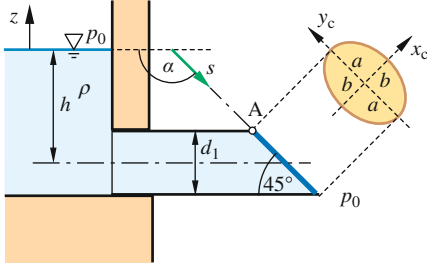


## Aus Kapitel 22

### Aufgaben

#### 22.1 •• Kraft auf eine schräge, ebene Klappe



Der Auslass aus einem großen, mit Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  gefüllten Behälter ist durch eine elliptische Platte verschlossen (siehe Abbildung). Über das Gewicht der Platte kann der Flüssigkeitsstand  $h$  über der Mitte des Auslasses eingestellt werden. Die Platte steht im Winkel von  $45^\circ$  ( $\alpha = 135^\circ$ ) zum kreisförmigen Auslaufrohr des Durchmessers  $d_1$ . Die Platte ist am oberen Punkt A drehbar gelagert und dichtet das Rohr über ihr Eigengewicht  $G$  ab.

Geg.:  $d_1, g, \rho, p_0$  Variabel:  $h, z$  bzw.  $s$

1. Ermitteln Sie die beiden Halbachsen  $a$  und  $b$  der elliptischen Platte und das Flächenträgheitsmoment um die Schwerachse  $x_c$  in Funktion von  $d_1$ .
2. Bestimmen Sie die resultierende Kraft auf die Platte und den Angriffspunkt dieser Kraft  $z_D$  und  $s_D$  in Abhängigkeit von der variablen Füllhöhe  $h$  und das notwendige Gewicht  $G$  der Platte, damit sie ab einer Füllhöhe  $h_{\max}$  öffnet.

**Hinweis:** Verwenden Sie die Wandkoordinate  $s$ , um die Flächenmomente zu berechnen. Das Flächenträgheitsmoment einer Ellipse mit den Halbachsen  $a, b$  um  $x_c$  (siehe Abbildung) ist:

$$J_{x_c} = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

**Resultat:**

$$z_D = -h \left( 1 + \frac{1}{16} \frac{d_1^2}{h^2} \right),$$

$$G = \rho g \frac{\pi}{2} d_1^2 \left( h_{\max} + \frac{d_1}{8} \right).$$

#### Ausführliche Lösung:

1. Kleine und große Halbachse werden aus der Geometrie ermittelt, damit wird  $J_{x_c}$  bestimmt:

$$a = \frac{d_1}{2 \cos(45^\circ)} = \frac{\sqrt{2}}{2} d_1,$$

$$b = \frac{1}{2} d_1,$$

$$J_{x_c} = \frac{\pi \sqrt{2}}{32} d_1^4.$$

2. Die Druckverteilung des resultierenden Flüssigkeitsdruckes (ohne den von allen Seiten wirkenden Druck der Luft) ist nach (22.8) mit  $z_0 = 0$ :

$$p - p_0 = -\rho g z.$$

Die resultierende Gesamtkraft auf die Klappe (die senkrecht auf dieser angreift) ist nach (22.10) gleich dem Druck im Flächenschwerpunkt ( $z_c = -h$ ) mal der Fläche  $A = \pi ab$  der Klappe:

$$F_{\text{res}} = (-n) (p_c - p_0) A = -\rho g h \pi ab,$$

$$F_{\text{res}} = -\rho g h \pi \frac{\sqrt{2}}{4} d_1^2.$$

Zur Bestimmung des Kraftangriffspunktes wird die Koordinate  $z$  in die Koordinate  $s$  über (22.9) umgerechnet:

$$z = -s \sin \alpha = -\frac{1}{2} \sqrt{2} s.$$

Die Lage des Schwerpunktes im  $s$ -System ist daher:

$$s_c = -\sqrt{2} z_c = \sqrt{2} h.$$

Die Lage des Kraftangriffspunktes wird aus (22.11) bzw. (22.12) und (22.13) bzw. (22.14) bestimmt:

$$s_D = s_c + \frac{J_{x_c}}{s_c A} = \sqrt{2} h + \frac{\pi}{32} \frac{d_1^4}{h \pi ab},$$

$$s_D = s_c + e = \sqrt{2} h \left( 1 + \frac{1}{16} \frac{d_1^2}{h^2} \right).$$

Im  $z$ -System liegt der Kraftangriffspunkt daher bei:

$$z_D = -h \left( 1 + \frac{1}{16} \frac{d_1^2}{h^2} \right).$$

Die resultierende Kraft versucht durch das Drehmoment in Bezug auf den Punkt A, die Klappe zu öffnen. Das öffnende Moment  $M_1 = F_{\text{res}}(a + e)$  ist:

$$M_1 = \rho g h \pi \frac{\sqrt{2}}{4} d_1^2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} d_1 + \sqrt{2} h \frac{1}{16} \frac{d_1^2}{h^2} \right),$$

$$M_1 = \rho g h \pi \frac{1}{4} d_1^3 \left( 1 + \frac{1}{8} \frac{d_1}{h} \right).$$

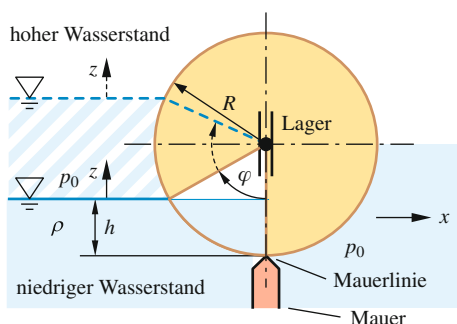
Das schließende Moment des Gewichtes der Klappe  $M_2$  ist:

$$M_2 = G \frac{d_1}{2}.$$

Das gesuchte Gewicht der Klappe, damit diese bei der Füllhöhe  $h_{\text{max}}$  öffnet, ist daher:

$$G = \rho g \frac{\pi}{2} d_1^2 \left( h_{\text{max}} + \frac{d_1}{8} \right).$$

## 22.2 ••• Kraft auf ein walzenförmiges Wehr



Ein Stauwehr der Breite  $b$  wird durch eine horizontale, zylinderförmige Walze mit dem Radius  $R$  gebildet, die so gelagert ist, dass sie vertikal frei beweglich ist, horizontal jedoch durch die Führung gehalten wird (siehe Abbildung). Die Walze liegt auf der Mauerlinie auf und dichtet Wasser (Dichte  $\rho$ ) alleine durch ihre Gewichtskraft ab. Der Wasserstand  $h$  oberhalb der Mauerlinie kann maximal zwischen 0 und  $2R$  variieren. Die Walze hat die Masse  $m$ .

Geg.:  $R, b, g, m, \rho, p_0$  Variabel:  $h$  bzw.  $\varphi$

1. Bestimmen Sie die resultierende Dichtkraft  $F_D$ .
2. Bei welchem Winkel  $\varphi$  wird die Auflagekraft im allgemeinen Fall minimal?
3. Auf welche horizontale Kraft  $F_x$  muss das Lager mindestens ausgelegt sein?
4. In welcher Tiefe  $|z_D|$  liegt die Wirkungslinie dieser Horizontalkraft?

### Resultat:

$$F_D = mg - \rho g V_E = mg - \rho g b \frac{R^2}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi),$$

$$F_{x,\text{max}} = 2 \rho g R^2 b,$$

$$|z_D| = |z_c| + \frac{I_c}{|z_c| h b} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2}{3} h.$$

### Ausführliche Lösung:

1. Zur Berechnung der Dichtkraft müssen wir von der Gewichtskraft  $F_G = mg$  den Auftrieb  $F_A$  des nur teilweise eingetauchten Körpers abziehen,  $F_D = F_G - F_A$ . Für den Auftriebsanteil der Kraft verwenden wir die Methode des vollständig eingetauchten Ersatzkörpers. Dieser wird gebildet durch:

- den von der Flüssigkeit benetzten Teil der Wand,
- die gegebenenfalls verlängerte Wasseroberfläche (d. h. die Ebene  $z = 0$ ),
- die Fläche, die entsteht, wenn von jedem Randpunkt der benetzten Fläche eine zur Oberfläche senkrechte Linie bis zur Ebene  $z = 0$  gezogen wird.

Der Querschnitt des mit dieser Vorschrift erzeugten, vollständig eingetauchten Ersatzkörpers ist in der Abbildung skizziert. Das Volumen dieses Körpers ist:

$$V_E = b \left( \frac{\varphi}{2\pi} \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 \sin \varphi \cos \varphi \right).$$

Der Winkel  $\varphi$  ist hier als Parameter im Bogenmaß einzusetzen. Wegen des Vorzeichenwechsels des  $\cos$  bei  $\varphi > \pi/2$  gilt diese Gleichung im gesamten Wertebereich  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , denn das Dreieck wird für  $\varphi > \pi/2$  nicht mehr abgezogen, sondern addiert. Die resultierende Auflagekraft (= Dichtkraft) ist daher:

$$F_D = mg - \rho g V_E = mg - \rho g b \frac{R^2}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi).$$

2. Der Winkel  $\varphi$  und der Wasserstand  $h$  hängen durch folgende Beziehung voneinander ab:

$$h = R (1 - \cos \varphi).$$

Es wäre allerdings nicht sehr praktisch, den Parameter  $\varphi$  in allen Gleichungen durch  $h$  zu ersetzen, deswegen lassen wir das Ergebnis so stehen. Die minimale Dichtkraft wird genau dann erreicht, wenn der Auftriebsanteil (also  $V_E$ ) maximal wird, was offensichtlich bei  $\varphi = \pi$  der Fall ist, im allgemeinen Fall müssen wir aber zur Beantwortung derartiger Fragen eine Extremwertbetrachtung durchführen. Hierzu leiten wir die Dichtkraft  $F_D$  nach  $\varphi$  ab und setzen die Ableitung Null:

$$\frac{\partial F_D}{\partial \varphi} = -\rho g b \frac{R^2}{2} (1 - \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \varphi = 0.$$

Im betrachteten Wertebereich gilt dies für  $\varphi = 0$  (maximale Dichtkraft) und  $\varphi = \pi$  (minimale Dichtkraft).

3. Zur Bestimmung der Seitendruckkraft, die auf das Lager wirkt, betrachten wir nur die in horizontale Richtung projizierte, vom Wasser benetzte Fläche. Sie ist ein Rechteck der Höhe  $h$  und der Breite  $b$  (FTM  $J_c = bh^3/12$ ), mit dem Flächenschwerpunkt bei  $z_c = -h/2$ . Die Seitendruckkraft  $F_x$  auf das Lager ist daher:

$$F_x = \rho g \frac{h}{2} hb = \rho g \frac{R^2 b}{2} (1 - \cos \varphi)^2.$$

Sie wird maximal, wenn der Wasserstand maximal, also  $\varphi = \pi$  ist:

$$F_{x,\max} = 2\rho g R^2 b.$$

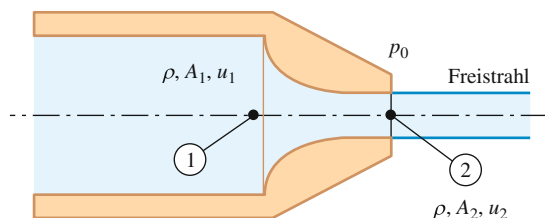
4. Die Wirkungslinie der Seitendruckkraft liegt in der Tiefe:

$$|z_D| = |z_c| + \frac{J_c}{|z_c| hb} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2}{3}h,$$

denn die projizierte Fläche des benetzten Teils der Walze ist ein Rechteck mit  $|z_c| = s_c$ .

## 22.3 •• Inkompressible Strömung in einer Düse

Wir betrachten die Strömung in einer rotationssymmetrischen Düse, also einer Querschnittsverengung (siehe Abbildung). Die Innenkontur der Düse sei gut gerundet, sodass die Strömung im betrachteten Bereich nahezu reibungsfrei ist. Diese Annahme ist für Düsen auch in der Realität meist gerechtfertigt, denn auf kurzem Weg stark beschleunigte Strömungen sind bei entsprechender Kontur der Düse tatsächlich praktisch verlustfrei. Die Düse sei horizontal gerichtet.



In der Düse kurz vor der Verengung herrscht der Druck  $p_1$ . Nach der Düse tritt der Strahl als Freistrahls in die umgebende Luft (Druck  $p_0$ ) aus.

1. Wie groß ist bei gegebenem Druck  $p_1 > p_0$  der Volumenstrom  $\dot{V}$ ?
2. Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit des Strahls aus der Düse  $u_2$ ?

**Resultat:**

$$u_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho} \frac{A_1^2}{A_1^2 - A_2^2}}.$$

## Ausführliche Lösung:

1. Wir betrachten die mittlere Stromlinie und die beiden Punkte 1 (kurz vor Beginn der Verengung) und 2 (kurz nach dem Austritt aus der Düse). Wegen der Reibungsfreiheit sei die Strömung auch homogen, d. h., im gesamten Querschnitt  $A_1$  bzw.  $A_2$  ist die Geschwindigkeit konstant  $u_1$  bzw.  $u_2$ . Die Kontinuitätsgleichung (22.18) lautet dann:

$$\dot{V} = u_1 A_1 = u_2 A_2.$$

Aus der reibungsfreien Bernoulli'schen Gleichung ( $\Delta p_V = 0$ ) erhalten wir für die horizontale Düse ( $z_1 = z_2$ ):

$$p_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2.$$

Der Druck  $p_2$  ist gleich dem Luftdruck  $p_0$ . Hätte der Strahl einen anderen Druck, würde er entweder „aufplatzen“ oder „einschnüren“, denn eine Druckdifferenz zur umgebenden Luft würde den Strahl quer zur Hauptrichtung beschleunigen. Wenn dies nicht zu beobachten ist, ist der Strahl zwangsläufig auf dem Druck  $p_0$ . Die Geschwindigkeiten in der Bernoulli'schen Gleichung ersetzen wir durch den Volumenstrom und lösen nach diesem auf:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \frac{\dot{V}^2}{A_1^2} = p_0 + \frac{\rho}{2} \frac{\dot{V}^2}{A_2^2},$$

$$\dot{V} = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho} \frac{A_1^2}{A_1^2 - A_2^2}}.$$

2. Die Austrittsgeschwindigkeit  $u_2$  des Strahls ist also:

$$u_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho} \frac{A_1^2}{A_1^2 - A_2^2}}.$$

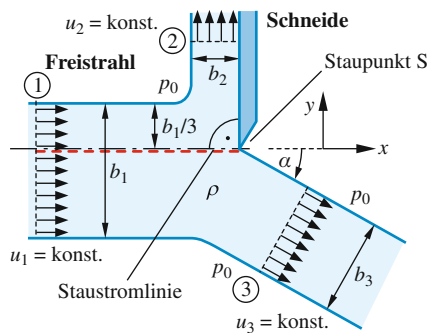
**Allgemeine Hinweise für die folgenden Aufgaben:** Mit Hilfe des Impuls- und Drehimpulssatzes können bei korrekter Anwendung nicht nur näherungsweise Kräfte und Momente bestimmt werden, sondern selbst bei komplexen Systemen in vielen Fällen sogar exakte Lösungen. Schlüsselfunktion besitzt die geschickte Wahl der jeweils betrachteten Kontrollvolumina und eine systematische Lösungsstrategie. Wie in allen Fällen gilt: „Übung macht den Meister“. Bearbeiten Sie daher die folgenden Übungsaufgaben ohne die dargestellte Lösung zu verwenden. Auch durch Wahl eines anderen Kontrollvolumens kann bei der gleichen Aufgabe der Lösungsweg geübt werden, mit dem Vorteil, dass das Ergebnis zur Kontrolle bereits bekannt ist.

Zur systematischen Lösung von Impulssatz- (und Drehimpulssatz-) Aufgaben geben die beiden Übersichtskästen „Impuls- und Drehimpulssatzaufgaben lösen – mit System“ und „Wahl des Kontrollvolumens KV“ eine bei ausreichender Kenntnis aller Randbedingungen immer funktionierende Lösungsstrategie vor. Lesen Sie diese Kästen

unbedingt durch, bevor Sie die folgenden Beispiele durcharbeiten.

## 22.4 ••• Kraft auf einen Strahlableiter

Die Spitze einer Schneide taucht senkrecht in einen ebenen Freistrahл der Höhe  $h$  (in der Abbildung senkrecht zur Zeichenebene) ein und lenkt einen Teil des Strahls (2) senkrecht in  $y$ -Richtung um. Es wird der Zeitpunkt betrachtet, in dem die Schneide den Strahl gerade im Verhältnis 1 : 2 teilt. Die skizzierte Trennstromlinie ist dann gleichzeitig Staustromlinie zum Staupunkt in der Nähe der Schneidenspitze. In den Ebenen 1, 2 und 3 sei die Strömung näherungsweise homogen, außerdem können Reibungseffekte im Freistrahл, die Reibung des Freistrahls an der Luft und die Reibung an der Schneide vernachlässigt werden. Die Schwerkraft soll senkrecht zur Zeichenebene wirken.



Geg.:  $p_0, u_1, b_1, h, \rho, (b_1 \ll h)$ .

1. Wie groß ist der statische Druck  $p_S$  im Staupunkt S, und welcher Druck  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) herrscht in den drei Ebenen?
2. Wie groß sind die Geschwindigkeiten  $u_2$  und  $u_3$  sowie die Strahlbreiten  $b_2$  und  $b_3$ ?
3. Bestimmen Sie mithilfe des Impulssatzes die resultierende Kraft auf die Schneide in Betrag und Richtung ( $x$ - und  $y$ -Komponente).
4. Um welchen Winkel  $\alpha$  wird der Teilstrahl 3 zum betrachteten Zeitpunkt abgelenkt? Ändert sich dieser Winkel, wenn der Betrag der Geschwindigkeit  $u_1$  verändert wird?

### Resultat:

$$p_S = p_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2, \quad u_2 = u_3 = u_1,$$

$$b_2 = \frac{b_1}{3}, \quad b_3 = \frac{2b_1}{3},$$

$$F_S = \rho u_1^2 A_1 \left( 1 - \frac{b_3}{b_1} \cos \alpha \right) \mathbf{i} - \rho u_1^2 A_1 \left( \frac{b_2}{b_1} - \frac{b_3}{b_1} \sin \alpha \right) \mathbf{j},$$

$$\sin \alpha = \frac{b_2}{b_3}.$$

### Ausführliche Lösung:

1. Bei allen Impulssatzaufgaben benötigt man auch die Informationen, die uns die Kontinuitätsgleichung und die Bernoulli'sche Gleichung (bzw. Energiegleichung kompressibler Strömung) liefern. Das gesamte Gebiet soll reibungsfrei sein, daher kann der Druck an der Stelle S unmittelbar aus der Bernoulli'schen Gleichung auf der Staustromlinie von 1 nach S bestimmt werden ( $z = \text{konst.}$ ):

$$p_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = p_S + \frac{\rho}{2} u_S^2 = p_S.$$

Der statische Druck am Ende der Staustromlinie wird auch Staudruck oder Totaldruck genannt. Er enthält auch den dynamischen Anteil aus der kinetischen Energie. Der statische Druck in den Ebenen 1, 2 und 3 muss dagegen gleich dem Luftdruck  $p_0$  sein, denn durch den Kontakt der freien Oberfläche des Freistrahls mit der Luft muss hier der gleiche Druck vorliegen (siehe auch Anmerkung zum früheren Beispiel der Düse):

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_0.$$

2. Mit dieser Information können wir nun die Geschwindigkeiten  $u_2$  und  $u_3$  bestimmen, indem wir die Bernoulli'sche Gleichung jeweils auf einer Stromlinie in der Freistrahloberfläche von 1 nach 2 bzw. von 1 nach 3 auswerten:

$$p_0 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = p_0 + \frac{\rho}{2} u_2^2,$$

$$p_0 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = p_0 + \frac{\rho}{2} u_3^2,$$

$$u_2 = u_3 = u_1.$$

Die Kontinuitätsgleichung inkompressibler Strömungen liefert uns nun die zugehörigen Strahlbreiten  $b_2$  und  $b_3$ . Für den Teilstrahl, der vom Strahlableiter in  $y$ -Richtung abgelenkt wird, gilt:

$$u_1 h \frac{b_1}{3} = u_2 A_2 = u_1 h b_2,$$

$$b_2 = \frac{b_1}{3}.$$

Für den schräg abgelenkten Teilstrahl gilt dementsprechend:

$$b_3 = \frac{2b_1}{3}.$$

3. Zur Ermittlung der Kraft auf die Schneide gehen wir systematisch nach der „Fünf-Schritte-Methode“ vor.

**Schritt 1** Das Kontrollvolumen ermitteln wir nach den Tipps zur Wahl (siehe Übersichtskasten). Die Schneidenoberfläche muss Teil der Oberfläche des Kontrollvolumens sein, sonst können wir die Frage nach der Kraft nicht beantworten. Die Freistrahloberfläche ist definitiv Stromlinie und wird daher ebenfalls gewählt. Schließlich ist in den Ebenen 1, 2 und 3 angegeben, dass die Strömung homogen ist. Daher schneiden wir durch

diese Ebenen mit einem ebenen Schnitt quer zu den Stromlinien. Weil es in diesem Fall am einfachsten ist, senkrecht zu diesen. Wir definieren unser Kontrollvolumen daher wie in Abb. 22.7 gezeigt.

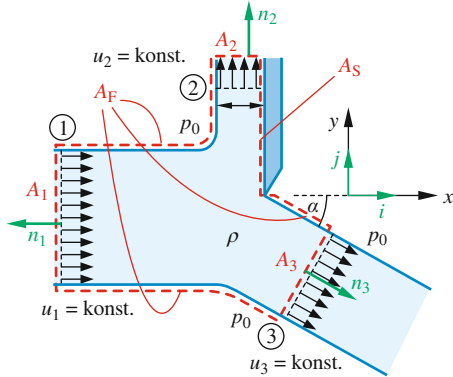


Abb. 22.7 Festlegung des Kontrollvolumens

**Schritt 2** Der Impulssatz wird in der allgemeinen Form benutzt. Als Volumenkraft wirkt nur die Schwerkraft, deren Krafrichtung senkrecht zur Zeichenebene liegt. Das heißt, die Schwerkraft leistet keinen Beitrag zur gefragten Kraft in der  $x$ - $y$ -Ebene und kann daher weggelassen werden:

$$\iint_S \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}dS = \iint_S (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{n})dS.$$

**Schritt 3** Die Oberfläche wird vollständig in Teilbereiche untergliedert,  $S = A_1 + A_2 + A_3 + A_F + A_S$ , was sich auch in den Integralen des Impulssatzes widerspiegelt. Außerdem berücksichtigen wir sofort die Angaben „Reibungsfreiheit“ und „Homogenität“, d. h.  $\boldsymbol{\tau} = 0$ :

$$\begin{aligned} & \iint_{A_1} \rho(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1)\mathbf{u}_1dS + \iint_{A_2} \rho(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2)\mathbf{u}_2dS \\ & + \iint_{A_3} \rho(\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n}_3)\mathbf{u}_3dS + \iint_{A_F+A_S} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}dS \\ & = \iint_{A_1+A_2+A_3+A_F} (-p_0\mathbf{n})dS + \underbrace{\iint_{A_S} (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{n})dS}_{-F_{S,abs}}. \end{aligned}$$

$F_{S,abs}$  ist die Absolutkraft der Flüssigkeit auf die Schneide, inklusive der Wirkung des Luftdrucks. Dieser wirkt auch von der Rückseite der Schneide und wird daher durch Anwendung des Überdruckprinzips nach (22.27) herausgerechnet. Dadurch fällt das Ober-

flächenintegral über  $A_1 + A_2 + A_3 + A_F$  weg, und die Kraft  $F_S$  ist nur noch die gesuchte, resultierende Flüssigkeitskraft auf die Schneide.

Da auch die Flussterme der linken Seite des Impulssatzes auf den Stromlinien wegfallen, hat sich der Impulssatz bereits stark vereinfacht:

$$\begin{aligned} & \iint_{A_1} \rho(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1)\mathbf{u}_1dS + \iint_{A_2} \rho(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2)\mathbf{u}_2dS, \\ & + \iint_{A_3} \rho(\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n}_3)\mathbf{u}_3dS = -F_S. \end{aligned}$$

**Schritt 4** Die noch verbliebenen Vektoren werden nun durch die Einheitsvektoren  $\mathbf{i}$  und  $\mathbf{j}$  ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= u_1\mathbf{i}; & \mathbf{n}_1 &= -\mathbf{i}; & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 &= -u_1, \\ \mathbf{u}_2 &= u_2\mathbf{j}; & \mathbf{n}_2 &= \mathbf{j}; & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 &= u_2, \\ \mathbf{u}_3 &= u_3 \cos(\alpha)\mathbf{i} - u_3 \sin(\alpha)\mathbf{j}, \\ \mathbf{n}_3 &= \cos(\alpha)\mathbf{i} - \sin(\alpha)\mathbf{j}; & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n}_3 &= u_3. \end{aligned}$$

**Schritt 5** Die ermittelten Werte werden eingesetzt, und es wird genutzt, dass alle Vektoren und Geschwindigkeitsbeträge konstant sind:

$$\begin{aligned} & -\rho u_1^2 A_1 \mathbf{i} + \rho u_2^2 A_2 \mathbf{j} + \rho u_3^2 A_3 (\cos \alpha \mathbf{i} - \sin \alpha \mathbf{j}) = -F_S, \\ F_S &= \rho u_1^2 A_1 (1 - \frac{b_3}{b_1} \cos \alpha) \mathbf{i} - \rho u_1^2 A_1 (\frac{b_2}{b_1} - \frac{b_3}{b_1} \sin \alpha) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Die Kraftkomponente in  $x$ -Richtung entspricht dem ersten Term der rechten Seite, die Kraftkomponente in  $y$ -Richtung ist der zweite Term.

4. Da laut Voraussetzung auch an der Schneide keine Reibkraft angreifen soll (Vernachlässigen der Schubspannung), muss die resultierende Kraft auf die Schneide in  $y$ -Richtung insgesamt null sein. Aus dieser Bedingung ergibt sich der Ablenkwinkel  $\alpha$  für den betrachteten Fall:

$$\begin{aligned} & -\rho u_1^2 A_1 (\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \sin \alpha) \mathbf{j} = 0, \\ \sin \alpha &= \frac{1}{2}, \\ \alpha &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Für eine andere Aufteilung des Strahls verändert sich der Ablenkwinkel, aber nicht bei einer anderen Strömungsgeschwindigkeit  $u_1$ :

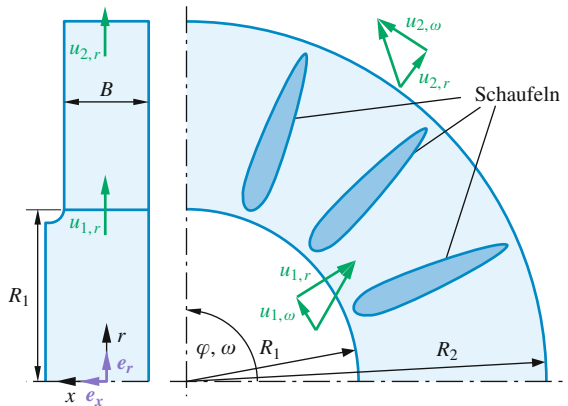
$$\sin \alpha = \frac{b_2}{b_3}.$$



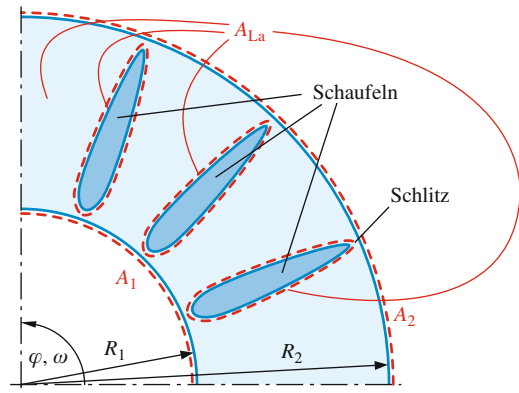
**Beachten Sie** Der Fall  $\alpha = 90^\circ$ , also  $b_2 = b_3$  ist die symmetrische Prallströmung auf eine ebene Platte. Die Schneide ist dann nicht, wie man vermuten könnte, zur Hälfte in den Strahl geschoben, sondern überdeckt mindestens den gesamten Querschnitt. Dieser scheinbare Widerspruch zur Anschauung löst sich auf, wenn man bedenkt, dass der Staupunkt S mit weiter eingeschobener Schneide immer weiter von der Spitze weg liegt. Im Fall der symmetrischen Prallströmung liegt die Staustromlinie dann exakt auf der Symmetrieachse, vorher nicht.

**22.5 ••** Die folgende Aufgabe führt im Ergebnis auf die Euler'sche Turbinengleichung. Trotz des Namens gilt sie nicht nur für Turbinen sondern auch für Pumpenlaufräder. Lediglich die Strömungsrichtung ist für Pumpen (von innen nach außen) und Turbinen (von außen nach innen) unterschiedlich, was aber in der Herleitung keine Rolle spielt.

**Drehmoment eines Kreislumpumpenlaufrades mit radialer Beschaukelung** Wir betrachten das Laufrad einer Radial-Kreislumpumpe (siehe Abbildung) und wenden den Drehimpulssatz darauf an. Die Strömung sei wieder inkompressibel (Dichte  $\rho = \text{konst.}$ ), nahezu reibungsfrei, und die Strömung im Laufrad ist im Wesentlichen trotz der Schaufeln rotationssymmetrisch. Dies kann man sich so vorstellen, dass sehr viele und sehr dünne Schaufeln verwendet werden, sodass die Strömungsrichtung durch die Schaufelrichtung vorgegeben wird. Wegen der Rotationssymmetrie wird die Schwerkraft keine Momentenwirkung ausüben, sodass sie auch nicht von vorneherein vernachlässigt werden muss. Sie könnte im Vergleich zu den anderen Kräften also beliebig groß und beliebig orientiert sein. Dies ist für praktisch alle Turbomaschinen gültig, denn als einzige Volumenkraft tritt in der Regel die Schwerkraft auf.



Wir betrachten das Laufrad aus einem ruhenden Bezugssystem heraus und verwenden problemangepasst ein Zylinderkoordinatensystem  $(r, \varphi, x)$  mit der  $x$ -Achse in der Rotationsachse des Laufrads. Der Bezugspunkt zur Drehimpulsbildung liegt in der Rotationsachse  $x$ .



Beim Einstromen in das Laufrad ist in der Praxis zwar häufig das Strömungsmedium drehimpulsfrei ( $u_{1,\varphi} = 0$ ), strömt also in rein radialer Richtung, wir können die Rechnung aber auch ohne eine solche Vorgabe für den allgemeinen Fall durchführen. Ein- und Ausströmung des Fluids besitzen im Allgemeinen sowohl eine Radialkomponente  $u_{i,r}$  als auch eine Umfangskomponente  $u_{i,\varphi}$  (siehe Abbildung). Wenn das Laufrad von einer Welle mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  angetrieben wird, ist hierfür ein bestimmtes Drehmoment erforderlich. Das Fluid strömt aufgrund der Fliehkraft von innen nach außen durch das Laufrad und erhält über die Schaufeln Drehimpuls.

Geg.:  $\dot{m}, \omega, B, R_1, R_2, \rho$ .

1. Wie groß ist das notwendige Drehmoment  $M$ ?
2. Wie groß ist die mindestens notwendige Wellenleistung  $P_W$  zum Antrieb des Laufrads?

**Resultat:**

$$M = \dot{m} (R_2 u_{2,\varphi} - R_1 u_{1,\varphi}) e_x,$$

$$P_W = M\omega = \dot{m} [(R_2\omega) u_{2,\varphi} - (R_1\omega) u_{1,\varphi}].$$

**Ausführliche Lösung:** Zur Ermittlung des Moments gehen wir wieder nach der „Fünf-Schritte-Methode“ vor.

**Schritt 1** Als Kontrollvolumen wählen wir den gesamten Fluidbereich zwischen Innenradius  $R_1$  (Schaufeleintrittskreis) und Außenradius  $R_2$  (Schaufelaustrittskreis), wobei wir die Schaufeloberfläche komplett erfassen, indem wir das Kontrollvolumen kurz vor den Schaufeln beginnen und erst kurz nach den Schaufeln enden lassen (siehe Abbildung). Zur Erzeugung des geschlossenen Kontrollvolumens, das nur Fluid, nicht aber Schaufeln enthält, verwenden wir die Schlitzmethode und verbinden alle Schaufeloberflächen wie gezeigt per Schlitz mit dem Austrittskreis und nur eine der Schaufeln mit dem Eintrittskreis. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass man so an einem beliebigen Punkt des Randes S des Kontrollvolumens einen Stift ansetzen kann und dann,

ohne den Stift abzusetzen, jeder andere Punkt der Oberfläche erreicht werden kann und man wieder zum Anfangspunkt zurückkommt. Dieser einfache Test erlaubt es, die erforderliche Eigenschaft des Kontrollvolumens, geschlossen zu sein, zu überprüfen. Auch die von der Flüssigkeit auf der Innenseite berührte vordere und hintere Deckscheibe (welche die Schaufeln tragen) sind an der Kraftübertragung beteiligt und zählen zur Wandfläche  $A_{La}$  dazu. Damit übt das Laufrad über die Oberfläche  $A_{La}$  des geschlossenen Kontrollvolumens das Moment  $M$  aus. Über die Fläche  $A_1$  tritt das Fluid ein, über  $A_2$  wieder aus. Eine bestimmte Schaufelform oder Ausrichtung müssen wir nicht vorgeben, d.h. die Schaufeln können „strömungsgünstig“ im Sinne geringer Verluste optimiert werden und z. B. „rückwärtsgekrümmt“ sein.

**Schritt 2** Der Drehimpulssatz wird allgemein aufgeschrieben. Als Volumenkraft wirkt nur die Schwerkraft, deren Momentenwirkung wegen der Rotationssymmetrie des Volumens  $V$  in Bezug auf die Rotationsachse immer Null ist. Das heißt, das Flüssigkeitsgewicht leistet keinen Beitrag zum Drehmoment und kann daher weggelassen werden:

$$\iint_S \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) dS = \iint_S (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}) dS.$$

**Schritt 3** Die Oberfläche wird vollständig in Teilbereiche untergliedert,  $S = A_1 + A_2 + A_{La}$ , was auf die Integrale übertragen wird. Wiederum berücksichtigen wir sofort die angegebene Reibungsfreiheit und die Homogenität,  $\tau = 0$ :

$$\begin{aligned} & \iint_{A_1} \rho(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{u}_1) dS \\ & + \iint_{A_2} \rho(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2)(\mathbf{r} \times \mathbf{u}_2) dS \\ & + \iint_{A_{La}} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) dS \\ & = \iint_{A_1} -p_1(\mathbf{r} \times \mathbf{n}_1) dS \\ & + \iint_{A_2} -p_2(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS + \underbrace{\iint_{A_{La}} -p(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS}_M. \end{aligned}$$

**Schritt 4** Noch verbliebenen Vektoren werden nun durch die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{e}_x$  ausgedrückt. Für Vektorprodukte gilt: Stehen die Vektoren senkrecht aufeinander, so ist das Ergebnis ein Vektor, der auf den beiden

anderen senkrecht steht und dessen Betrag gleich dem Produkt der Beträge ist. Sind die Vektoren parallel zueinander, ist das Vektorprodukt null. Beim Tauschen der Reihenfolge entsteht der Gegenvektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= u_{1,r} \mathbf{e}_r + u_{1,\varphi} \mathbf{e}_\varphi, & \mathbf{n}_1 &= -\mathbf{e}_r, \\ \mathbf{u}_2 &= u_{2,r} \mathbf{e}_r + u_{2,\varphi} \mathbf{e}_\varphi, & \mathbf{n}_2 &= \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 &= -u_{1,r}, & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 &= u_{2,r}, \\ \mathbf{r} &= r \mathbf{e}_r, \\ (\mathbf{r} \times \mathbf{u}_1) &= R_1 u_{1,\varphi} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi) = R_1 u_{1,\varphi} \mathbf{e}_x, \\ (\mathbf{r} \times \mathbf{u}_2) &= R_2 u_{2,\varphi} \mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

**Schritt 5** Die ermittelten Werte werden eingesetzt, und es wird genutzt, dass alle Vektoren und Geschwindigkeitsbeträge konstant sind. Das Drehmoment ist daher:

$$\mathbf{M} = -\rho u_{1,r} R_1 u_{1,\varphi} \mathbf{e}_x A_1 + \rho u_{2,r} R_2 u_{2,\varphi} \mathbf{e}_x A_2.$$

Jetzt kann noch die Kontinuitätsgleichung berücksichtigt werden, denn die radiale Komponente der Geschwindigkeit mal jeweiliger radialer Fläche ist der Volumenstrom:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho u_{1,r} A_1 = \rho u_{2,r} A_2, \\ \mathbf{M} &= \dot{m} (R_2 u_{2,\varphi} - R_1 u_{1,\varphi}) \mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

(2) Mindestens muss die Fluidleistung aufgebracht werden, dazu kommen aber noch Reibverluste der Welle und der Dichtungen. Die auf das Fluid übertragene Wellenleistung  $P_W$  ist:

$$P_W = M\omega = \dot{m} [(R_2\omega) u_{2,\varphi} - (R_1\omega) u_{1,\varphi}].$$

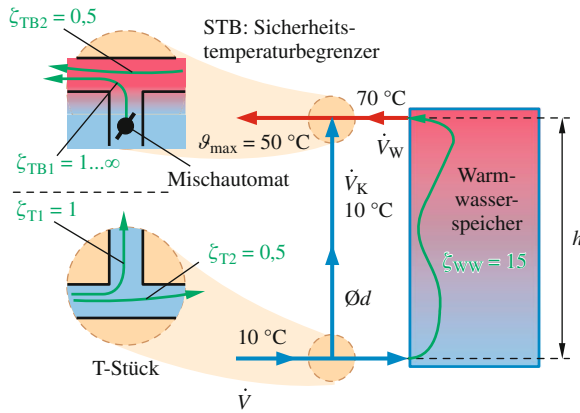
Die Kernaussage dieser Gleichung (Euler'sche Turbinengleichung) ist, dass die übertragene spezifische Arbeit  $P_W/\dot{m}$ , die in der Thermodynamik auch technische Arbeit  $w_t$  genannt wird, bei Strömungsmaschinen (Turbinen, Verdichter oder Pumpen) im Wesentlichen nur von der Umlenkung der Strömung in Umfangsrichtung, der Winkelgeschwindigkeit der Welle und dem Radius abhängig ist. Für den häufigen Fall der drallfreien Zuströmung ist am Eintritt  $u_{1,\varphi} = 0$ , dann hängen Drehmoment und spezifische Arbeit nur noch vom Austrittsdrehimpuls der Strömung ab:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \dot{m} R_2 u_{2,\varphi} \mathbf{e}_x, \\ w_t &= (R_2\omega) u_{2,\varphi}. \end{aligned}$$

Weil die Dichte nicht mehr explizit in der Euler'schen Turbinengleichung auftaucht (sie steckt in  $\dot{m}$ ), gilt dies nicht nur für inkompressible Strömung sondern auch für kompressible Strömung.

**22.6 •• Sicherheitstemperaturbegrenzer eines Warmwasserspeichers** Bei modernen Warmwasserspeichern mit großem Volumen, die zur Speicherung von

Solarwärme gedacht sind, wird aus Sicherheitsgründen ein Sicherheitstemperaturbegrenzer (STB) angebracht. Damit sich bei hohen Speichertemperaturen insbesondere Kleinkinder nicht verbrühen können, lässt sich der Mischautomat so einstellen, dass eine Maximaltemperatur  $\vartheta_{\max}$  nicht überschritten wird (siehe Abbildung).



Der Mischautomat mische dem Heißwasser von 70 °C aus dem Speicher Kaltwasser von 10 °C zu, indem über ein T-Stück vor Eintritt in den Speicher Wasser aus der Kaltwasserleitung am Speicher vorbei geführt wird. Alle Rohrquerschnitte sind kreisförmig mit dem Innendurchmesser  $d = 10$  mm, die gerade Leitung vom T-Stück zum STB überwindet eine Höhe von  $h = 2,5$  m. Die relative Rauigkeit ist  $k/d = 0,02$ . Die zur Rechnung notwendigen  $\zeta$ -Werte sind in der Skizze angegeben (sie wurden zur Verdeutlichung des Berechnungswegs bewusst sehr hoch gewählt) und beziehen sich beim T-Stück und beim Speicher auf die Rohrleitungsgeschwindigkeit am Eintritt in das jeweilige Bauteil, beim STB bezieht der Wert sich ausnahmsweise auf den *Austritt* (das ist einfacher zu rechnen). Der Mischautomat im Kaltwasserstrang besitzt einen Verlustbeiwert von mindestens 1 (offen) bis unendlich (bei geschlossenem Mischer, wenn die WW-Temperatur unter dem Maximalwert ist, d. h. kein Durchfluss). Im betrachteten Betriebsfall soll ein Volumenstrom  $\dot{V} = 0,31$  l/s entnommen werden. Der STB wird auf eine maximale Temperatur von 50 °C eingestellt. Zur Ermittlung von Rohr widerstandszahlen bei turbulenter Strömung soll die Colebrook-Formel verwendet werden. Weitere gegebene Werte: Wasser:  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, kinematische Viskosität:  $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

Bestimmen Sie:

- den Volumenstrom  $\dot{V}_W$  aus dem WW-Behälter und den vom Mischautomat zugemischten Kaltwasserstrom  $\dot{V}_K$ ,
- die Reynoldszahl, die Rohr widerstandszahl  $\lambda$  und den Verlustbeiwert  $\zeta_K$  in der Mischleitung,

- den Druckverlust  $\Delta p_V$  des Systems (Eintritt T-Stück bis Austritt STB) und den Verlustbeiwert  $\zeta_{TB1}$  des STB in diesem Betriebsfall,
- die kleinstmögliche Temperatur  $\vartheta_{\min}$ , auf die sich mit den gegebenen Werten der STB überhaupt einstellen lässt. Verwenden Sie hierbei (vereinfachend) die vorher berechnete Rohr widerstandszahl  $\lambda$ .

**Resultat:**

$$\dot{V}_K = \frac{1}{3} \dot{V} = 0,1 \text{ l/s}, \quad \dot{V}_W = \frac{2}{3} \dot{V} = 0,2 \text{ l/s},$$

$$\lambda = 0,0515, \quad \zeta_K = \lambda \frac{h}{d} = 12,87, \quad \Delta p_V = 55.910 \text{ Pa},$$

$$\zeta_{TB1} = 5,23, \quad \vartheta_{\min} = 41^\circ \text{C}.$$

**Ausführliche Lösung:**

- Die Aufteilung des Volumenstroms dieser Parallelschaltung ergibt sich aus der eingestellten Temperatur. Die Enthalpie bzw. innere Energie des Wassers (Wärme kapazität  $c_W$ ) nach der Mischung ist gleich der Summe der einzelnen Ströme:

$$\dot{V} = \dot{V}_W + \dot{V}_K,$$

$$\rho \dot{V} c_W (50^\circ \text{C}) = \rho \dot{V}_W c_W (70^\circ \text{C}) + \rho \dot{V}_K c_W (10^\circ \text{C}),$$

$$\dot{V} (50^\circ \text{C}) = \dot{V}_W (70^\circ \text{C}) + \dot{V}_K (10^\circ \text{C}),$$

$$\dot{V} (70^\circ \text{C} - 50^\circ \text{C}) = \dot{V}_K (70^\circ \text{C} - 10^\circ \text{C}).$$

Wir erhalten:

$$\dot{V}_K = \frac{1}{3} \dot{V} = 0,1 \text{ l/s},$$

$$\dot{V}_W = \frac{2}{3} \dot{V} = 0,2 \text{ l/s}.$$

- Die Rohrleitungsgeschwindigkeit und die Reynoldszahl in der Mischleitung sind:

$$u_K = \frac{\dot{V}_K}{A_K} = \frac{4 \dot{V}_K}{\pi d^2} = 1,273 \text{ m/s},$$

$$Re = \frac{u_K d}{\nu} = 12.730.$$

Die Reynoldszahl ist über 2300, daher ist die Strömung turbulent, und wir verwenden die iterative Colebrook-Formel (Gl. 22.34), wobei wir beachten, dass der Logarithmus in der Gleichung zur Basis 10 ist. Als Startwert verwenden wir einen aus dem Diagramm 22.28 abgelesenen Wert. Für  $Re \approx 12.000$  und  $k/d = 0,02$  erhalten wir als Startwert  $\lambda \approx 0,05$ . Diese Ablesegenauigkeit reicht für die Iteration aus. Iteriert wird über  $\sqrt{\lambda}$ , sodass wir auf der rechten Seite der Colebrook-Formel

$$\sqrt{\lambda} = \frac{-1}{2 \log \left( \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,71d} \right)}$$

den Wert  $\sqrt{\lambda_0} = 0,224$  einsetzen. Die in den Iterationsschritten erhaltenen Ergebnisse setzen wir immer



wieder rechts ein, bis sich das Ergebnis nicht mehr ändert. Wir erhalten folgende Werte:

$$\sqrt{\lambda_1} = 0,22700,$$

$$\sqrt{\lambda_2} = 0,22692,$$

$$\sqrt{\lambda_3} = 0,22692.$$

Bereits nach drei Iterationsschritten liegt Konvergenz vor. Nach Quadrieren (nicht vergessen!) erhalten wir die Rohrwiderstandszahl und berechnen den Verlustbeiwert der Rohrleitung aus ihrer Länge  $h/d$ :

$$\lambda = 0,0515,$$

$$\zeta_K = \lambda \frac{h}{d} = 12,87.$$

3. Der Druckverlust des Systems ist gleich dem Druckverlust der beiden Einzelstränge. Das bedeutet, wir könnten grundsätzlich entweder den Weg durch die Mischleitung oder den Weg durch den Warmwasserspeicher zur Berechnung wählen. Der Verlustbeiwert des Mischautomats ist aber nicht bekannt, da er sich automatisch einstellt, sodass wir den Weg über den Behälter wählen. In beiden Strängen sind mehrere verlustbehaftete Elemente hintereinander geschaltet, sodass sich deren Druckverluste addieren. Beim Weg durch den Warmwasserspeicher treten die Verluste des T-Stücks ( $\zeta_{T2}$ ), der Verlust des Behälters ( $\zeta_{WW}$ ) und der Verlust des STB ( $\zeta_{TB2}$ , Bezugsenergie ist der Austritt!) auf:

$$u_R = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2} = 3,820 \text{ m/s},$$

$$u_W = \frac{4\dot{V}_W}{\pi d^2} = 2,546 \text{ m/s},$$

$$\Delta p_V = \frac{\rho}{2} (\zeta_{T2} u_R^2 + \zeta_{WW} u_W^2 + \zeta_{TB2} u_R^2),$$

$$\Delta p_V = 55,910 \text{ Pa}.$$

Der gesuchte Verlustbeiwert, auf den sich der Mischautomat eingestellt hat, lässt sich jetzt über den bekannten Druckverlust des Systems ermitteln:

$$u_R = 3,820 \text{ m/s},$$

$$u_K = 1,273 \text{ m/s},$$

$$\Delta p_V = \frac{\rho}{2} (\zeta_{T1} u_R^2 + \zeta_K u_K^2 + \zeta_{TB1} u_R^2),$$

$$\zeta_{TB1} = 5,23.$$

4. Für den vollständig offenen STB gilt  $\zeta_{TB1}^* = 1$ . Der Gesamtdruckverlust senkt sich daher entsprechend ab, in beiden Strängen stellen sich neue Geschwindigkeiten ein:

$$\Delta p_V^* = \frac{\rho}{2} (\zeta_{T1} u_R^2 + \zeta_K u_K^{*2} + \zeta_{TB1}^* u_R^2),$$

$$\Delta p_V^* = \frac{\rho}{2} (\zeta_{T2} u_R^2 + \zeta_{WW} u_W^{*2} + \zeta_{TB2} u_R^2).$$

Setzt man noch die Kontinuitätsgleichung  $u_R = u_K^* + u_W^*$  ein, ergeben sich die neuen Geschwindigkeiten in den Rohrleitungen sowie die neue Mischtemperatur:

$$u_K^* = 1,846 \text{ m/s}; \quad u_W^* = 1,974 \text{ m/s}; \quad \vartheta_{\min} = 41^\circ \text{C}.$$

**22.7 ••• Zustandsänderung über einer Stoßfront** Bestimmen Sie mithilfe der Erhaltungssätze die Zustandsänderung über einer Stoßfront aus der Anströmmachzahl  $M_1$

1. die Druckdifferenz über die Stoßfront in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten und den Dichtewerten,
2. das Druckverhältnis  $p_2/p_1$ , das Dichteverhältnis  $\rho_2/\rho_1$  und das Temperaturverhältnis  $T_2/T_1$ ,
3. die Abströmmachzahl  $M_2$  und die Entropieerzeugung  $(s_2 - s_1)/R$ .

**Resultat:**

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2,$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + 2 \frac{\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1),$$

$$M_2^2 = M_1^2 \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{1}{\kappa - 1} \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right).$$

**Ausführliche Lösung:** Die in Abb. 22.34 markierte Stoßzone, an der bilanziert wird, ist sehr dünn, sodass die ringförmige Wandfläche  $A_W$  sehr viel kleiner ist als Eintritts- und Austrittsfläche, die wiederum gleich groß sind,  $A_1 = A_2$ . Wegen der kleinen Wirkfläche  $A_W$  können wir im Impulssatz insbesondere evtl. wirkende Schubspannungen (bzw. die Kräfte aus diesen  $F_\tau = \tau_W A_W$ ) auf dieser Fläche gegen Druckkräfte vernachlässigen. Diese Vereinfachung rechtfertigt sich auch im realen Experiment durch die beobachtbare geringe Dicke der Stoßzone. Der Lösungsweg wird hier nur angedeutet, beim Impulssatz wird die Fünf-Schritte-Methode angewendet.

1. Am skizzierten Kontrollvolumen ergeben Kontinuitäts-, Energie-, und Zustandsgleichungen sowie der Impulssatz im ersten Schritt folgende bereits vereinfachte Gleichungen:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2,$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2},$$

$$p_i = \rho_i h_i \frac{\kappa - 1}{\kappa}; \quad i = 1, 2,$$

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2.$$

2. Kontinuität, Energie- und Impulssatz werden umgestellt und die Eintrittsgeschwindigkeit ausgeklammert:

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1}{\rho_2} &= \frac{u_2}{u_1}, \\ \frac{u_1^2}{2} \left(1 - \frac{u_2^2}{u_1^2}\right) &= h_2 - h_1, \\ p_2 - p_1 &= \rho_1 u_1^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{u_2^2}{u_1^2}\right).\end{aligned}$$

Das Geschwindigkeitsverhältnis in Energie- und Impulssatz wird mit der Kontinuitätsgleichung durch das Dichteverhältnis ersetzt:

$$\begin{aligned}\frac{u_1^2}{2} \left(1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\right) &= \frac{u_1^2}{2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \\ &= h_2 - h_1, \\ \rho_1 u_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) &= p_2 - p_1.\end{aligned}$$

Dividiert man die erste der beiden entstandenen Gleichungen durch die zweite, fällt auch die Geschwindigkeit  $u_1$  heraus und es entsteht eine Gleichung nur in Zustandsgrößen, die *Hugoniot-Relation*:

$$\frac{1}{2\rho_1} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \frac{h_2 - h_1}{p_2 - p_1}.$$

Die Enthalpien  $h_1$  und  $h_2$  lassen sich aus dieser Gleichung noch mithilfe der Zustandsgleichung idealer Gase eliminieren, sodass wir schließlich nach einigem Umformen folgende Beziehung erhalten:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right) - 1}{\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right) - \frac{\rho_2}{\rho_1}}.$$

Diese lässt sich auch nach dem Dichteverhältnis auflösen:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right) + 1}{\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right) + \frac{p_2}{p_1}}.$$

Wir betrachten nochmals den umgeformten Impulssatz und führen über die Zustandsgleichung die Machzahl  $M_1$  ein:

$$\frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \kappa M_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \frac{p_2}{p_1} - 1.$$

Zusammen mit der vorherigen Beziehung ergibt sich eine quadratische Gleichung für das Druckverhältnis mit  $M_1$  als Variable, die wir nach dem Druckverhältnis auflösen. Die Gleichung besitzt zwei Lösungen für das Druckverhältnis: Erstens die triviale Lösung  $p_2/p_1 = 1$  der ungestörten Strömung im Rohr, in diesem Fall stellt sich kein Stoß ein, was natürlich eine physikalisch mögliche Lösung der Gleichungen an unserem Kontrollvolumen ist. Die zweite Lösung ist das Druckverhältnis, wenn sich ein Stoß gebildet hat (22.46):

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + 2 \frac{\kappa}{\kappa+1} (M_1^2 - 1).$$

Die anderen Zusammenhänge (22.47) bis (22.50) der gefragten Größen erhalten wir, wenn wir dieses Ergebnis rückwärts in die vorherigen Beziehungen einsetzen.

3. Für die Abströmmachzahl und die Entropieerzeugung verwenden wir am Schluss noch die Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen  $s$ ,  $p$  und  $\rho$  bei idealem Gas:

$$\begin{aligned}M_2^2 &= M_1^2 \frac{p_1}{p_2} \frac{\rho_1}{\rho_2}, \\ \frac{s_2 - s_1}{R} &= \frac{1}{\kappa - 1} \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right).\end{aligned}$$