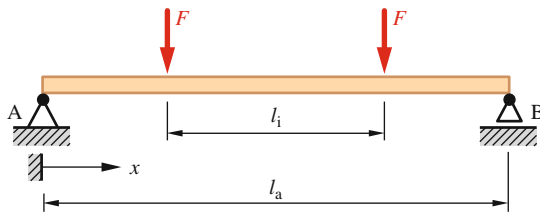


# Aus Kapitel 3

## Aufgaben

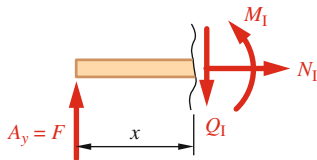
### 3.1 •

1. Berechnen Sie die Schnittgrößen  $Q(x)$  und  $M(x)$  in einer durch zwei gleich große Kräfte  $F$  belasteten symmetrischen 4-Punkt-Biegeprobe der Längenabmessungen  $l_i$  und  $l_a$ .
2. Zeichnen Sie die Grafen von  $Q(x)$  und  $M(x)$ .



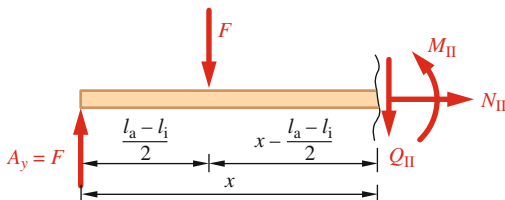
**Resultat:** Bereich I:  $Q_I(x) = F$ ,  $M_I(x) = F x$ , Bereich II:  $Q_{II}(x) = 0$ ,  $M_{II}(x) = F \cdot \frac{l_a - l_i}{2}$ , Bereich III:  $Q_{III}(x) = -F$ ,  $M_{III}(x) = F (l_a - x)$ .

**Ausführliche Lösung:** Freikörperbild Bereich I:



$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iy} &= F - Q_I(x) = 0 \\ \Rightarrow Q_I(x) &= F, \\ \circlearrowleft \sum M_i^{(SU)} &= -F x + M_I(x) = 0 \\ \Rightarrow M_I(x) &= F x. \end{aligned}$$

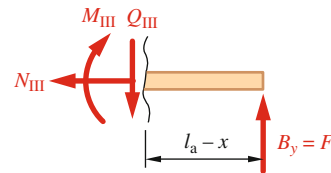
Freikörperbild Bereich II:



$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iy} &= F - F - Q_{II}(x) = 0 \\ \Rightarrow Q_{II}(x) &= 0, \end{aligned}$$

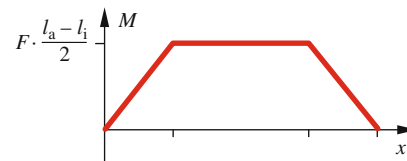
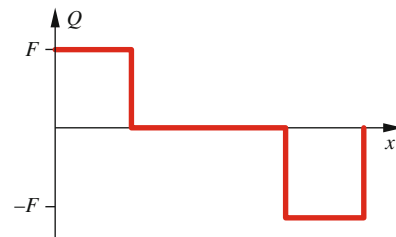
$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_i^{(SU)} &= -F x + F \left( x - \frac{l_a - l_i}{2} \right) + M_{II}(x) = 0 \\ \Rightarrow M_{II}(x) &= F \cdot \frac{l_a - l_i}{2}. \end{aligned}$$

Freikörperbild Bereich III:



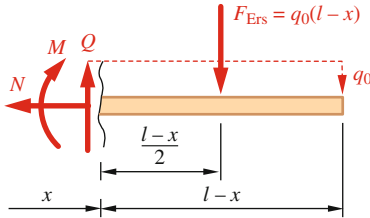
$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iy} &= Q_{III}(x) + F = 0 \\ \Rightarrow Q_{III}(x) &= -F, \\ \circlearrowleft \sum M_i^{(SU)} &= -M_{III}(x) + F (l_a - x) = 0 \\ \Rightarrow M_{III}(x) &= F (l_a - x). \end{aligned}$$

Grafen der Schnittgrößenverläufe:



**3.2 •** Berechnen Sie die Schnittgrößen in einem durch sein Eigengewicht  $G$  belasteten Kragträger der Länge  $l$ .

**Resultat:**  $N(x) = 0$ ,  $Q(x) = G \left( 1 - \frac{x}{l} \right)$ ,  $M(x) = -\frac{G}{2l} (l - x)^2$ .

**Ausführliche Lösung:** Freikörperbild:

Gleichgewichtsbedingungen:

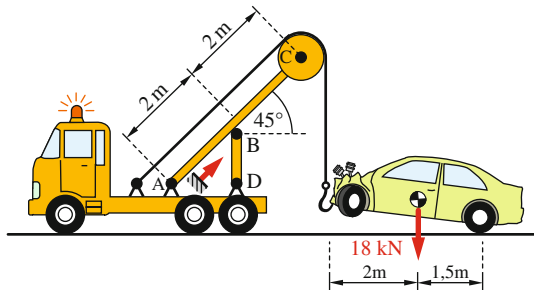
$$\uparrow \sum F_{iy} = Q(x) - q_0(l-x) = Q(x) - \frac{G}{l}(l-x) = 0$$

$$\Rightarrow Q(x) = G \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

$$\circlearrowleft \sum M_i^{(SU)} = -M(x) - q_0(l-x) \cdot \frac{l-x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = -\frac{G}{2l}(l-x)^2.$$

**3.3 ••** Auf einer Spritztour mit Papas geliehenem Oberklassewagen setzen Sie diesen peinlicherweise vor einen Baum und müssen den Abschleppdienst rufen. Zu allem Überflus bezweifelt der Abschleppwagenfahrer, dass sein Kran überhaupt der Belastung des Fahrzeugs gewachsen ist. Überzeugen Sie ihn, indem Sie die Schnittgrößen  $N$ ,  $Q$  und  $M$  im Kran berechnen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:



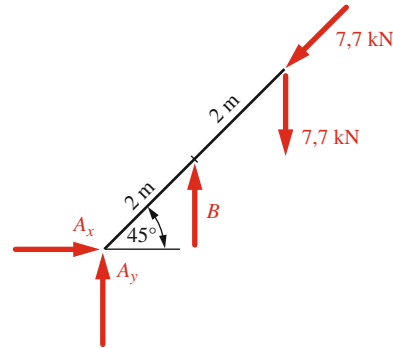
1. Schneiden Sie den Pkw frei, und berechnen Sie die Seilkraft  $S$ , mit der dieser angehoben wird.
2. Mit welcher Kraft lastet die im Punkt C reibungsfrei drehbar gelagerte Rolle auf dem Kranausleger?
3. Schneiden Sie den Kranausleger (Träger A–C) frei und berechnen Sie die Lagerreaktionen des Kranauslegers.
4. Berechnen Sie die Schnittgrößen  $N(s)$ ,  $Q(s)$  und  $M(s)$  im Kranausleger.

Anmerkung: Betrachten Sie der Einfachheit halber Abschleppwagen und Pkw im Stillstand und vernachlässigen Sie dynamische Effekte wie Anfahr- oder Abbremsvorgänge. Vernachlässigen Sie auch das Eigengewicht des Kranauslegers.

**Resultat:**

1. 7,7 kN
2. Mit jeweils 7,7 kN senkrecht nach unten sowie nach links unten parallel zum Kranausleger.
3.  $A_x = 5,4 \text{ kN}$ ,  $A_y = -2,3 \text{ kN}$ ,  $B = 15,4 \text{ kN}$ ,
4.  $N_I(s) = -2,2 \text{ kN}$ ,  $Q_I(s) = -5,4 \text{ kN}$ ,  
 $M_I(s) = -5,4 \text{ kN} \cdot s$ ,  $N_{II}(s) = -13,1 \text{ kN}$ ,  
 $Q_{II}(s) = 5,4 \text{ kN}$ ,  $M_{II}(s) = 5,4 \text{ kN} \cdot (s - 4 \text{ m})$ .

**Ausführliche Lösung:** Freikörperbild zur Berechnung der Lagerreaktionen:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\rightarrow \sum F_{ix} = A_x - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 7,7 \text{ kN} = 0,$$

$$A_x = 5,4 \text{ kN},$$

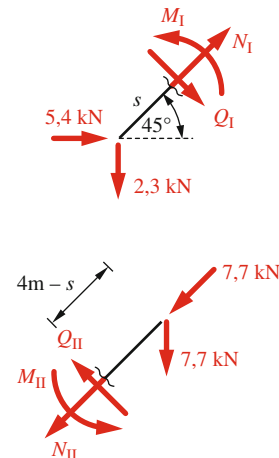
$$\circlearrowleft \sum M_i^{(A)} = B \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 2 \text{ m} - 7,7 \text{ kN} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$\Rightarrow B = 15,4 \text{ kN},$$

$$\uparrow \sum F_{iy} = A_y + B - 7,7 \text{ kN} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 7,7 \text{ kN} = 0$$

$$\Rightarrow A_y = -2,3 \text{ kN}.$$

Berechnung der Schnittgrößen:



Bereich I:

$$\sum F_{iN} = 5,4 \text{ kN} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} - 2,3 \text{ kN} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + N_I(s) = 0,$$

$$N_I(s) = -2,2 \text{ kN},$$

$$\sum F_{iQ} = 5,4 \text{ kN} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + 2,3 \text{ kN} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + Q_I(s) = 0,$$

$$\Rightarrow Q_I(s) = -5,4 \text{ kN} \quad \text{und}$$

$$\circlearrowleft \sum M_i^{(SU)} = 5,4 \text{ kN} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} s + 2,3 \text{ kN} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} s + M_I(s) = 0$$

$$\Rightarrow M_I(s) = -5,4 \text{ kN} \cdot s.$$

Bereich II:

$$\sum F_{iN} = N_{II}(s) + 7,7 \text{ kN} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 7,7 \text{ kN} = 0$$

$$N_{II}(s) = -13,1 \text{ kN},$$

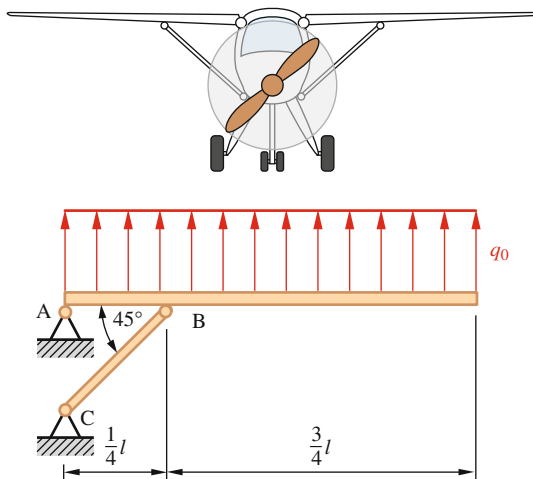
$$\sum F_{iQ} = Q_{II}(s) - \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 7,7 \text{ kN} = 0$$

$$\Rightarrow Q_{II}(s) = 5,4 \text{ kN},$$

$$\circlearrowleft \sum M_i^{(SU)} = M_{II}(s) + 7,7 \text{ kN} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} (4 \text{ m} - s) = 0$$

$$\Rightarrow M_{II}(s) = 5,4 \text{ kN} \cdot (s - 4 \text{ m}).$$

**3.4 ••** Die Tragfläche eines Sportflugzeugs kann vereinfacht als ein gewichtsloser, durch eine konstante Streckenlast  $q_0$  belasteter Balken, der durch ein Festlager und eine Pendelstütze abgestützt wird, modelliert werden.



1. Berechnen Sie die Lagerreaktionen.
2. Berechnen Sie die Verläufe der Schnittgrößen.
3. Zeichnen Sie die Verläufe der Schnittgrößen und geben Sie Rand- und Extremwerte an.

Resultat:

 1. Lagerreaktionen:  $A_x = 2 q_0 l$ ,  $A_y = q_0 l$ ,  $B = -2 \sqrt{2} q_0 l$ .

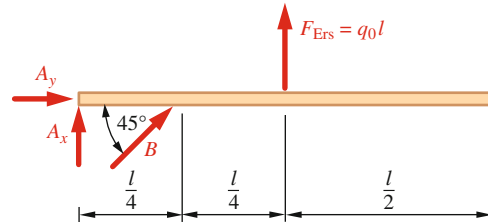
2. Schnittgrößen:

 Bereich I:  $N_I(x) = -2 q_0 l$ ,  $Q_I(x) = q_0 (l + x)$ ,

 $M_I(x) = \frac{1}{2} q_0 l^2 \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^2 + 2 \frac{x}{l} \right]$ 

 Bereich II:  $N_{II}(x) = 0$ ,  $Q_{II}(x) = q_0 (x - l)$ ,

 $M_{II}(x) = \frac{1}{2} q_0 (l - x)^2$ .

**Ausführliche Lösung:** Berechnung der Lagerreaktionen:


$$\circlearrowleft \sum M_i^{(B)} = -A_y \cdot \frac{l}{4} + q_0 l \cdot \frac{l}{4} = 0$$

$$\Rightarrow A_y = q_0 l,$$

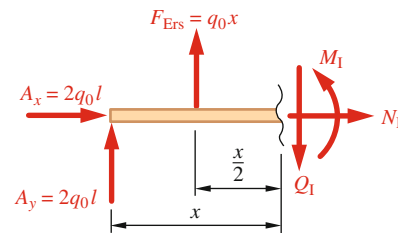
$$\uparrow \sum F_{iy} = A_y + \frac{1}{2} \sqrt{2} B + q_0 l = 0$$

$$\Rightarrow B = -2 \sqrt{2} q_0 l,$$

$$\rightarrow \sum F_{ix} = A_x + \frac{1}{2} \sqrt{2} B = 0$$

$$\Rightarrow A_x = 2 q_0 l.$$

Schnittgrößen im Bereich I:



$$\rightarrow \sum F_{ix} = 2 q_0 l + N_I(x) = 0$$

$$\Rightarrow N_I(x) = -2 q_0 l,$$

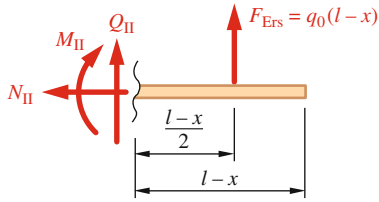
$$\uparrow \sum F_{iy} = q_0 l + q_0 x - Q_I(x) = 0$$

$$\Rightarrow Q_I(x) = q_0 (l + x),$$

$$\circlearrowleft \sum M_i^{(SU)} = -q_0 l x - \frac{1}{2} q_0 x^2 + M_I(x) = 0$$

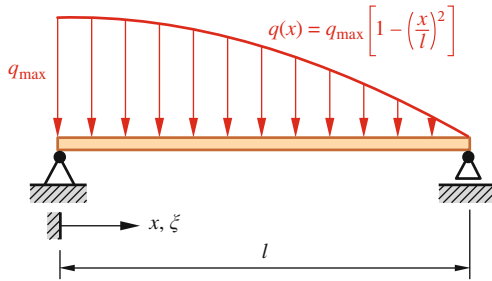
$$\Rightarrow M_I(x) = \frac{1}{2} q_0 l^2 \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^2 + 2 \frac{x}{l} \right].$$

Schnittgrößen im Bereich II:



$$\begin{aligned}
 \rightarrow \sum F_{ix} &= -N_{II}(x) = 0, \\
 \uparrow \sum F_{iy} &= q_0(l-x) + Q_{II}(x) = 0 \\
 &\Rightarrow Q_{II}(x) = q_0(x-l), \\
 \circlearrowleft \sum M_i^{(SU)} &= -M_{II}(x) + \frac{1}{2}q_0(l-x)^2 = 0 \\
 &\Rightarrow M_{II}(x) = \frac{1}{2}q_0(l-x)^2.
 \end{aligned}$$

**3.5** ••• Berechnen Sie die Lagerreaktionen und Schnittgrößen des abgebildeten Trägers in Abhängigkeit der Größen  $q_{\max}$  und  $l$ .



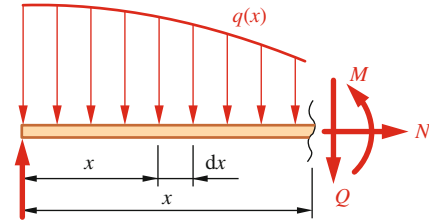
**Resultat:** Lagerreaktionen:  $A_x = 0$ ,  $A_y = \frac{5}{12}q_{\max}l$ ,  $B_y = \frac{1}{4}q_{\max}l$ .

Schnittgrößen:  $N(x) = 0$ ,  $Q(x) = q_{\max}l \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{x}{l} \right)^3 - \frac{x}{l} + \frac{5}{12} \right]$ ,  
 $M(x) = q_{\max}l^2 \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{x}{l} \right)^4 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 + \frac{5}{12} \frac{x}{l} \right]$ .

**Ausführliche Lösung:** Berechnung der Lagerreaktionen:

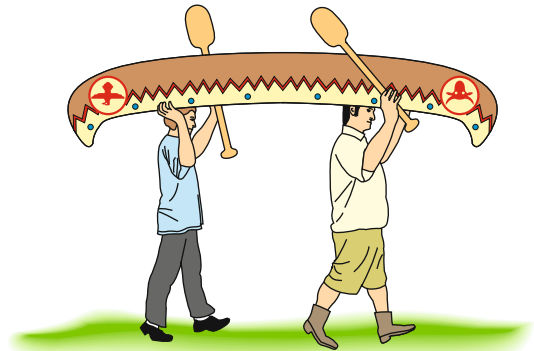
$$\begin{aligned}
 \circlearrowleft \sum M_i^{(A)} &= -B_y \cdot l - \int_{x=0}^l q(x) \cdot x \, d\bar{x} = 0, \\
 &\Rightarrow B_y = \frac{1}{l} \int_{x=0}^l \left( q_{\max}x - q_{\max} \frac{x^3}{l^2} \right) dx = \frac{1}{4}q_{\max}l, \\
 \uparrow \sum F_{iy} &= A_y + B_y - \int_{x=0}^l \left( q_{\max} - q_{\max} \frac{x^2}{l^2} \right) dx = 0 \\
 &\Rightarrow A_y = -B_y + q_{\max} \left[ x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^2} \right]_0^l = \frac{5}{12}q_{\max}l.
 \end{aligned}$$

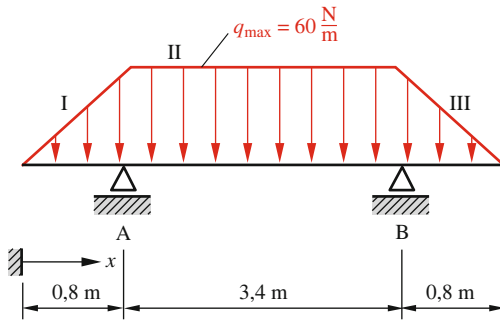
Berechnung der Schnittgrößen:



$$\begin{aligned}
 \uparrow \sum F_{iy} &= \frac{5}{12}q_{\max}l - \int_{\bar{x}=0}^x q(\bar{x}) \, d\bar{x} - Q(x) = 0 \\
 &\Rightarrow Q(x) = \frac{5}{12}q_{\max}l - q_{\max} \int_{\bar{x}=0}^x \left( 1 - \frac{\bar{x}^2}{l^2} \right) d\bar{x} \\
 &\Rightarrow Q(x) = \frac{5}{12}q_{\max}l - q_{\max} \left[ \bar{x} - \frac{\bar{x}^3}{3l^2} \right]_0^x \\
 &\Rightarrow Q(x) = q_{\max}l \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{x}{l} \right)^3 - \frac{x}{l} + \frac{5}{12} \right], \\
 \circlearrowleft \sum M_i^{(SU)} &= -\frac{5}{12}q_{\max}l \cdot x + \int_{\bar{x}=0}^x q(\bar{x}) (x - \bar{x}) \, d\bar{x} + M(x) \\
 &= 0 \\
 &\Rightarrow M(x) = \frac{5}{12}q_{\max}l \cdot x - q_{\max} \int_{\bar{x}=0}^x \left( 1 - \frac{\bar{x}^2}{l^2} \right) (x - \bar{x}) \, d\bar{x} \\
 &\Rightarrow M(x) = \frac{5}{12}q_{\max}l \cdot x \\
 &\quad - q_{\max} \left[ x^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3} \frac{x^4}{l^2} + \frac{1}{4} \frac{x^4}{l^2} \right]_0^x \\
 &\Rightarrow M(x) = q_{\max}l^2 \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{x}{l} \right)^4 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 + \frac{5}{12} \frac{x}{l} \right].
 \end{aligned}$$

**3.6** •• Auf Ihrer Paddeltour durch die Mecklenburger Seenplatte müssen Sie leider feststellen, dass die Strecke neben erfrischend klaren Seen auch mit einer Reihe von Umtragestellen aufwartet. Der schweißtreibenden Tätigkeit und den Semesterferien zum Trotz abstrahieren Sie aus Ihrem Kanu das folgende mechanische Modell und begeben sich an die Analyse:



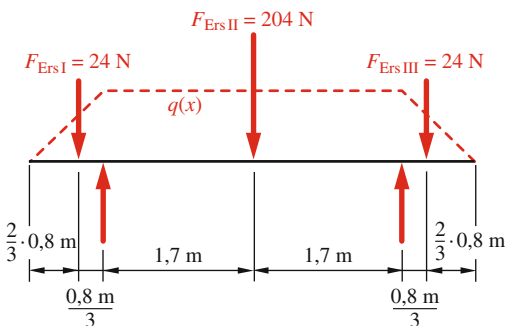


1. Ist das Kanu statisch bestimmt gelagert? Begründen Sie kurz ihre Antwort.
2. Welchen Verlauf hat die Streckenlast  $q(x)$  in den Bereichen I und III?
3. Berechnen Sie die Lagerreaktionen.
4. Berechnen Sie den Verlauf der Schnittgrößen  $Q(x)$  und  $M(x)$  im Kanu.

### Resultat:

1. Nein, es kann ja vorwärts getragen werden.
2.  $q_I(x) = 75 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot x$ ,  $q_{III}(x) = 375 \frac{\text{N}}{\text{m}} - 75 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot x$ .
3.  $A_y = B_y = 126 \text{ N}$ .
4.  $Q_I(x) = -37,5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot x^2$ ,  $M_I(x) = -12,5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot x^3$ ,  
 $Q_{II}(x) = 150 \text{ N} - 60 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x$ ,  
 $M_{II}(x) = -107,2 \text{ Nm} + 150 \text{ N} \cdot x - 30 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x^2$ ,  
 $Q_{III}(x) = 937,5 \text{ N} - 375 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x + 37,5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot x^2$ ,  
 $M_{III}(x) = -1.562,5 \text{ Nm} + 937,5 \text{ N} \cdot x - 187,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x^2 + 12,5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot x^3$ .

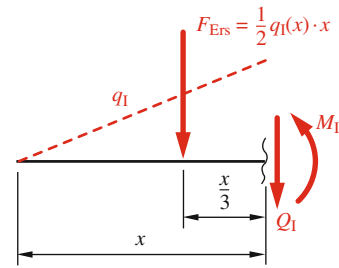
### Ausführliche Lösung: Berechnung der Lagerreaktionen:



$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_i^{(A)} &= 24 \text{ N} \cdot \frac{0,8 \text{ m}}{3} - 204 \text{ N} \cdot 1,7 \text{ m} + B_y \cdot 3,4 \text{ m} \\ &\quad - 24 \text{ N} \cdot \left(3,4 \text{ m} + \frac{0,8 \text{ m}}{3}\right) = 0 \\ \Rightarrow B_y &= 126 \text{ N}. \end{aligned}$$

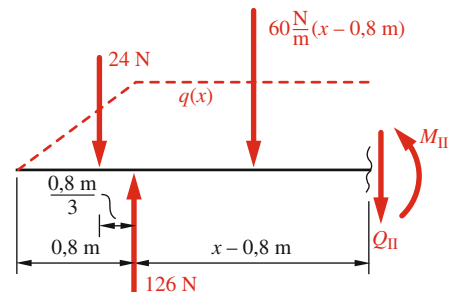
Aus Symmetriegründen ist  $A_y = B_y = 126 \text{ N}$ .

### Berechnung der Schnittgrößen, Bereich I:



$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iy} &= -\frac{1}{2} q_I(x) \cdot x - Q_I(x) = 0 \\ \Rightarrow Q_I(x) &= -37,5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot x^2, \\ \circlearrowleft \sum M_i^{(\text{SU})} &= \frac{1}{2} q_I(x) \cdot x \cdot \frac{x}{3} + M_I(x) = 0 \\ M_I(x) &= -12,5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot x^3. \end{aligned}$$

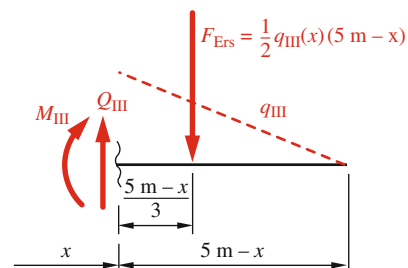
### Bereich II:



$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iy} &= -24 \text{ N} + 126 \text{ N} - 60 \frac{\text{N}}{\text{m}} (x - 0,8 \text{ m}) - Q_{II}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q_{II}(x) &= 150 \text{ N} - 60 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x, \\ \circlearrowleft \sum M_i^{(\text{SU})} &= 24 \text{ N} \cdot \left(x - \frac{2}{3} \cdot 0,8 \text{ m}\right) - 126 \text{ N} \cdot (x - 0,8 \text{ m}) \\ &\quad + 60 \frac{\text{N}}{\text{m}} (x - 0,8 \text{ m}) \cdot \frac{x - 0,8 \text{ m}}{2} + M_{II}(x) = 0 \\ \Rightarrow M_{II}(x) &= -107,2 \text{ Nm} + 150 \text{ N} \cdot x - 30 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x^2. \end{aligned}$$

### Bereich III:





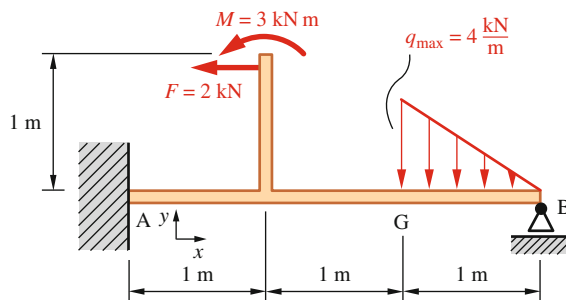
Bereich I:

$$\begin{aligned}\sum F_{iN} &= N_I(s) + 180 \text{ N} - 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot s = 0 \\ \Rightarrow N_I(s) &= -180 \text{ N} + 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot s, \\ \sum F_{iQ} &= Q_I(s) = 0 \\ \odot \sum M_i^{\text{SU}} &= M_I(s) + 77,1 \text{ Nm} = 0, \\ \Rightarrow M_I(s) &= -77,1 \text{ Nm}.\end{aligned}$$

Bereich II:

$$\begin{aligned}\sum F_{iN} &= -N_{II}(s) - 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} (2 \text{ m} - s) \cos 35^\circ \\ &\quad - 20 \text{ N} \cos 35^\circ = 0 \\ \Rightarrow N_{II}(s) &= -147 \text{ N} + 65,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot s, \\ \sum F_{iQ} &= Q_{II}(s) - 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} (2 \text{ m} - s) \sin 35^\circ \\ &\quad - 20 \text{ N} \sin 35^\circ = 0 \\ \Rightarrow Q_{II}(s) &= 103 \text{ N} - 46 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot s, \\ \odot \sum M_i^{\text{SU}} &= -M_{II}(s) - 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} (2 \text{ m} - s) \frac{2 \text{ m} - s}{2} \sin 35^\circ \\ &\quad - 20 \text{ N} (2 \text{ m} - s) \sin 35^\circ = 0 \\ \Rightarrow M_{II}(s) &= -23 \frac{\text{N}}{\text{m}} (2 \text{ m} - s)^2 \\ &\quad - 11,5 \text{ N} (2 \text{ m} - s).\end{aligned}$$

**3.8 ••** Ein 3 m langer Gelenkträger ist im Punkt A drei- und im Punkt B einwertig gelagert. Im Punkt G sind die beiden Trägerhälften durch ein zweiwertiges Gelenk miteinander verbunden.

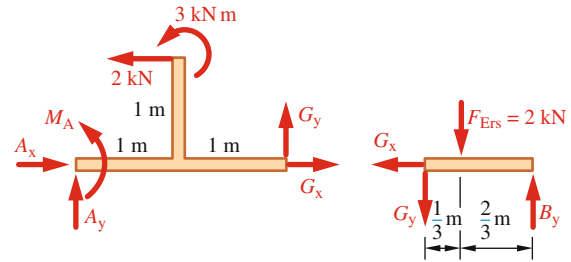


1. Berechnen Sie die Lager- und Gelenkreaktionen.
2. Berechnen Sie die Schnittgrößen im waagerechten Trägereil.

Resultat:

1.  $A_x = 2 \text{ kN}$ ,  $A_y = 1,3 \text{ kN}$ ,  $M_A = -2,4 \text{ kNm}$ ,  
 $B_y = 0,7 \text{ kN}$ ,  $G_x = 0$ ,  $G_y = -1,3 \text{ kN}$ .
2.  $N_I(x) = -2 \text{ kN}$ ,  $Q_I(x) = 1,3 \text{ kN}$ ,  
 $M_I(x) = 2,4 \text{ kNm} + 1,3 \text{ kN} \cdot x$ ,  
 $N_{II}(x) = 0$ ,  $Q_{II}(x) = 1,3 \text{ kN}$ ,  
 $M_{II}(x) = -2,6 \text{ kNm} + 1,3 \text{ kN} \cdot s$ ,  
 $N_{III}(x) = 0$ ,  $Q_{III}(x) = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} (3 \text{ m} - x)^2 - 0,7 \text{ kN}$ ,  
 $M_{III}(x) = -\frac{2}{3} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} (3 \text{ m} - x)^3 + 0,7 \text{ kN} (3 \text{ m} - x)$   
 (Ergebnisse gerundet).

Ausführliche Lösung: Lager- und Gelenkreaktionen:



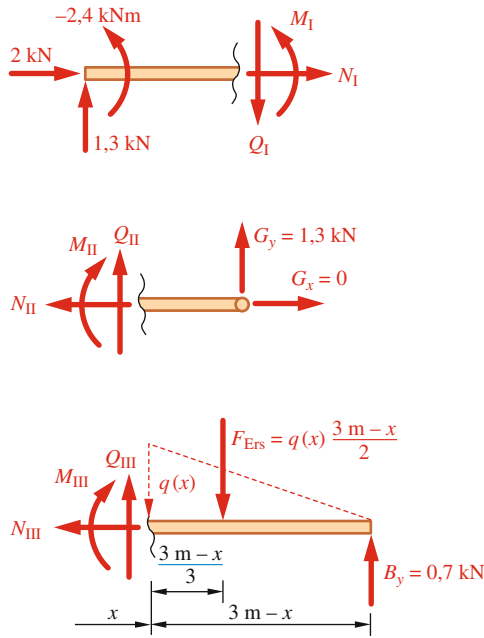
Rechtes Teilsystem:

$$\begin{aligned}\rightarrow \sum F_{ix} &= -G(x) = 0, \\ \odot \sum M_i^{(G)} &= -2 \text{ kN} \cdot \frac{1 \text{ m}}{3} + B_y \cdot 1 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow B_y &= 0,7 \text{ kN}, \\ \uparrow \sum F_{iy} &= -G_y - 2 \text{ kN} + B_y = 0 \\ \Rightarrow G_y &= -1,3 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Linkes Teilsystem:

$$\begin{aligned}\rightarrow \sum F_{ix} &= A_x - 2 \text{ kN} + G(x) = 0 \\ \Rightarrow A_x &= 2 \text{ kN}, \\ \uparrow \sum F_{iy} &= A_y + G_y = 0 \\ \Rightarrow A_y &= 1,3 \text{ kN}, \\ \odot \sum M_i^{(A)} &= M_A + 2 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} + 3 \text{ kNm} + G_y \cdot 2 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow M_A &= -2,4 \text{ kNm}.\end{aligned}$$

Freikörperbilder zur Berechnung der Schnittgrößen in den Bereichen I, II und III:



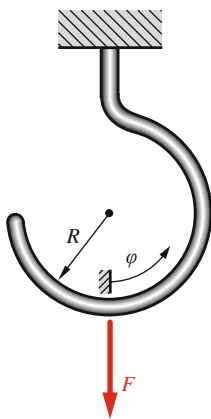
Mit den Ergebnissen

$$N_I(x) = -2 \text{ kN}, \quad Q_I(x) = 1,3 \text{ kN}, \quad M_I(x) = 2,4 \text{ kNm} + 1,3 \text{ kN} \cdot x,$$

$$N_{II}(x) = 0, \quad Q_{II}(x) = 1,3 \text{ kN}, \quad M_{II}(x) = -2,6 \text{ kNm} + 1,3 \text{ kN} \cdot s,$$

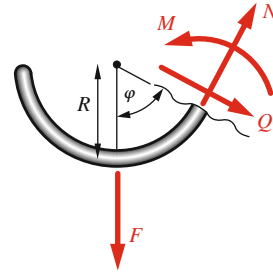
$$N_{III}(x) = 0, \quad Q_{III}(x) = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} (3 \text{ m} - x)^2 - 0,7 \text{ kN}, \quad M_{III}(x) = -\frac{2}{3} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} (3 \text{ m} - x)^3 + 0,7 \text{ kN} (3 \text{ m} - x) \quad (\text{Ergebnisse gerundet}).$$

**3.9** • Berechnen Sie die Schnittgrößen  $N$ ,  $Q$  und  $M$  in Abhängigkeit des Winkels  $\varphi$  im abgebildeten Haken.



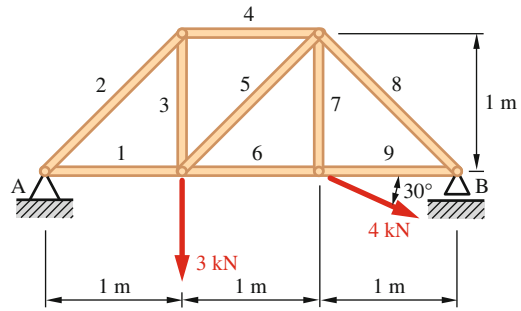
**Resultat:**  $N(\varphi) = F \sin \varphi$ ,  $Q(\varphi) = -F \cos \varphi$ ,  $M(\varphi) = -FR \sin \varphi$ .

**Ausführliche Lösung:**



$$N(\varphi) = F \sin \varphi, \quad Q(\varphi) = -F \cos \varphi, \quad M(\varphi) = -FR \sin \varphi.$$

**3.10** • Eine als ebenes Fachwerk konstruierte Brücke ist im Punkt A zwei- und im Punkt B einwertig gelagert. Im Knoten C greift die Vertikalkraft 3 kN, im Knoten D die um  $30^\circ$  zur Horizontalen geneigte Kraft 4 kN an.



1. Überprüfen Sie das Fachwerk auf äußere und innere statische Bestimmtheit.
2. Bestimmen Sie die Lagerreaktionen.
3. Bestimmen Sie mit einem Ritterschnitt die Stabkräfte in den Stäben 4, 5 und 6.
4. Bestimmen Sie mit einem weiteren Ritterschnitt die Stabkräfte in den Stäben 1 und 3.
5. Schneiden Sie das Lager A frei und bestimmen Sie die Stabkraft in Stab 2.

**Resultat:**

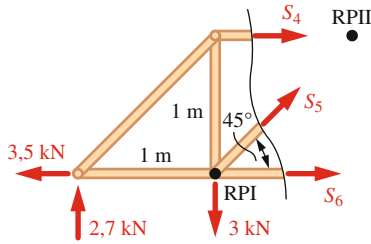
1. Äußere und innere statische Bestimmtheit liegen vor.
2.  $A_x = -3,5 \text{ kN}$ ,  $A_y = 2,7 \text{ kN}$ ,  $B_y = 2,3 \text{ kN}$ .
3.  $S_4 = -2,7 \text{ kN}$ ,  $S_5 = 0,4 \text{ kN}$ ,  $S_6 = 5,9 \text{ kN}$ .
4.  $S_1 = 6,2 \text{ kN}$ ,  $S_3 = 2,7 \text{ kN}$ .
5.  $S_2 = -3,8 \text{ kN}$ .

**Ausführliche Lösung:** Innere statische Bestimmtheit ist gegeben, da es 6 Knoten und 9 Stäbe gibt und die Fachwerkstäbe nicht wackelig sind. Innere statische Bestimmtheit ist gegeben, da 3 Lagerwertigkeiten und 3 Gleichgewichtsbedingungen vorliegen und die Struktur als Ganzes nicht wackelig ist.

Ergebnisse für die Lagerreaktionen:  $A_x = -3,5 \text{ kN}$ ,  $A_y = 2,7 \text{ kN}$ ,  $B_y = 2,3 \text{ kN}$ .



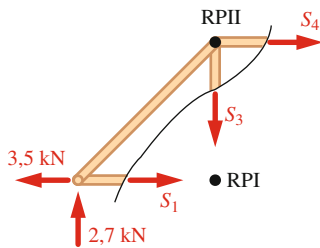
Berechnung der Stabkräfte:



$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_i^{(RPI)} &= S_4 \cdot 1 \text{ m} - 2,7 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow S_4 &= -2,7 \text{ kN}, \end{aligned}$$

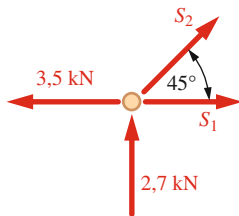
$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_i^{(RPII)} &= -2,7 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 3,5 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} \\ &\quad + 3 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} + S_6 \cdot 1 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow S_6 &= 5,9 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iy} &= 2,7 \text{ kN} - 3 \text{ kN} + \frac{S_5}{\sqrt{2}} = 0 \\ \Rightarrow S_5 &= 0,4 \text{ kN}. \end{aligned}$$



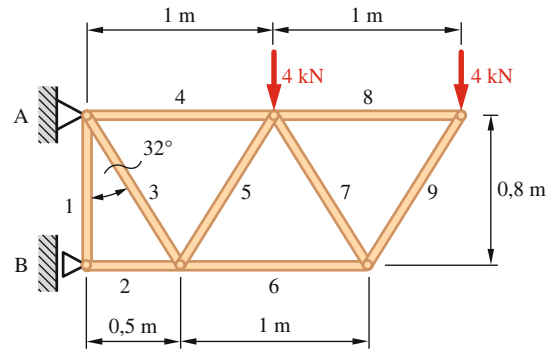
$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_i^{(RPII)} &= S_1 \cdot 1 \text{ m} - 2,7 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} - 3,5 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = 0, \\ \Rightarrow S_1 &= 6,2 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iy} &= 2,7 \text{ kN} - S_3 = 0 \\ \Rightarrow S_3 &= 2,7 \text{ kN}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iy} &= \frac{S_2}{\sqrt{2}} + 2,7 \text{ kN} = 0 \\ \Rightarrow S_2 &= -3,8 \text{ kN}. \end{aligned}$$

**3.11** • Berechnen Sie die Lagerreaktionen und Stabkräfte des skizzierten Fachwerkträgers.



**Resultat:**  $A_x = -15 \text{ kN}$ ,  $A_y = 8 \text{ kN}$ ,  $B_x = 15 \text{ kN}$ .

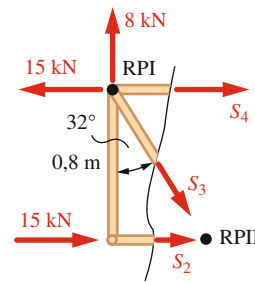
$S_1 = 0$ ,  $S_2 = -15 \text{ kN}$ ,  $S_3 = 9,43 \text{ kN}$

$S_4 = 10 \text{ kN}$ ,  $S_5 = -9,43 \text{ kN}$ ,  $S_6 = -5 \text{ kN}$

$S_7 = 4,72 \text{ kN}$ ,  $S_8 = 2,5 \text{ kN}$ ,  $S_9 = -4,72 \text{ kN}$ .

**Ausführliche Lösung:** Ergebnisse für die Lagerreaktionen:  $A_x = -15 \text{ kN}$ ,  $A_y = 8 \text{ kN}$ ,  $B_x = 15 \text{ kN}$ .

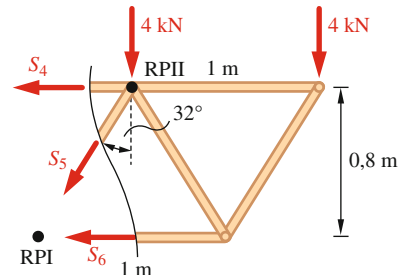
Ermittlung der Stabkräfte:  $S_1$  ist ein Nullstab, da an einem belasteten Knoten zwei Stäbe (1 und 2) in verschiedene Richtungen sowie eine Kraft ( $B_x$ ) angreifen, und die Kraft in Richtung des anderen Stabes wirkt.



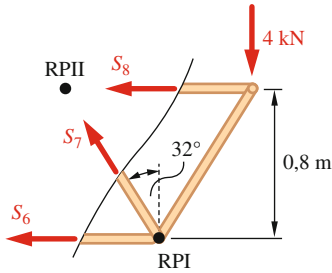
$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_i^{(RPI)} &= 15 \text{ kN} \cdot 0,8 \text{ m} + S_2 \cdot 0,8 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow S_2 &= -15 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_i^{(RPII)} &= 15 \text{ kN} \cdot 0,8 \text{ m} - 8 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} - S_4 \cdot 0,8 \text{ m} \\ &= 0 \\ \Rightarrow S_4 &= 10 \text{ kN}, \end{aligned}$$

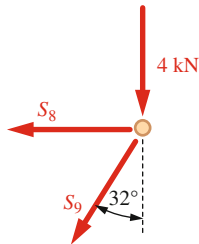
$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iy} &= 8 \text{ kN} - S_3 \cos 32^\circ = 0 \\ \Rightarrow S_3 &= 9,43 \text{ kN}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\circlearrowleft \sum M_i^{(\text{RPII})} &= -4 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} - S_6 \cdot 0,8 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow S_6 &= -5 \text{ kN}, \\ \uparrow \sum F_{iy} &= S_5 \cos 32^\circ - 8 \text{ kN} = 0 \\ \Rightarrow S_5 &= -9,43 \text{ kN}.\end{aligned}$$

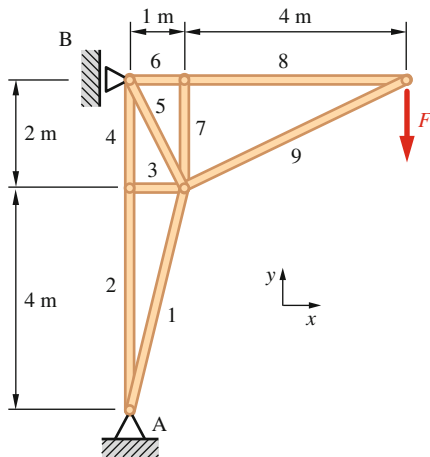


$$\begin{aligned}\circlearrowleft \sum M_i^{(\text{RPI})} &= -4 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} + S_8 \cdot 0,8 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow S_8 &= 2,5 \text{ kN}, \\ \uparrow \sum F_{iy} &= -4 \text{ kN} + S_7 \cos 32^\circ = 0 \\ \Rightarrow S_7 &= 4,72 \text{ kN}.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\uparrow \sum F_{iy} &= -4 \text{ kN} - S_9 \cos 32^\circ = 0 \\ \Rightarrow S_9 &= -4,72 \text{ kN}.\end{aligned}$$

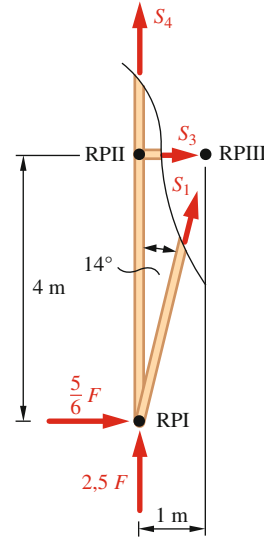
**3.12 •** Der skizzierte Wanddrehkran wird durch eine senkrechte Kraft  $F$  belastet. Berechnen Sie die Lagerreaktionen und Stabkräfte.



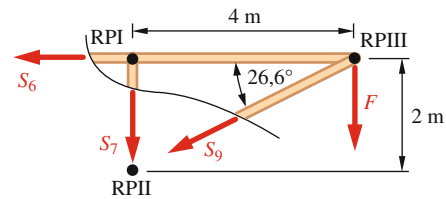
**Resultat:**  $A_x = \frac{5}{6} F$ ,  $A_y = F$ ,  $B_x = -\frac{5}{6} F$ .  
 $S_1 = -3,44 F$ ,  $S_2 = 2,34 F$ ,  $S_3 = 0$ ,  
 $S_4 = 2,33 F$ ,  $S_5 = -2,61 F$ ,  $S_6 = 2 F$ ,  
 $S_7 = 0$ ,  $S_8 = 2 F$ ,  $S_9 = -2,24 F$ .

**Ausführliche Lösung:** Ergebnisse für die Lagerreaktionen:  
 $A_x = \frac{5}{6} F$ ,  $A_y = F$ ,  $B_x = -\frac{5}{6} F$ .

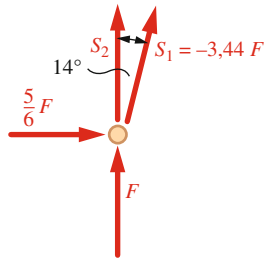
Berechnung der Stabkräfte:



$$\begin{aligned}\circlearrowleft \sum M_i^{(\text{RPI})} &= -S_3 \cdot 4 \text{ m} = 0 \Rightarrow S_3 = 0, \\ \circlearrowleft \sum M_i^{(\text{RPII})} &= S_1 \cdot 1 \text{ m} \cos 14,04^\circ + \frac{5}{6} F \cdot 4 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow S_1 &= -3,44 F, \\ \circlearrowleft \sum M_i^{(\text{RPIII})} &= \frac{5}{6} F \cdot 4 \text{ m} - F \cdot 1 \text{ m} - S_4 \cdot 1 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow S_4 &= 2,33 F.\end{aligned}$$

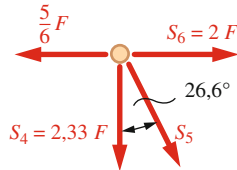


$$\begin{aligned}\circlearrowleft \sum M_i^{(\text{RPI})} &= -F \cdot 4 \text{ m} - S_9 \cdot 2 \text{ m} \cos 26,565^\circ = 0 \\ \Rightarrow S_9 &= -2,24 F, \\ \circlearrowleft \sum M_i^{(\text{RPII})} &= S_7 \cdot 4 \text{ m} = 0 \Rightarrow S_7 = 0, \\ \circlearrowleft \sum M_i^{(\text{RPIII})} &= S_6 \cdot 2 \text{ m} - F \cdot 4 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow S_6 &= 2 F.\end{aligned}$$



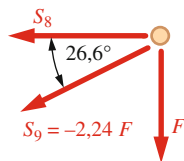
$$\uparrow \sum F_{iy} = F + S_2 - 3,44 F \cos 14,04^\circ = 0$$

$$\Rightarrow S_2 = 2,34 F.$$



$$\uparrow \sum F_{iy} = -2,33 F - S_5 \cos 26,565^\circ = 0$$

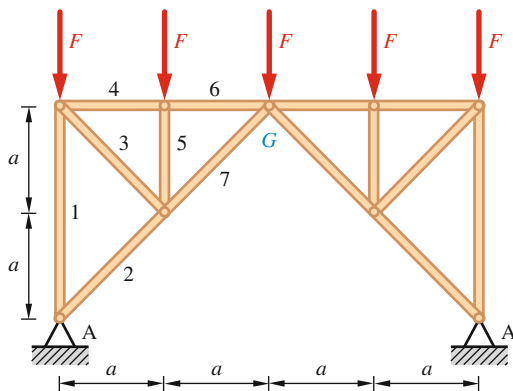
$$\Rightarrow S_5 = -2,61 F.$$



$$\rightarrow \sum F_{ix} = S_8 - S_9 \cos 26,565^\circ = 0$$

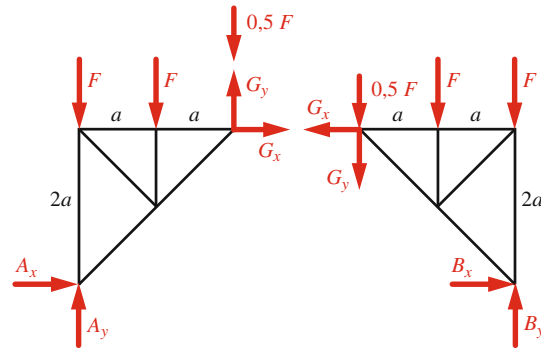
$$\Rightarrow S_8 = 2 F.$$

**3.13 ••** Die skizzierte zweiteilige Fachwerkbrücke wird durch fünf senkrechte Kräfte  $F$  belastet. Berechnen Sie die Stabkräfte.



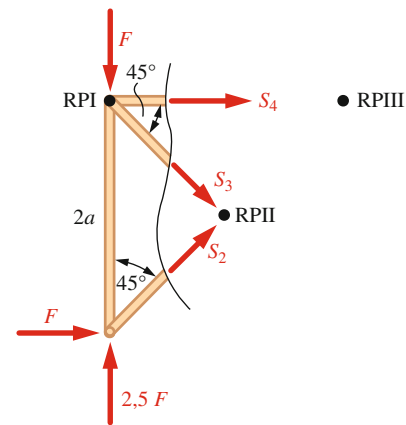
**Resultat:**  $A_x = F, A_y = 2,5 F, B_x = -F, B_y = 2,5 F,$   
 $G_x = -F, G_y = 0.$   
 $S_1 = -1,5 F, S_2 = -1,41 F, S_3 = 0,71 F,$   
 $S_4 = -0,5 F, S_5 = -F, S_6 = -0,5 F, S_7 = -0,71 F.$

**Ausführliche Lösung:** Lager- und Gelenkreaktionen:



$$A_x = F, A_y = 2,5 F, B_x = -F, B_y = 2,5 F, G_x = -F, G_y = 0$$

Berechnung der Stabkräfte:



$$\circlearrowleft \sum M_i^{(RPI)} = F \cdot 2a + S_2 \cdot 2a \sin 45^\circ = 0$$

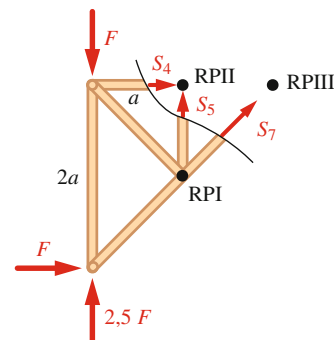
$$\Rightarrow S_2 = -1,41 F,$$

$$\circlearrowleft \sum M_i^{(RPII)} = F \cdot 2a - 2,5 F \cdot 2a + F \cdot 2a + S_3 \cdot 2a \sin 45^\circ = 0$$

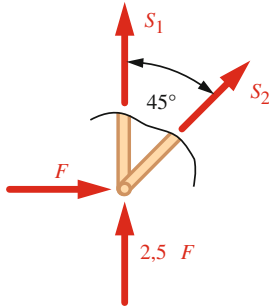
$$\Rightarrow S_3 = 0,71 F,$$

$$\circlearrowleft \sum M_i^{(RPIII)} = F \cdot a - 2,5 F \cdot a + F \cdot a - S_4 \cdot a = 0$$

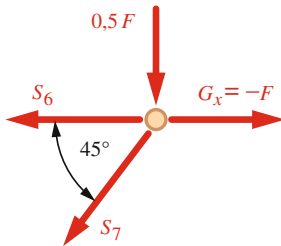
$$\Rightarrow S_4 = -0,5 F.$$



$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_i^{(\text{RP II})} &= F \cdot a - 2,5 F \cdot a + F \cdot 2a + S_7 \cdot a \sin 45^\circ = 0 \\ &\Rightarrow S_7 = -0,71 F, \\ \circlearrowleft \sum M_i^{(\text{RP III})} &= F \cdot 2a - 2,5 F \cdot 2a + F \cdot 2a - S_5 \cdot a = 0 \\ &\Rightarrow S_5 = -F. \end{aligned}$$



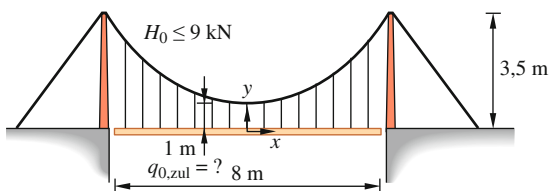
$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iy} &= 2,5 F + S_1 + S_2 \sin 45^\circ = 0 \\ &\Rightarrow S_1 = -1,5 F. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iy} &= -S_6 - S_7 \sin 45^\circ - F = 0 \\ &\Rightarrow S_6 = -0,5 F \end{aligned}$$

**3.14 ••** Die beiden Tragseile einer Spielplatz-Hängebücke sind an 3,50 m hohen und 8 m voneinander entfernten Masten aufgehängt. Zu berechnen ist die maximal zulässige Belastung  $q_{0,\text{zul}}$  eines jeden Tragseils unter den folgenden Voraussetzungen:

- Die Tragseile sollen in Brückenmitte ( $x = 0$ ) genau bis auf 1 m über den Brückenweg durchhängen.
- Der Horizontalzug im Seil soll maximal 9 kN betragen.



- Berechnen Sie  $q_{0,\text{zul}}$  sowie die Gleichung  $y(x)$  der Seillinie im angegebenen  $(x, y)$ -Koordinatensystem.
- Welcher größten im Tragseil auftretenden Seilkraft  $S_{\text{max}}$  entspricht  $H_0 = 9 \text{ kN}$ ?

**Resultat:**  $q_{0,\text{zul}} = 2,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  pro Tragseil,  
 $y(x) = 0,16 \frac{1}{\text{m}} \cdot x^2 + 1 \text{ m}$ ,  
 $S_{\text{max}} = 14,4 \text{ kN}$ .

**Ausführliche Lösung:**

- Randbedingungen:  $y(0) = C_2 = 1 \text{ m}$  und  $y'(0) = C_1 = 0$ .

$$\Rightarrow y(4 \text{ m}) = \frac{q_{0,\text{zul}}}{18 \text{ kN}} (4 \text{ m})^2 + 1 \text{ m} = 3,5 \text{ m},$$

$$\Rightarrow q_{0,\text{zul}} = 2,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}},$$

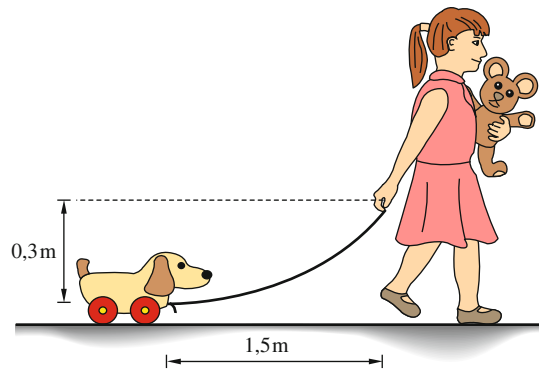
$$\Rightarrow y(x) = 0,16 \frac{1}{\text{m}} \cdot x^2 + 1 \text{ m}.$$

Hierin bezieht sich  $q_{0,\text{zul}}$  auf ein einzelnes Tragseil. Das zulässige Gewicht der gesamten Brücke darf demnach  $2 \cdot 2,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 5,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  betragen.

- 

$$\begin{aligned} S_{\text{max}} &= H_0 \sqrt{1 + y'^2(4 \text{ m})} \\ &= 9 \text{ kN} \sqrt{1 + \left( \frac{2,8 \text{ kN}}{9 \text{ m} \cdot \text{kN}} \cdot 4 \text{ m} \right)^2} = 14,4 \text{ kN}. \end{aligned}$$

**3.15 ••** Welcher Horizontalzug  $H_0$  muss im Spielzeugdackelseil herrschen, damit dieses am Dackel eine horizontale Tangente hat und somit auf keinen Fall auf dem Boden schleift?

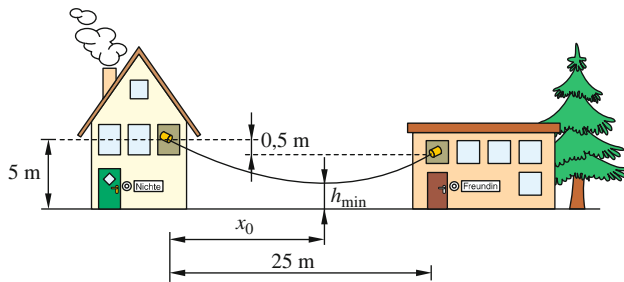


**Resultat:**  $H_0 = 1,8 \text{ N}$ .

**Ausführliche Lösung:** Ansatz:  $y(1,5 \text{ m}) - y(0) = \frac{H_0}{q_0} \cosh\left(\frac{q_0}{H_0} \cdot 1,5 \text{ m}\right) - \frac{H_0}{q_0} = 0,3 \text{ m}$  mit der Lösung  $\frac{H_0}{q_0} = 3,7 \text{ m} \Rightarrow H_0 = 1,8 \text{ N}$ .

**3.16 ••** Wie das nun mal so ist, telefoniert Ihre kleine Nichte für ihr Leben gerne. Vom Fenster ihres Kinderzimmers aus (Höhe: 5 m über dem Boden) möchte sie nun ein Büxentelefon zu ihrer im Nachbarhaus wohnenden

Freundin spannen (Höhe Kinderzimmerfenster Freundin: 4,5 m über dem Boden). Da sie ihre Telefonbüchse mit einer Horizontalkraft von höchstens 4 N in den Händen halten will – sonst wird der jungen Dame das Telefonieren zu unbequem – macht sie sich Sorgen um den maximalen Durchhang der Telefonleitung.



Tun Sie bitte Ihrer Nichte den Gefallen und berechnen Sie die Stelle  $x_0$  des größten Kordeldurchhangs sowie die kleinste Höhe  $h_{\min}$  der Telefonkordel über dem Erdboden. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Welcher Belastungsfall des Seils liegt vor: konstante Streckenlast  $q(x)$  oder konstante Streckenlast  $q(s)$ ?
2. Berechnen Sie die Stelle  $x_0$  des größten Kordeldurchhangs.
3. Berechnen Sie die kleinste Höhe  $h_{\min}$  der Telefonkordel über dem Erdboden.

Weitere Angabe: Das spezifische Gewicht der Telefonkordel beträgt  $q_0 = 0,1 \text{ N/m}$ .

#### Resultat:

1.  $q(s) = \text{konstant}$ .
2.  $x_0 = 13,29 \text{ m}$ .
3.  $h_{\min} = 2,77 \text{ m}$  über dem Erdboden.

#### Ausführliche Lösung:

1. konstante Streckenlast  $q(s)$ .
2. Am linken Haus ( $x = -x_0$ ) ist die Telefonkordel um 0,5 m höher aufgehängt als am rechten Haus. Wir erhalten somit als Bestimmungsgleichung für  $x$ :

$$y(-x_0) - y(25 \text{ m} - x_0) = 0,5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow 40 \text{ m} \left[ \cosh\left(-\frac{0,025}{\text{m}} \cdot x_0\right) - \cosh\left(\frac{0,025}{\text{m}} \cdot (25 \text{ m} - x_0)\right) \right] = 0,5 \text{ m}$$

mit dem Ergebnis  $x_0 = 13,29 \text{ m}$ .

3. Für die Seillinie  $y(x)$  der Telefonkordel am linken Rand und an der tiefsten Stelle erhalten wir  $y(-13,29 \text{ m}) = 42,23 \text{ m}$  und  $y(0) = 40 \text{ m}$ . Die Telefonkordel hängt also im tiefsten Punkt um 2,23 m tiefer als am rechten Haus und  $h_{\min}$  beträgt folglich  $h_{\min} = 5 \text{ m} - 2,23 \text{ m} = 2,77 \text{ m}$ .