-conduttore, applicata nel baricentro G e alla forza d'inerzia che nasce in corrispondenza della frenata, applicata anch'essa nel baricentro. Considerando l'equilibrio alla rotazione della moto rispetto al punto di contatto della ruota anteriore si ha:

$$0,75 * P + 1,35 * R_p + 0,68 * F_i = 0$$

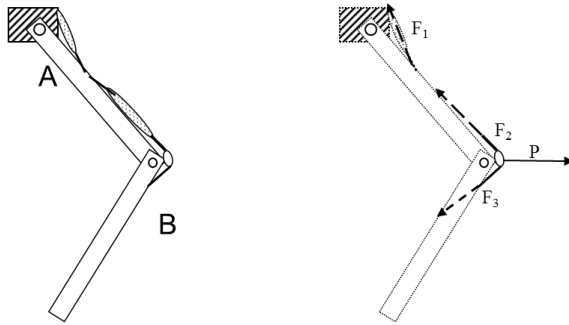
Imponendo la condizione di equilibrio nella direzione orizzontale si ha anche:  $0,4R_p = F_i$

Le due relazioni precedenti combinate forniscono:

$$(1,35 + 0,4 * 0,68)R_p = 0,75P \quad R_p = \frac{0,75 * 250 * 9,81}{1,62} = 1134 \text{ N}$$

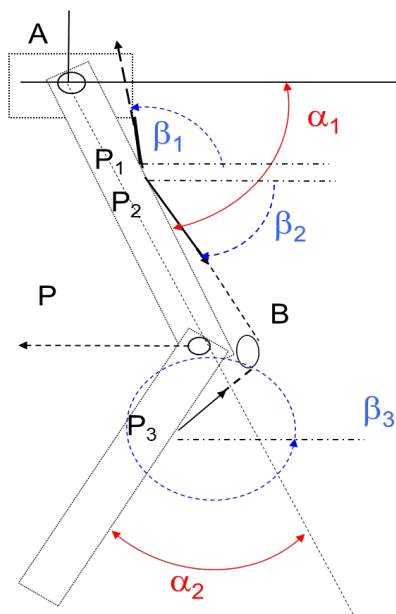
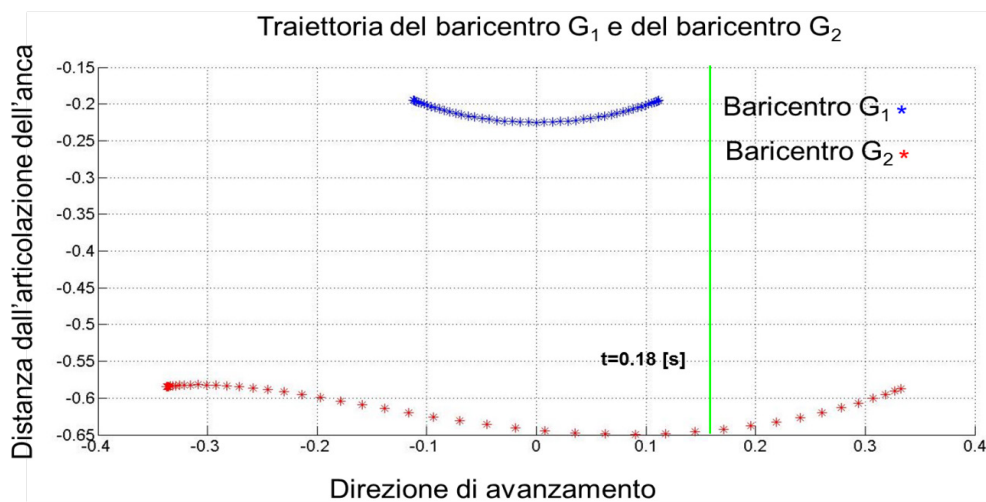
La forza frenante è  $F_f = 0,4 * 1134 = 453 \text{ N}.$

Per la marcia in curva si consideri che l'effetto giroscopico produce una diminuzione della reazione sulla ruota posteriore con conseguente diminuzione della massima forza frenante. Lo svolgimento numerico del quesito è lasciato al lettore.



#### Dinamica inversa

- Calcolare le forze muscolari,  $F_1, F_2, F_3$  quando i due segmenti del sistema in figura hanno un moto rappresentato dalle traiettorie dei loro baricentri e dalle loro velocità angolari.



$$\alpha_1 = -80.7 \text{ gradi}$$

$$\alpha_2 = -40.7 \text{ gradi}$$

$$\beta_1 = +0.6 \pi \text{ [rad]}$$

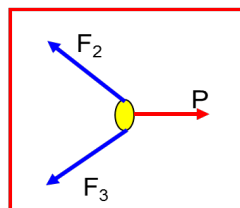
$$\beta_2 = -0.3 \pi \text{ [rad]}$$

$$\beta_3 = +0.38 \pi \text{ [rad]}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.0242 \\ -0.1480 \\ 0 \end{bmatrix}$$

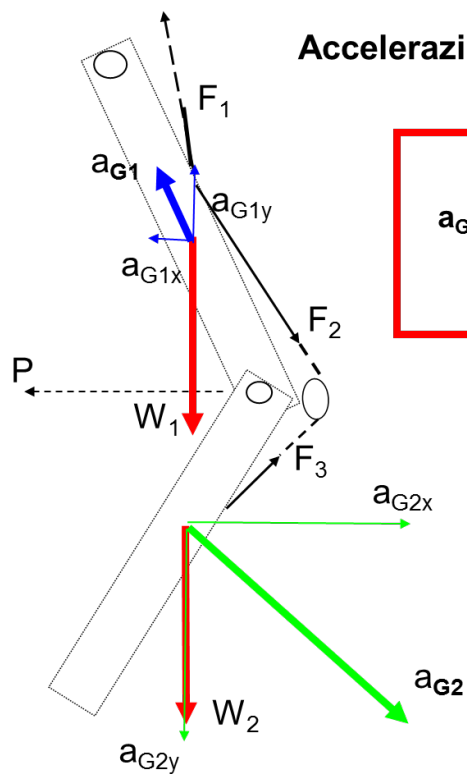
$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.0302 \\ -0.1851 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} -0.0057 \\ -0.5721 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Coordinate articolazioni e baricentri dei segmenti:

$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0.0362 \\ -0.2221 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} -0.0448 \\ -0.6361 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.0725 \\ -0.4441 \\ 0 \end{pmatrix}$



### Accelerazioni dei baricentri e momenti di inerzia

$\mathbf{a}_{G1} = \begin{pmatrix} -0.8107 \\ 1.5162 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{a}_{G2} = \begin{pmatrix} 7.1133 \\ 7.2278 \\ 0 \end{pmatrix}$
--	---

$W_1 = 65 \text{ [N]}$	$J_{G1} = 0.1359$
$W_2 = 30 \text{ [N]}$	$J_{G2} = 0.05$

$\ddot{\alpha}_1 = -2.4704$ $\ddot{\alpha}_2 = 25.8704$
---

### Parte superiore del sistema

$$H_1 + H'_2 - m_1 \ddot{x}_{G1} + F_1 \cos \beta_1 + F_2 \cos \beta_2 = 0$$

$$V_1 - V_2 + F_1 \sin \beta_1 + F_2 \sin \beta_2 - m_1 \ddot{y}_{G1} - m_1 g = 0$$

$$\mathbf{F}_1 \times (\mathbf{A} - \mathbf{P}_1) - I_{G1} \ddot{\alpha}_1 - m_1 \mathbf{a}_{G1} \times (\mathbf{A} - \mathbf{G}_1) + m_1 \mathbf{g} \times (\mathbf{A} - \mathbf{G}_1) + \mathbf{F}_2 \times (\mathbf{A} - \mathbf{P}_2) + \mathbf{H}'_2 \times (\mathbf{B} - \mathbf{A}) + \mathbf{V}_2 \times (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

### Parte inferiore del sistema

$$H''_2 - m_2 \ddot{x}_{G2} - F_3 \cos \beta_3 = 0$$

$$V_2 - m_2 \ddot{y}_{G2} - m_2 g = 0$$

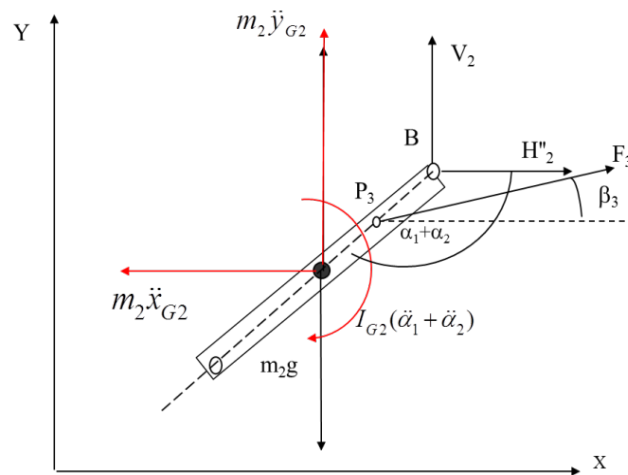
$$\mathbf{F}_3 \times (\mathbf{B} - \mathbf{P}_3) - I_{G2} (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2) - m_2 \mathbf{a}_{G2} \times (\mathbf{B} - \mathbf{G}_2) + m_2 \mathbf{g} \times (\mathbf{B} - \mathbf{G}_2) = 0$$

### Equazioni aggiuntive

$$H'_2 + H''_2 = F_2 \cos \beta_2 + F_3 \cos \beta_3$$

$$F_2 \sin \beta_2 - F_3 \sin \beta_3 = 0$$

### Parte inferiore del sistema



### Parte superiore del sistema

