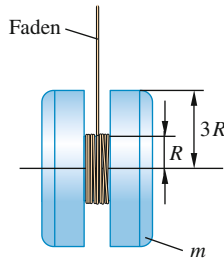


Aus Kapitel 10

Aufgaben

10.1 • Der Faden eines Jo-Jo wird festgehalten, während das Jo-Jo nach unten beschleunigt.



Wie groß ist die Beschleunigung des Schwerpunktes, wenn der Radius der Walze, auf dem der Faden aufgewickelt ist, R beträgt und das Jo-Jo selbst als homogene Scheibe der Masse m mit Radius $3R$ betrachtet werden kann?

Resultat:

$$\ddot{x} = \frac{2}{11}g$$

Ausführliche Lösung: Wir führen eine Koordinate x vertikal nach unten und einen Drehwinkel φ so ein, dass

$$\dot{x} = R\dot{\varphi}$$

gilt. Mit der Trägheitskraft $m\ddot{x}$ nach oben und dem Trägheitsmoment $J_S\ddot{\varphi}$ entgegen der Drehrichtung folgt für die Momentenbilanz um den Punkt A, an dem der Faden auf die Spule aufläuft:

$$\sum M_A = 0 = mgR - m\ddot{x}R - J_S\ddot{\varphi}.$$

Mit

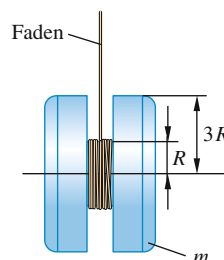
$$J_S = \frac{m}{2}(3R)^2 = \frac{9}{2}mR^2,$$

$$\ddot{x} = R\ddot{\varphi}$$

folgt das Endergebnis

$$\ddot{x} = \frac{2}{11}g.$$

10.2 • Mithilfe des Energiesatzes bestimme man die Winkelgeschwindigkeit eines Jo-Jos, das aus der Ruhe losgelassen wird, und sich um h nach unten bewegt.



Das Jo-Jo kann als homogene Scheibe mit Masse m und Radius $3R$ betrachtet werden. Der Radius der Walze, auf die der Faden aufgewickelt ist, beträgt R .

Resultat:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{4gh}{11R^2}}$$

Ausführliche Lösung: Gemäß dem Energiesatz gilt:

$$E_{\text{kin,oben}} + E_{\text{pot,oben}} = E_{\text{kin,unten}} + E_{\text{pot,unten}}$$

Für das Schwerepotenzial legen wir das Nullniveau an den unteren Punkt. Damit folgt für die Energien:

$$E_{\text{pot,unten}} = 0,$$

$$E_{\text{kin,unten}} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{J_S}{2}\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{\varphi}R)^2 + \frac{9}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 = \frac{11}{4}mR^2\dot{\varphi}^2,$$

$$E_{\text{pot,oben}} = mgh,$$

$$E_{\text{kin,oben}} = 0.$$

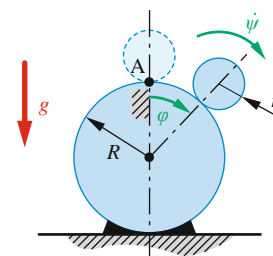
Eingesetzt erhalten wir:

$$mgh = \frac{11}{4}mR^2\dot{\varphi}^2$$

oder

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{4gh}{11R^2}}.$$

10.3 •• Eine homogene Walze wird am oberen Punkt bei A aus der Ruhe losgelassen und rollt auf einer kreisförmigen Unterlage ab. Die Unterlage hat den Radius R , die Walze den Radius r .



Bei welchem Winkel φ hebt die Walze von der Unterlage ab?

Resultat:

$$\cos \varphi = \frac{4}{7}, \quad \varphi = 55,15^\circ$$

Ausführliche Lösung: Wir wenden zunächst den Energiesatz an. Die Geschwindigkeit des Walzenschwerpunktes beträgt

$$v_S = (R + r)\dot{\varphi}.$$

Über die Rollbedingung

$$(R + r)\dot{\varphi} = r\dot{\psi}$$

ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit der Walze zu

$$\dot{\psi} = \frac{R + r}{r}\dot{\varphi}.$$

Für das Schwerpotenzial legen wir das Nullniveau in den Mittelpunkt der Unterlage, was zu den Energien

$$E_{\text{pot,oben}} = (R + r)mg,$$

$$E_{\text{kin,oben}} = 0,$$

$$E_{\text{pot,unten}} = (R + r)mg \cos \varphi,$$

$$E_{\text{kin,unten}} = \frac{m}{2}v_S^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\psi}^2$$

$$= \frac{m}{2}(R + r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{4}(R + r)^2\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}m(R + r)^2\dot{\varphi}^2$$

führt. Eingesetzt in den Energiesatz liefert dies:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g(1 - \cos \varphi)}{3(R + r)}.$$

Die Normalkraft zwischen Walze und Unterlage

$$N = mg \cos \varphi - m(R + r)\dot{\varphi}^2$$

verschwindet beim Abheben, sodass

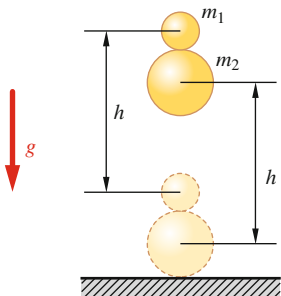
$$mg \cos \varphi = m(R + r)\frac{4g(1 - \cos \varphi)}{3(R + r)}$$

erfüllt sein muss. Als Bedingung erhalten wir:

$$\cos \varphi = \frac{4}{7}.$$

Dies ist erfüllt für $\varphi = 55,15^\circ$.

10.4 ••• Zwei Bälle werden wie abgebildet aus einer Höhe h losgelassen.



Es gilt $m_1 < m_2$. Wir nehmen an, dass zunächst der untere Ball auf die Unterlage stößt und dann nach dem Rückprall auf den zweiten Ball. Für beide Stöße liegt dieselbe Stoßzahl vor. Wie hoch steigt der zweite Ball, wenn die Stoßzahl für beide Stöße $\varepsilon = 1$ ist? Wie groß muss die Stoßzahl mindestens sein, dass der obere Ball mindestens auf die ursprüngliche Höhe steigt?

Resultat:

$$h_{\text{nach}} = \left(\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 h,$$

$$\varepsilon_{\text{min}} = \sqrt{2 + 2\frac{m_1}{m_2}} - 1.$$

Ausführliche Lösung: Die Geschwindigkeiten der Bälle direkt vor den Stößen ist $v_u = \sqrt{2gh}$ nach unten. Dies kann leicht mit dem Energiesatz verifiziert werden. Zunächst stößt Massenpunkt 2 gegen den Untergrund. Für die Stoßzahl $\varepsilon = 1$ gilt dabei $v_{\text{nach}} = -v_u$. Dies bedeutet für den zweiten Stoß:

$$v_{1,\text{vor}} = v_u,$$

$$v_{2,\text{vor}} = -v_u$$

Mit der Formel

$$v_{1,\text{nach}} = \frac{m_1 v_{1,\text{vor}} + m_2 v_{2,\text{vor}} - \varepsilon m_2 (v_{1,\text{vor}} - v_{2,\text{vor}})}{m_1 + m_2}$$

folgt so

$$v_{1,\text{nach}} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v_u.$$

Da m_2 größer als m_1 ist, bewegt sich der Ball 1 nach oben. Anwenden des Energiesatzes liefert

$$\frac{m_1}{2} \left(\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v_u^2 = m_1 g h_{\text{nach}}$$

oder nach Einsetzen von v_u

$$h_{\text{nach}} = \left(\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 h.$$

Wenn $m_2 \gg m_1$, dann gilt $h_{\text{nach}} \approx 9h$.

Wird der Rechengang für eine Stoßzahl $\varepsilon \neq 1$ durchgeführt, so erhalten wir

$$v_{1,\text{vor}} = v_u,$$

$$v_{2,\text{vor}} = -\varepsilon v_u,$$

$$v_{1,\text{nach}} = \frac{m_1 v_u + m_2 (-\varepsilon v_u) - \varepsilon m_2 (1 + \varepsilon) v_u}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 - m_2(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{m_1 + m_2} v_u.$$

Damit die vorherige Höhe erreicht wird, muss $v_{1,\text{nach}} = -v_u$ gelten. Dies ist für

$$\frac{m_1 - m_2(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{m_1 + m_2} = -1$$

oder

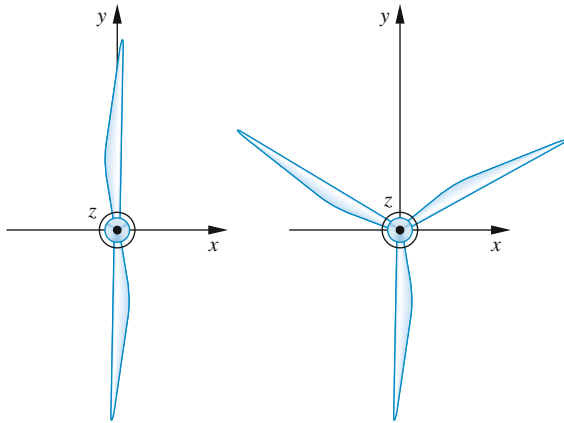
$$\varepsilon^2 + 2\varepsilon - \frac{2m_1 + m_2}{m_2} = 0$$

erfüllt. Von den möglichen Lösungen liegt die Lösung

$$\varepsilon_{\min} = -1 + \sqrt{1 + \frac{2m_1 + m_2}{m_2}} = \sqrt{2 + 2\frac{m_1}{m_2}} - 1$$

zwischen 0 und 1.

10.5 •• Zwei Entwürfe von Windrädern, ein zweiflügeliges und ein dreiflügeliges, sollen untersucht werden.



Wie groß sind die Massenträgheitsmomente der zwei Windräder bezüglich der Koordinatenachsen durch die Nabe? Wie sehen die Trägheitsmatrizen für diese Koordinatenrichtungen aus? Die einzelnen Flügel können als dünne Stäbe der Masse m und der Länge l angenommen werden.

Resultat: Entwurf 1:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ml^2 \end{pmatrix}$$

Entwurf 2:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & ml^2 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung: Entwurf 1:

$$J_{xx} = 2\frac{ml^2}{3} = J_{zz}$$

Die Deviationsmomente sind null. Das Massenträgheitsmoment J_{yy} verschwindet näherungsweise und wir erhalten:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ml^2 \end{pmatrix}.$$

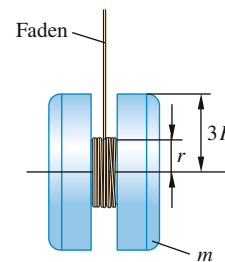
Beim Entwurf 2 erhalten wir

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \frac{ml^2}{3} + 2 \int_0^l \frac{m}{l} s^2 \sin^2 30^\circ ds \\ &= \frac{ml^2}{3} + 2 \frac{m}{l} \frac{1}{4} \frac{l^3}{3} \\ &= \frac{1}{2}ml^2, \\ J_{yy} &= 2 \int_0^l \frac{m}{l} s^2 \cos^2 30^\circ ds \\ &= \frac{1}{2}ml^2, \\ J_{zz} &= 3 \frac{ml^2}{3} \\ &= ml^2. \end{aligned}$$

Da die Deviationsmomente aufgrund der Symmetrie verschwinden, ergibt sich die Trägheitsmatrix zu

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & ml^2 \end{pmatrix}.$$

10.6 • Beim abgebildeten Jo-Jo wird der Faden nach oben bewegt.



Wie groß muss die Kraft im Faden des Jo-Jos sein, damit sich der Schwerpunkt nicht bewegt? Wie groß ist dann die Winkelbeschleunigung? Das Jo-Jo kann als homogene Scheibe mit Masse m und Radius $3R$ betrachtet werden. Der Radius der Walze, auf die der Faden aufgewickelt ist, beträgt r . Wie groß ist die Kraft im Faden, wenn der Faden nicht nach oben gezogen wird, sondern nur festgehalten wird?

Resultat: Schwerpunkt fix:

$$F = mg$$

Faden festgehalten:

$$F = mg \frac{9R^2}{2r^2 + 9R^2}$$

Ausführliche Lösung: Wenn der Schwerpunkt sich nicht bewegt, dann ist dessen Beschleunigung null und es gilt $F = mg$. Dabei muss aber der Faden mit zunehmender Geschwindigkeit nach oben gezogen werden.

Wenn der Faden nur festgehalten wird, dann muss zunächst die Schwerpunktsbeschleunigung bestimmt werden. Eine Momentenbilanz ähnlich wie in Aufgabe 10.1 führt auf

$$mgr - mr\ddot{x}_S - \frac{9}{2}mR^2 \frac{\ddot{x}_S}{r} = 0$$

und damit

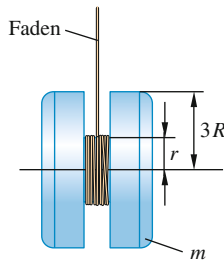
$$\ddot{x}_S = \frac{g}{1 + \frac{9R^2}{2r^2}}.$$

Die Kraft im Faden folgt aus einer Kräftebilanz

$$F = mg - m\ddot{x}_S = mg \frac{9R^2}{2r^2 + 9R^2}.$$

Für den Sonderfall $r = R$ ist die Fadenkraft $F = \frac{9}{11}mg$.

10.7 • Der Faden des Jo-Jos wird festgehalten. Der Schwerpunkt bewegt sich momentan mit der Geschwindigkeit v nach oben.



Wie hoch steigt das Jo-Jo bis es zur Ruhe kommt?

Resultat:

$$h = \left(\frac{1}{2} + \frac{9R^2}{4r^2} \right) \frac{v^2}{g}$$

Ausführliche Lösung: Wenn wir das Nullniveau an den unteren Punkt legen, dann folgt aus dem Energiesatz

$$E_{\text{kin,unten}} = E_{\text{pot,oben}}.$$

Mit den Energien

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,unten}} &= \frac{m}{2}v^2 + \frac{J_S}{2}\omega^2 \\ &= \frac{m}{2}v^2 + \frac{9}{4}mR^2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \\ &= m \left(\frac{1}{2} + \frac{9R^2}{4r^2} \right) v^2, \end{aligned}$$

$$E_{\text{pot,oben}} = mgh$$

ergibt sich:

$$h = \left(\frac{1}{2} + \frac{9R^2}{4r^2} \right) \frac{v^2}{g}.$$

10.8 •• Ein Auto (Masse m , Massenträgheitsmoment J_S um eine Achse senkrecht durch den Schwerpunkt S) soll während einer Kurvenfahrt (Radius R) von der Geschwindigkeit v_1 auf die Geschwindigkeit v_2 beschleunigt werden. Wie groß muss die Leistung des Autos sein, wenn dies während der Zeit T erfolgen soll?

Resultat:

$$P = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J_S}{R^2} \right) \frac{v_2^2 - v_1^2}{T}.$$

Ausführliche Lösung: Die Kinetische Energie des Autos beträgt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_S\omega^2$$

wobei die Winkelgeschwindigkeit sich aus

$$\omega = \frac{v}{R}$$

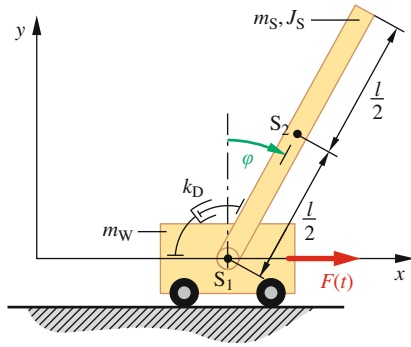
berechnet. Dies ergibt für die Zunahme an kinetischer Energie:

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J_S}{R^2} \right) (v_2^2 - v_1^2)$$

und damit für die mittlere Leistung

$$P = \frac{\Delta E_{\text{kin}}}{T} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J_S}{R^2} \right) \frac{v_2^2 - v_1^2}{T}.$$

10.9 ••• Das abgebildete System dient als Modell eines Überkopfpendels. Es besteht aus einem Wagen, der sich horizontal bewegt und der mit einer Kraft F angetrieben wird. An ihm ist ein dünner Stab der Länge l und Masse m_S drehbar angebracht. Der Wagen selbst hat die Masse m_W . Zwischen Stab und Wagen ist ein Drehdämpfer mit der Dämpferkonstanten k_D angebracht.



Die Koordinaten zur Beschreibung des Systems sind die Verschiebung x für den Wagen und der Winkel φ zwischen der Vertikalen und dem Stab. Wie lauten die zwei Bewegungsgleichungen für die Bewegung von Wagen und Stab?

Resultat:

$$(m_S + m_W)\ddot{x} + m_S \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_S \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F(t),$$

$$\frac{1}{3} m_S l^2 \ddot{\varphi} + m_S \frac{l}{2} \cos \varphi \ddot{x} + k_D \dot{\varphi} - m_S g \frac{l}{2} \sin \varphi = 0.$$

Ausführliche Lösung: Um entsprechende Trägheitskräfte einführen zu können, bestimmen wir zunächst die Beschleunigung von S_2 durch Ableiten des Ortsvektors:

$$\mathbf{r}_{S_2} = \begin{pmatrix} x + \frac{l}{2} \sin \varphi \\ \frac{l}{2} \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{S_2} = \begin{pmatrix} \dot{x} + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \\ -\frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{S_2} = \begin{pmatrix} \ddot{x} + \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ -\frac{l}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Wenn wir den Wagen im Sinne d'Alemberts freischneiden, treten neben den Gelenkkraften noch die Trägheitskraft $m_W \ddot{x}$ in negative Richtung auf. Da nur die Bewegungsgleichungen interessieren, reicht es, die Kräftebilanz in horizontaler Richtung zu bilden:

$$\sum F_x = 0 = F(t) + G_x - m_W \ddot{x}$$

Diese beinhaltet allerdings noch die Gelenkkraft G_x . Um sie zu bestimmen, wird der Stab ebenfalls im Sinne d'Alembert's freigeschnitten und sämtliche Trägheitswirkungen eingetragen. Eine Kräftebilanz in horizontaler Richtung und eine Momentenbilanz um den Gelenkpunkt (da dann die unbekannten Gelenkkräfte nicht in der Gleichung auftreten) ergeben:

chung auftreten) ergeben:

$$\sum F_x = -m_S \left(\ddot{x} + \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) - G_x = 0,$$

$$\sum M_G = J_{S_2} \ddot{\varphi} + k_D \dot{\varphi}$$

$$+ m_S \frac{l}{2} \cos \varphi \left(\ddot{x} + \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right)$$

$$- m_S \frac{l}{2} \sin \varphi \left(-\frac{l}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right)$$

$$- m_S g \frac{l}{2} \sin \varphi = 0$$

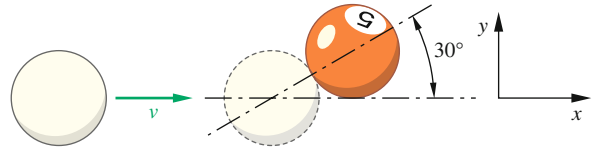
Nach Elimination von G_x und Umformung der Momentenbilanz mit $J_{S_2} = m_S l^2 / 12$ erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$(m_S + m_W)\ddot{x} + m_S \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_S \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F(t),$$

$$\frac{1}{3} m_S l^2 \ddot{\varphi} + m_S \frac{l}{2} \cos \varphi \ddot{x} + k_D \dot{\varphi} - m_S g \frac{l}{2} \sin \varphi = 0.$$

Wenn nicht nur die Bewegungsgleichungen bestimmt werden sollen, sondern auch die Zwangskräfte in den Rädern und im Gelenk, dann müssen auch die restlichen Kräfte- und Momentenbilanzen aufgestellt werden.

10.10 •• Eine Billardkugel stößt ohne sich zu drehen unter einem Winkel von 30° auf eine zweite Billardkugel gleicher Masse. Der Stoß verläuft glatt.



Wie groß sind die Geschwindigkeitskomponenten der Kugeln nach dem Stoß?

Resultat:

$$v_{1x,\text{nach}} = \frac{1}{8}(5 - 3\varepsilon)v_1, \quad v_{1y,\text{nach}} = -(1 + \varepsilon)\frac{\sqrt{3}}{8}v_1,$$

$$v_{2x,\text{nach}} = \frac{3}{8}(1 + \varepsilon)v_1, \quad v_{2y,\text{nach}} = \frac{\sqrt{3}}{8}(1 + \varepsilon)v_1.$$

Ausführliche Lösung: Um den Stoß zu beschreiben führen wir zunächst die Koordinatenrichtungen x' und y' in Richtung der Stoßnormalen und senkrecht dazu ein. Da der Stoß glatt ist, ändern sich die Geschwindigkeitsanteile in Richtung von y' nicht:

$$v_{1y',\text{nach}} = v_{1y',\text{vor}},$$

$$v_{2y',\text{nach}} = v_{2y',\text{vor}}$$

woraus mit $v_{1y',\text{vor}} = -v_1 \sin 30^\circ = -v_1/2$ und $v_{2y',\text{vor}} = 0$ direkt folgt:

$$v_{1y',\text{nach}} = \frac{-v_1}{2},$$

$$v_{2y',\text{nach}} = 0.$$

Für den Stoß in x' -Richtung können wir die Formeln

$$v_{1x',\text{nach}} = \frac{m_1 v_{1x',\text{vor}} + m_2 v_{2x',\text{vor}} - \varepsilon m_2 (v_{1x',\text{vor}} - v_{2x',\text{vor}})}{m_1 + m_2},$$

$$v_{2x',\text{nach}} = \frac{m_1 v_{1x',\text{vor}} + m_2 v_{2x',\text{vor}} + \varepsilon m_1 (v_{1x',\text{vor}} - v_{2x',\text{vor}})}{m_1 + m_2}$$

woraus mit $m_1 = m_2 = m$, $v_{1x',\text{vor}} = v_1 \cos 30^\circ$ und $v_{2x',\text{vor}} = 0$ die Geschwindigkeiten

$$v_{1x',\text{nach}} = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) \cos 30^\circ v_1,$$

$$v_{2x',\text{nach}} = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \cos 30^\circ v_1$$

folgen. Die Geschwindigkeiten in x - und y -Richtung berechnen sich daraus zu

$$v_{1x,\text{nach}} = v_{1x',\text{nach}} \cos 30^\circ - v_{1y',\text{nach}} \sin 30^\circ,$$

$$v_{1y,\text{nach}} = v_{1x',\text{nach}} \sin 30^\circ + v_{1y',\text{nach}} \cos 30^\circ,$$

$$v_{2x,\text{nach}} = v_{2x',\text{nach}} \cos 30^\circ - v_{2y',\text{nach}} \sin 30^\circ,$$

$$v_{2y,\text{nach}} = v_{2x',\text{nach}} \sin 30^\circ + v_{2y',\text{nach}} \cos 30^\circ$$

und damit wegen $\sin 30^\circ = 1/2$ und $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ zu:

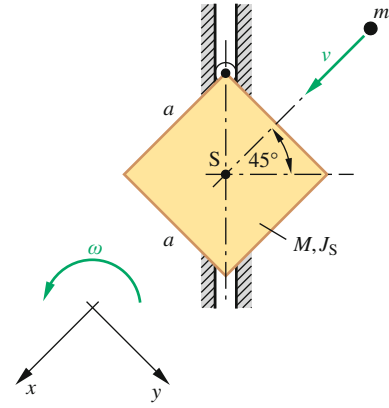
$$v_{1x,\text{nach}} = \frac{1}{8}(5 - 3\varepsilon)v_1,$$

$$v_{1y,\text{nach}} = -(1 + \varepsilon)\frac{\sqrt{3}}{8}v_1,$$

$$v_{2x,\text{nach}} = \frac{3}{8}(1 + \varepsilon)v_1,$$

$$v_{2y,\text{nach}} = \frac{\sqrt{3}}{8}(1 + \varepsilon)v_1.$$

10.11 ••• Ein Massenpunkt m stößt mit der Geschwindigkeit v mittig auf eine Platte (Masse M , Massenträgheitsmoment J_S bezüglich des Schwerpunktes). Ein Ende der Platte wird so geführt, dass es sich nur vertikal bewegen kann. Der Stoß verläuft glatt.



Wie groß sind die Geschwindigkeit von Massenpunkt und Plattenschwerpunkt sowie die Winkelgeschwindigkeit der Platte nach dem Stoß? Was ergibt sich für die Grenzfälle vollplastischer oder vollelastischer Stoß?

Resultat:

$$V_m = \frac{5m + 4\varepsilon M}{5m - 4M}v, \quad V_{Mx} = \frac{5(1 + \varepsilon)m}{5m - 4M}v,$$

$$V_{My} = \frac{(1 + \varepsilon)m}{5m - 4M}v, \quad \omega_E = -\frac{6(1 + \varepsilon)m}{(5m - 4M)}v.$$

Ausführliche Lösung: Das Massenträgheitsmoment berechnet sich aus

$$J_S = \int_m (x^2 + y^2) dm$$

mit

$$dm = \frac{M}{a^2} dx dy.$$

Dies führt auf

$$J_S = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) \frac{M}{a^2} dx dy = \frac{1}{6}Ma^2.$$

Als stoßrelevante Kräfte treten die Kraft N_1 zwischen dem Massenpunkt und der Platte und die Normalkraft N_2 in der Führung auf. Die Impulsbilanzen für die Platte lauten:

$$\int (N_1 + N_2 \cos 45^\circ) dt = MV_{Mx},$$

$$\int (-N_2 \sin 45^\circ) dt = MV_{My},$$

$$\int N_2 \frac{a}{2} \sqrt{2} dt = J_S \omega_E$$

und für den Massenpunkt

$$\int (-N_1) dt = m(V_m - v).$$

Dabei wurden die Geschwindigkeiten nach dem Stoß mit großen Buchstaben gekennzeichnet und die Winkelgeschwindigkeit der Platte nach dem Stoß mit ω_E . Hinzu kommt die Bedingung, dass die Geschwindigkeit am Lager in horizontaler Richtung verschwinden muss:

$$-V_{Mx} \cos 45^\circ + V_{My} \sin 45^\circ - \omega_E \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$$

oder:

$$-V_{Mx} + V_{My} - \omega_E a = 0.$$

Zusätzlich folgt für die Stoßzahl:

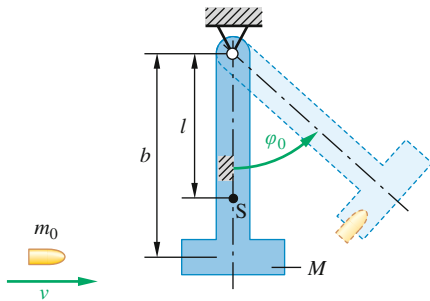
$$\varepsilon = -\frac{V_{mx} - V_{Mx}}{v}$$

Dies sind insgesamt 6 Gleichungen für die Unbekannten V_{mx} , V_{Mx} , V_{My} , ω_E , \hat{N}_1 und \hat{N}_2 . Nach Auflösung dieses Gleichungssystems erhalten wir:

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{5m + 4\varepsilon M}{5m - 4M} v, \\ V_{Mx} &= \frac{5(1 + \varepsilon)m}{5m - 4M} v, \\ V_{My} &= \frac{(1 + \varepsilon)m}{5m - 4M} v, \\ \omega_E &= -\frac{6(1 + \varepsilon)m}{(5m - 4M)} v. \end{aligned}$$

10.12 •• Mithilfe eines ballistischen Pendels soll die Geschwindigkeit eines Geschosses bestimmt werden. Dazu wird das Geschoss auf das Pendel geschossen und bleibt dort stecken.

Das Pendel hat die Masse M und den Schwerpunkt in S . Der Schwerpunkt hat den Abstand l vom Lager, das Geschoss trifft das Pendel im Abstand b vom Lager. Nach dem Stoß schwingt das Pendel, dessen Dämpfung vernachlässigt werden kann, bis zum Winkel $\varphi = \varphi_0$. Wie groß ist die Geschwindigkeit v des Geschosses vor dem Stoß bei gemessenem φ_0 ?



Resultat:

$$v = \sqrt{\frac{2(Mgl + m_0gb)(1 - \cos \varphi_0)(J_S + Ml^2 + m_0b^2)}{m_0^2b^2}}.$$

Ausführliche Lösung: Die Impulsbilanzen für das Geschoss in horizontaler Richtung und für die Drehung des Pendels um das Lager sind durch

$$\begin{aligned} \int (-F) dt &= m_0(V_E - v), \\ \int Fbdt &= (J_S + Ml^2)\omega_E \end{aligned}$$

gegeben. Da ein plastischer Stoß vorliegt, gilt zusätzlich

$$V_E = \omega_E b.$$

Elimination von \hat{F} ergibt

$$\omega_E = \frac{m_0b}{J_S + Ml^2 + m_0b^2} v.$$

Nach dem Stoß gilt der Energiesatz. Dazu legen wir das Nullniveau in den Punkt, an dem sich der Schwerpunkt bei $\varphi = 0$ befindet. Somit erhalten wir die Energien

$$\begin{aligned} E_{\text{kin},1} &= \frac{1}{2}(J_S + Ml^2 + m_0b^2)\omega_E^2, \\ E_{\text{pot},1} &= 0, \\ E_{\text{kin},2} &= 0, \\ E_{\text{pot},2} &= Mgl(1 - \cos \varphi_0) + m_0gb(1 - \cos \varphi_0). \end{aligned}$$

Der Energiesatz liefert damit

$$\frac{1}{2} \frac{m_0^2b^2}{J_S + Ml^2 + m_0b^2} v^2 = (Mgl + m_0gb)(1 - \cos \varphi_0).$$

Aufgelöst nach v ergibt dies

$$v = \sqrt{\frac{2(Mgl + m_0gb)(1 - \cos \varphi_0)(J_S + Ml^2 + m_0b^2)}{m_0^2b^2}}.$$

10.13 •• Ein Auto (Masse m_1) stößt mit der Geschwindigkeit v auf ein stehendes Auto (Masse m_2), wobei der Stoß plastisch verläuft. Wie groß ist die Stoßkraft während des Stoßes, wenn diese als konstant über die Stoßzeit angenommen wird und die Knautschzone von beiden Autos zusammen s_K beträgt? Vergleichen Sie die Werte, die sich ergeben für $v = 50 \text{ km/h}$, $m_1 = 1000 \text{ kg}$, $m_2 = 1200 \text{ kg}$ und $s_K = 0,2 \text{ m}$, beziehungsweise $s_K = 1 \text{ m}$.

Resultat: Knautschzone $s_K = 0,2 \text{ m}$: $F = 263 \text{ kN}$
Knautschzone $s_K = 1 \text{ m}$: $F = 52,6 \text{ kN}$

Ausführliche Lösung: Aufgrund des plastischen Stoßes gilt

$$m_1 v = (m_1 + m_2) V_E$$

und damit

$$V_E = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v.$$

Mit der Kraft F während des Stoßes ergeben sich die Beschleunigungen

$$a_1 = -\frac{F}{m_1},$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2}.$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz von Wagen 1 beträgt

$$\Delta v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v - v = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v = a_1 \Delta t$$

woraus sich die Stoßdauer Δt bestimmen lässt:

$$\Delta t = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{F} v.$$

Die während der Stoßzeit zurückgelegten Wege berechnen sich zu:

$$s_1 = \frac{a_1}{2} \Delta t^2 + v \Delta t$$

$$= -\frac{F}{2m_1} \left(\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) F} \right)^2 v^2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) F} v^2$$

$$= \frac{m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2 / 2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{v^2}{F},$$

$$s_2 = \frac{a_2}{2} \Delta t^2$$

$$= \frac{F}{2m_2} \left(\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) F} \right)^2 v^2$$

$$= \frac{m_1^2 m_2 / 2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{v^2}{F}$$

Die Differenz entspricht der Knautschzone

$$s_K = s_1 - s_2$$

was auf

$$s_K = \left(\frac{m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2 / 2}{(m_1 + m_2)^2} \right) \frac{v^2}{F} - \frac{m_1^2 m_2 / 2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{v^2}{F}$$

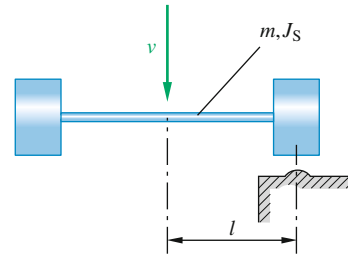
$$= \frac{m_1 m_2^2}{2(m_1 + m_2)^2} \frac{v^2}{F} + \frac{m_1^2 m_2}{2(m_1 + m_2)^2} \frac{v^2}{F}$$

und damit

$$F = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \frac{v^2}{s_K}$$

führt. Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich für $s_K = 0,2 \text{ m}$ eine Kraft von 263 kN und eine Beschleunigung von -263 m/s^2 oder ca. $-26,3g$ für Wagen 1 und eine Beschleunigung von 219 m/s^2 oder ca. $21,9g$ für Wagen 2 ergibt. Im Falle der Knautschzone $s_K = 1 \text{ m}$ beträgt die Kraft $52,6 \text{ kN}$ und es ergeben sich Beschleunigungen von $52,6 \text{ m/s}^2$ oder ca. $5,3g$ für Wagen 1 und $43,8 \text{ m/s}^2$ oder ca. $4,4g$ für Wagen 2. Daraus sehen wir, wie wichtig eine große Knautschzone ist.

10.14 •• Ein hantelförmiger Körper stößt wie abgebildet im Abstand l vom Schwerpunkt auf eine glatte Unterlage.



Wie groß sind Schwerpunktschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß, wenn sich die Hantel vor dem Stoß mit der Geschwindigkeit v ohne sich zu drehen bewegt. Die Stoßzahl für den Stoß ist mit ε gegeben. Die Hantel hat die Masse m und das Massenträgheitsmoment J_S bezüglich dem Schwerpunkt.

Resultat:

$$\Omega = \frac{lm(1 + \varepsilon)}{ml^2 + J_S} v,$$

$$V = \frac{ml^2 - \varepsilon J_S}{ml^2 + J_S} v.$$

Ausführliche Lösung: Die Impulsbilanzen für die Hantel ergeben sich zu (Geschwindigkeiten und Käfte nach unten und die Winkelgeschwindigkeit entgegen dem Uhrzeigersinn werden positiv angenommen):

$$-\int F dt = m(V - v),$$

$$l \int F dt = J_S \Omega.$$

Hinzu kommt die Stoßzahlgleichung

$$\varepsilon = -\frac{V - \Omega l}{v}.$$

Nach Elimination des Kraftintegrals folgt daraus:

$$J_S \Omega = -lm(V - v),$$

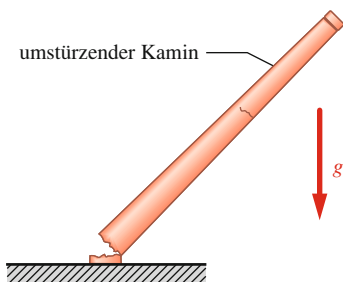
$$V = -\varepsilon v + \Omega l.$$

Auflösen des Gleichungssystems ergibt:

$$\Omega = \frac{lm(1 + \varepsilon)}{ml^2 + J_S} v,$$

$$V = \frac{ml^2 - \varepsilon J_S}{ml^2 + J_S} v.$$

10.15 ••• Beim Sprengen eines Kamins kann angenommen werden, dass er sich nach der Sprengung wie ein Stab um sein unteres Ende bewegt.



An welcher Stelle entlang des Kamins ist das Biegemoment am größten, so dass er an dieser Stelle eventuell brechen wird? Der Kamin kann als homogener Stab der Länge l und Masse m angenommen werden.

Resultat: $x = \frac{l}{3}$

Ausführliche Lösung: Zunächst wird der Kamin als Ganzes betrachtet, um die Winkelbeschleunigung zu bestimmen. Eine Momentenbilanz um den Lagerpunkt des Kamins ergibt

$$mg \frac{l}{2} \sin \varphi - J_A \ddot{\varphi} = 0$$

mit $J_A = ml^2/3$. Dies führt auf:

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l} \sin \varphi.$$

Als nächstes führen wir die Koordinaten x und ξ entlang des Kamins ein. Beide haben ihren Ursprung am Boden. Wir vernachlässigen die Fliehkräfte in Längsrichtung des Kamins, da nur das Biegemoment interessiert (wenn die Fliehkräfte ebenfalls berücksichtigt werden, wird der Bruch an einer Stelle auftreten, die weiter außen liegt als die in dieser Aufgabe berechnete). Wir schneiden den Kamin an der Stelle x frei und tragen die Streckenlasten entlang des freigeschnittenen Teils infolge der Gewichtskraft und infolge der Beschleunigung ein. Die Gewichtskraft wirkt vertikal nach unten, die Trägheitskraft aufgrund der tangentialen Beschleunigung steht senkrecht auf der Kaminachse. Für das Biegemoment folgt so:

$$M(x) = \int_x^l \xi \ddot{\varphi} \frac{m}{l} (\xi - x) d\xi - \int_x^l \frac{m}{l} g \sin \varphi (\xi - x) d\xi$$

$$= \frac{m}{l} \frac{3g}{2l} \sin \varphi \left[\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2 x}{2} \right]_x^l - \frac{m}{l} g \sin \varphi \left[\frac{\xi^2}{2} - x\xi \right]_x^l$$

$$= \frac{mg}{l^2} \sin \varphi \left(\frac{1}{4} xl^2 - \frac{1}{2} x^2 l + \frac{1}{4} x^3 \right).$$

Das Biegemoment wird maximal bei

$$\frac{1}{4} l^2 - xl + \frac{3}{4} x^2 = 0$$

oder

$$x^2 - \frac{4}{3} xl + \frac{1}{3} l^2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x_{1,2} = \frac{2}{3} l \pm \frac{1}{3} l,$$

und wir sehen, dass im Kamin das maximale Biegemoment bei $x = l/3$ auftritt.

10.16 •• Ein Frisbee ist eine Jahrmarktattraktion, bei der sich eine Stange der Länge l ähnlich einem Pendel um eine horizontale Achse dreht. Am Ende der Stange ist eine Scheibe mit Radius R angebracht, die sich bezüglich der Stange um deren Längsachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_S dreht. Der Verdrehwinkel φ der Stange ist wie bei einem Pendel von der Zeit abhängig.



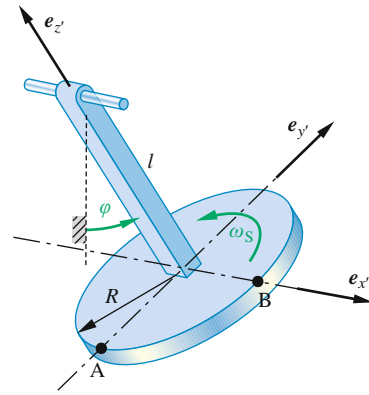
Die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung des Frisbees wurden zu

$$\begin{aligned}\omega_F &= \dot{\varphi} e_{x'} + \omega_S e_{z'}, \\ \alpha_F &= \ddot{\varphi} e_{x'} - \dot{\varphi} \omega_S e_{y'}\end{aligned}$$

bestimmt. Wie groß sind die Momente im Lager der Scheibe, wenn die Trägheitsmatrix des Frisbees aufgrund der Symmetrie bezüglich nicht körperfester $x'y'z'$ -Achsen mit

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

gegeben ist.



Resultat:

$$M = A\ddot{\varphi}e_{x'} - B\dot{\varphi}\omega_S e_{y'}$$

Ausführliche Lösung: Da die Winkelgeschwindigkeit im nicht körperfesten gestrichenen Koordinatensystem gegeben ist und die Trägheitsmatrix in diesem Bezugssystem angegeben ist, können wir die Koordinaten des Dralls einfach durch eine Matrizenmultiplikation bestimmen:

$$\begin{pmatrix} L_{x'} \\ L_{y'} \\ L_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \omega_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\dot{\varphi} \\ 0 \\ B\omega_S \end{pmatrix}.$$

Der Drallvektor hat deshalb die Form:

$$L = A\dot{\varphi}e_{x'} + B\omega_S e_{z'}$$

Das Moment im Lager (Schwerpunkt der Scheibe) ergibt sich durch Ableiten des Dralls im Inertialsystem:

$$\begin{aligned}M &= \frac{dL}{dt} \\ &= \frac{dL}{dt} + \omega' \times L\end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass das gestrichene Koordinatensystem sich nur mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um die x' -Achse dreht und somit $\omega' = \dot{\varphi}e_{x'}$ gilt. Da zudem ω_S konstant ist, folgt

$$M = A\ddot{\varphi}e_{x'} - B\dot{\varphi}\omega_S e_{y'}$$

als Ergebnis.

10.17 •• Eine Rakete (Masse $m = 50$ t) soll beim Start mit $a = 20$ m/s² im Schwerfeld der Erde ($g = 10$ m/s²) beschleunigt werden. Wie groß muss der Massenstrom μ sein, damit diese Beschleunigung erreicht wird, wenn die Austrittsgeschwindigkeit der Gase aus der Düse $v_D = 5000$ m/s beträgt?

Resultat: $\mu = 300$ kg/s

Ausführliche Lösung: Sowohl der Massenstrom wie auch die Relativgeschwindigkeit sind negativ. Für die Rakete gilt deshalb

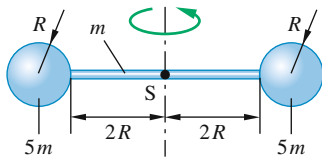
$$ma + mg = \mu v_D.$$

Umgeformt folgt:

$$\mu = \frac{ma + mg}{v_D},$$

sodass sich mit den angegebenen Zahlenwerten $\mu = 300 \text{ kg/s}$ ergibt.

10.18 •• Eine Hantel besteht aus zwei Kugeln und einer Verbindungsstange. Die Massen und die Abmessungen sind im Bild angegeben. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment um eine Achse, die durch den Mittelpunkt der Stange geht und senkrecht zu dieser steht?



Resultat:

$$J_S = \frac{286}{3} mR^2$$

Ausführliche Lösung: Das Massenträgheitsmoment der Hantel setzt sich aus dem Massenträgheitsmoment der Stange und den Massenträgheitsmomenten der Kugeln zusammen, wobei für die Kugeln jeweils die Steiner'sche Ergänzung berücksichtigt werden muss. Für eine Achse durch den Schwerpunkt senkrecht zur Hantelachse gilt deshalb

$$J_S = \frac{m_{\text{Stange}} l^2}{12} + 2m_{\text{Kugel}} \frac{2}{5} R_{\text{Kugel}}^2 + 2m_{\text{Kugel}} a^2$$

mit

$$l = 4R,$$

$$R_{\text{Kugel}} = R,$$

$$m_{\text{Stange}} = m,$$

$$m_{\text{Kugel}} = 5m,$$

$$a = 3R.$$

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} J_S &= \frac{m4R^2}{3} + 2(2mR^2 + 45mR^2) = \left(\frac{4}{3} + 94\right) mR^2 \\ &= \frac{286}{3} mR^2. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu erkennen, dass der Großteil aus der Steiner'schen Ergänzung der Kugeln resultiert.