

Aus Kapitel 7

Aufgaben

7.1 • Ein Kraftfahrzeug beschleunigt aus dem Stand heraus in $T = 10 \text{ s}$ auf $v_1 = 100 \text{ km/h}$. Wie groß ist die durchschnittliche Beschleunigung a_0 ? Welchen Weg S hat es bis zum Ende der Beschleunigung zurückgelegt?

Resultat: $a_0 = 2,7 \text{ m/s}^2$, $S = 138,8 \text{ m}$.

Ausführliche Lösung: Das Fahrzeug beschleunigt aus dem Stand heraus, also ohne Anfangsgeschwindigkeit. Wir messen Weg und Zeit vom Beginn des Beschleunigungsvorgangs aus. Damit gelten zur Anfangszeit $t_0 = 0$ die Anfangsbedingungen $s_0 = 0$ und $v_0 = 0$. Die Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung liefern die beiden Gleichungen $v_1 = a_0 T$, $S = \frac{1}{2} a_0 T^2$ für die beiden Unbekannten a_0 und S . Die Auflösung ergibt:

$$a_0 = \frac{v_1}{T} = 2,7 \text{ m/s}^2, S = \frac{1}{2} v_1 T = 138,8 \text{ m}.$$

7.2 • Ein Kraftfahrzeug fährt mit $v_0 = 100 \text{ km/h}$ und bremst dann in $S = 39,8 \text{ m}$ bis zum Stillstand. Wie groß war die durchschnittliche Verzögerung a_0 ?

Resultat: $a_0 = -\frac{v_0^2}{2S} = -9,69 \text{ m/s}^2$.

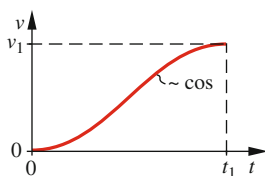
Ausführliche Lösung: Aus $a_0 = v \frac{dv}{ds}$ folgt durch Trennen der Variablen zunächst:

$$a_0 \int_0^S ds = \int_{v_0}^0 v dv$$

Die Integrationsgrenzen ergeben sich daraus, dass zum Beginn bzw. Ende der Bremsung die Zahlenpaare $s = 0, v = v_0$ bzw. $s = S, v = 0$ gehören. Die Lösung der Integrale ergibt:

$$a_0 = -\frac{v_0^2}{2S} = -9,69 \text{ m/s}^2.$$

7.3 •• Um ein sanftes Anfahren eines Aufzugs zu gewährleisten, wird die Anfahrsgeschwindigkeit so gesteuert, dass der Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf dem ansteigenden Bereich einer Kosinus-Funktion folgt.



Seine Maximalgeschwindigkeit v_1 soll der Aufzug zum Zeitpunkt $t = t_1$ erreichen.

1. Wie lautet die Funktion $v = v(t)$ mit den gegebenen Parametern v_1 und t_1 ?
2. Welcher Beschleunigungs-Zeit-Verlauf $a = a(t)$ stellt sich ein? Wie groß ist die maximale Beschleunigung und zu welchem Zeitpunkt wird sie erreicht?
3. Berechnen Sie den Weg-Zeit-Verlauf $s = s(t)$. Welchen Weg s_1 hat der Aufzug zurückgelegt, wenn er seine Maximalgeschwindigkeit v_1 erreicht hat?

Resultat:

$$v(t) = \frac{v_1}{2} \left(1 - \cos \pi \frac{t}{t_1} \right),$$

$$a(t) = \frac{\pi v_1}{2 t_1} \sin \pi \frac{t}{t_1}, \quad s(t) = \frac{v_1}{2} \left(t - \frac{t_1}{\pi} \sin \pi \frac{t}{t_1} \right),$$

$$s_1 = s(t_1) = \frac{1}{2} v_1 t_1.$$

Ausführliche Lösung: Aus dem Funktionsverlauf liest man die Amplitude $2A = v_1$ und die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2t_1$, also $A = \frac{v_1}{2}$ und $\omega = \frac{\pi}{t_1}$ ab. Damit ist das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz $v = v(t)$ bestimmt. Die kinematischen Größen $a = a(t)$ und $s = s(t)$ folgen durch Differenziation bzw. Integration.

7.4 ••• Oft kann man die Erdbeschleunigung g als konstant annehmen, obwohl sie streng genommen quadratisch vom Abstand r des Körpers vom Erdmittelpunkt abhängt. Für Bewegungen über große Strecken muss die Abhängigkeit $g = g(r)$ berücksichtigt werden, um eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten zu erreichen.

Für den freien Fall im Newton'schen Schwerfeld gilt ein Bewegungsgesetz der Form

$$a = a(r) = -g_0 \frac{r_0^2}{r^2}.$$

Dabei ist $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche im Abstand $r_0 = 6500 \text{ km}$ vom Erdmittelpunkt.

1. Eine Kugel wird mit großer Anfangsgeschwindigkeit v_0 von der Erdoberfläche aus nach oben geschossen. Wie ändert sich die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit des Abstands r vom Erdmittelpunkt?

2. Welchen maximalen Abstand vom Erdmittelpunkt kann die Kugel erreichen?
3. Mit welcher Geschwindigkeit v_0^* müsste man die Kugel mindestens abschießen, sodass sie das Schwerfeld der Erde überwindet und in den Tiefen des Weltraums verschwindet?
4. Zeigen Sie, dass für kleine Schusshöhen $r = r_0 + s$, $s \ll r_0$ das aus der Schulphysik bekannte Gesetz $v^2(s) = v_0^2 - 2g_0s$ folgt.

Resultat:

1. $v(r) = \sqrt{v_0^2 - 2g_0r_0^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$.
2. $r_{\max} = \frac{2g_0r_0^2}{2g_0r_0 - v_0^2} = 6503,2 \text{ km}$ von Erdmittelpunkt aus,
 $\Delta r_{\max} = r_{\max} - r_0 = 3,19 \text{ km}$ von Erdoberfläche aus.
3. $v_0^* = \sqrt{2g_0r_0} = 40.655 \text{ km/h}$.
4. Linearisierung von $v = v(r)$ um den Entwicklungspunkt $r = r_0$.

Ausführliche Lösung:

1. Wenn das Beschleunigungsgesetz in Abhängigkeit des Weges gegeben ist, folgt nach Tab. 7.1 die Geschwindigkeit aus

$$v^2 = v_0^2 + \int_{r_0}^r a(\bar{r}) d\bar{r} = v_0^2 - 2g_0r_0^2 \int_{r_0}^r \frac{1}{\bar{r}^2} d\bar{r}.$$

Die Lösung des Integrals liefert das Ergebnis

$$v(r) = \sqrt{v_0^2 - 2g_0r_0^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}.$$

2. Der maximale Abstand r_{\max} ist im Umkehrpunkt der Bewegung erreicht. Der Körper hat dann momentan keine Geschwindigkeit und aus der Bestimmungsgleichung $v(r_{\max}) = 0$ folgt der maximale Abstand zu

$$r_{\max} = \frac{2g_0r_0^2}{2g_0r_0 - v_0^2} = 6503,2 \text{ km}.$$

3. Der Maximalabstand r_{\max} wächst über alle Grenzen, wenn der Nenner im Ergebnis für r_{\max} zu null wird, also für

$$v_0^* = \sqrt{2g_0r_0} = 11.292,9 \text{ m/s} = 40.655 \text{ km/h}.$$

4. Für die Linearisierung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ gilt $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Bei kleinen Schusshöhen bleibt der Körper in der Nähe der Erdoberfläche; als Entwicklungspunkt wird deshalb der Erdradius r_0 gewählt. Wendet man die Linearisierung auf die Funktion

$$f(r) = v^2(r) = v_0^2 - 2g_0r_0^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

an der Stelle $r = r_0$ an, so folgt mit $f(r_0) = v_0^2$ zunächst $f(r) = v_0^2 + f'(r_0)(r - r_0)$, wobei die Ableitung sich zu

$$f'(r) = -2g_0r_0^2 \frac{1}{r^2}, \quad f'(r_0) = -2g_0$$

ergibt. Nutzt man noch $r - r_0 = s$ aus, ergibt sich das Ergebnis $v^2(s) = v_0^2 - 2g_0s$.

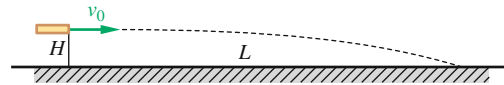
- 7.5** • Ein Stein wird senkrecht nach oben geworfen und schlägt nach $T = 8 \text{ s}$ wieder auf dem Boden auf.

1. Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit des Steins?
2. Welche Steighöhe erreicht der Stein?

Resultat: $v_0 = 39,24 \text{ m/s}$, $H = 78,5 \text{ m}$

Ausführliche Lösung: Führen wir eine vertikal nach oben gerichtete h -Koordinate ein, so gilt $v(t) = v_0 - gt$ und $h(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$. Für die Steigzeit gilt einerseits $T_S = \frac{1}{2}T$ und andererseits folgt sie aus $v(T_S) = 0$ zu $T_S = \frac{v_0}{g}$. Gleichsetzen liefert $v_0 = \frac{1}{2}gT = 39,24 \text{ m/s}$. Die Steighöhe ist $H = h(T_S) = \frac{1}{8}gT^2 = 78,5 \text{ m}$.

- 7.6** • Ein Projektil wird horizontal abgeschossen. Seine Bahn senkt sich auf $L = 100 \text{ m}$ um $H = 1 \text{ m}$ ab.



Bestimmen Sie die Flugzeit T und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 .

Resultat: $T = 0,45 \text{ s}$, $v_0 = 221 \text{ m/s}$.

Ausführliche Lösung: Wenn wir das Koordinatensystem in die Abschußstelle legen, wird die Bewegung durch $x(t) = v_0t$ und $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ beschrieben. Aus den beiden Bedingungen $x(T) = L$ und $y(T) = -H$ folgen zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten T und v_0 . Durch Auflösen erhält man $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ und $v_0 = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{g}{2H}}L$.

- 7.7** • Ein Fahrzeug durchfährt eine Kurve mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 140 \text{ km/h}$. Dabei erfährt es eine Normalbeschleunigung $a_n = 7 \text{ m/s}^2$. Wie groß ist der Radius R der Kurve?

Resultat: $R = 216 \text{ m}$.

Ausführliche Lösung: Aus $a_n = \frac{v^2}{R}$ folgt $R = \frac{v^2}{a_n} = 216 \text{ m}$.