

Aus Kapitel 17

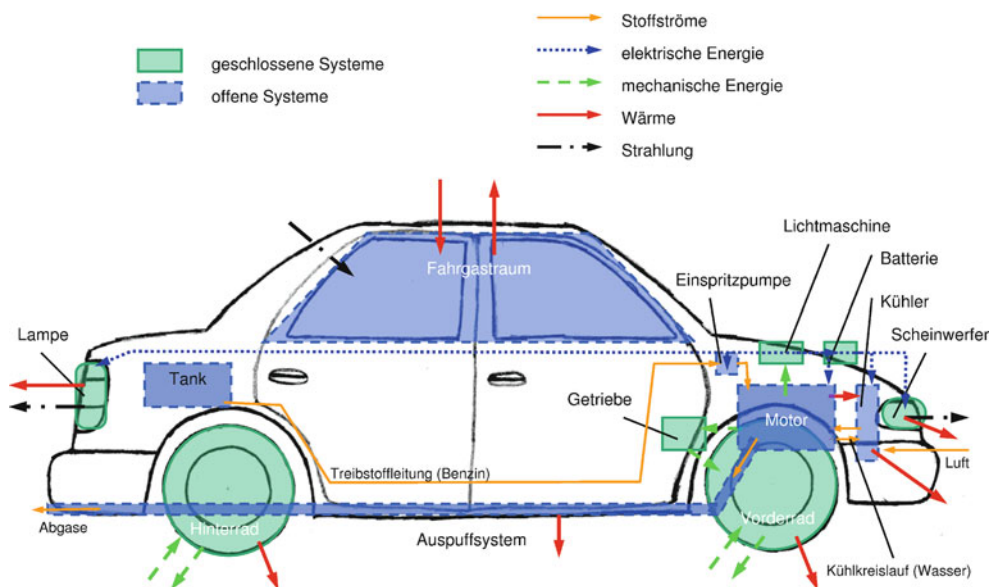
Aufgaben

17.1 • Ein fahrendes Kraftfahrzeug ist als thermodynamisches System zu betrachten. Zeichnen Sie eine Prinzipskizze mit folgenden Teilen:

Fahrgastraum, Motor, Kühler, Einspritzpumpe, Tank, Auspuff, Getriebe, Räder, Lichtmaschine, Batterie, Lampe.

Zeichnen Sie für das gesamte Fahrzeug und für die genannten Teile Systemgrenzen, und zwar für offene Systeme blaue und für geschlossene Systeme grüne. Kennzeichnen Sie die grenzüberschreitenden Energie- und Stoffströme durch Pfeile.

Ausführliche Lösung: In dem folgenden Bild sind alle Systemgrenzen, Energie- und Stoffströme enthalten.



Kraftfahrzeug mit Systemgrenzen, Energie- und Stoffströmen

17.2 •• Es soll das Messverhalten eines Quecksilberthermometers untersucht werden. Die Kapillare hat einen Durchmesser von 0,2 mm. Die Skalenlänge für die Temperaturdifferenz zwischen Siede- und Eispunkt des Wassers soll 20 cm betragen. Für Quecksilber gilt die Beziehung

$$\rho(0)/\rho(\vartheta) = 1 + E\vartheta + F\vartheta^2 \quad (\vartheta \text{ in } ^\circ\text{C})$$

mit folgender Bedeutung der Größen:

$\rho(0)$ = Dichte des Quecksilbers bei 0°C ,

$\rho(\vartheta)$ = Dichte des Quecksilbers bei einer Temperatur ϑ im Bereich $0^\circ\text{C} < \vartheta < 100^\circ\text{C}$,

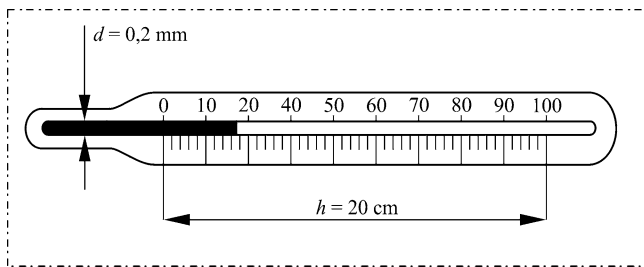
$$E = 1,8182 \cdot 10^{-4} \text{ } 1/^\circ\text{C},$$

$$F = 0,78 \cdot 10^{-8} \text{ } 1/^\circ\text{C}^2.$$

Es ist anzunehmen, dass das Volumen des Glaskörpers des Thermometers konstant bleibt.

1. Wie groß ist das Quecksilbervolumen bei 0°C ?
2. Berechnen Sie in Temperaturschritten von 10°C die Skaleneinteilung zwischen 0°C und 100°C . Es ist davon auszugehen, dass das Thermometer vollständig in den Bereich der zu messenden Temperatur eintaucht.
3. Geben Sie an, welcher maximale Fehler sich einstellt, wenn die Skala in gleiche Intervalle eingeteilt wird.
4. Im praktischen Gebrauch wird nur der Teil des Thermometers unter der 0°C -Marke in den zu messenden Temperaturbereich eingetaucht, während sich der Teil oberhalb der 0°C -Marke im Bereich der Raumtemperatur von 20°C befindet. Welcher Messfehler stellt sich ein, wenn an einem Körper mit der Temperatur von 100°C gemessen wird?

Ausführliche Lösung: 1. Das Thermometer wird als geschlossenes System betrachtet, d. h., die Masse des Quecksilbers im Thermometer ändert sich nicht.



Thermometer mit Systemgrenze

Für das Volumen des Quecksilbers im Thermometer gilt:

$$V(100^\circ\text{C}) = V(0^\circ\text{C}) + \frac{\pi}{4} d^2 h(100^\circ\text{C})$$

Damit erhält man für das Anfangsvolumen mit $m = \rho V = \text{konst.}$, also: $\rho(100^\circ\text{C}) V(100^\circ\text{C}) = \rho(0^\circ\text{C}) V(0^\circ\text{C})$:

$$V_0 = V(0^\circ\text{C}) = \frac{\frac{\pi}{4} d^2 h(100^\circ\text{C})}{\frac{\rho(0^\circ\text{C})}{\rho(100^\circ\text{C})} - 1} = 0,3441 \text{ cm}^3.$$

2. Das Thermometer ist weiterhin als geschlossenes System mit $m = \text{konst.}$ zu betrachten.

Werten wir die im ersten Aufgabenteil erhaltene Gleichung nicht bei 100°C , sondern allgemein bei ϑ aus, so erhält man:

$$V_0 = \frac{\frac{\pi}{4} d^2 h(\vartheta)}{\frac{\rho(0^\circ\text{C})}{\rho(\vartheta)} - 1}, \quad h(\vartheta) = \frac{4V_0}{\pi d^2} \left(\frac{\rho(0^\circ\text{C})}{\rho(\vartheta)} - 1 \right).$$

Mit dem Ansatz für die Dichte aus der Aufgabenstellung ergibt sich:

$$h(\vartheta) = h(100^\circ\text{C}) \frac{E\vartheta + F\vartheta^2}{E100 + F100^2}.$$

Daraus lässt sich dann die Höhe für $\vartheta = 0^\circ\text{C}, 10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, \dots, 100^\circ\text{C}$ berechnen.

3. Aus Teilaufgabe 2 zeigte sich der größte Fehler bei $\vartheta = 50^\circ\text{C}$. Man kann bei gegebener Höhe die Temperatur bestimmen

$$\begin{aligned} h(\vartheta) &= h(100^\circ\text{C}) \frac{E\vartheta + F\vartheta^2}{E100 + F100^2} \\ &= 1095,29(E\vartheta + F\vartheta^2) \quad (\text{cm}). \end{aligned}$$

Nach der Temperatur aufgelöst ergibt sich:

$$\vartheta = 50,107^\circ\text{C}.$$

Dies entspricht einem relativen Fehler von 2,1 %.

4. Betrachtung des Thermometers als zwei geschlossene Systeme:

I bis zur 0°C -Markierung

II die Kapillare

$$\begin{aligned} \text{relativer Fehler} &= \frac{h(100^\circ\text{C}) - h^*(100^\circ\text{C})}{h(100^\circ\text{C})} \\ &= 1 - \frac{\rho(100^\circ\text{C})}{\rho(20^\circ\text{C})} = 1,44 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Der relative Messfehler beträgt also ca. 1,44 %.

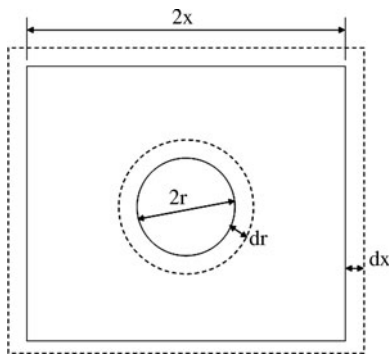
17.3 ••• Eine quadratische Scheibe vernachlässigbarer Dicke mit der Seitenlänge $2x$ ist mit einer Bohrung vom Durchmesser $2r$ versehen. Die Größen x und r sind als unabhängige Variable aufzufassen.

1. Wie lautet die Funktion der Oberfläche $A(x, r)$? Die Dicke der Scheibe ist zu vernachlässigen.
2. Stellen Sie das totale Differenzial der Oberfläche durch geometrische Betrachtung auf.

3. Stellen Sie das totale Differenzial durch Differentiation auf.
4. Berechnen Sie die Flächendifferenzen $A(x, r) - A(x_0, r_0)$ für $x_0 = 10 \text{ cm}$, $r_0 = 5 \text{ cm}$ und
 - (a) $x = 1,001x_0$, $r = 1,001r_0$
 - (b) $x = 1,01x_0$, $r = 1,01r_0$
 - (c) $x = 1,1x_0$, $r = 1,1r_0$.
5. Berechnen Sie die Flächendifferenzen mit Anwendung des totalen Differentials, indem Sie für die Differenziale dx und dr die Differenzen Δx und Δr einsetzen. Geben Sie die Fehler an.

Ausführliche Lösung:

1. $A(x, r) = 2[(2x)(2x) - \pi r^2] = 2(4x^2 - \pi r^2)$.
2. Das nachfolgende Bild zeigt die betrachtete Geometrie.



Geometrie der Scheibe

$$2x \rightarrow 2(x + dx); r \rightarrow r + dr$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} A + dA &= 2 \left\{ [2(x + dx)]^2 - \pi(r + dr)^2 \right\} \\ &= 2 \left(4x^2 + 8xdx + 4dx^2 - \pi r^2 - 2\pi r dr - \pi dr^2 \right) \\ &= 2 \left(4x^2 + 8xdx - \pi r^2 - 2\pi r dr \right). \end{aligned}$$

Wegstreichen der Terme höherer Ordnung liefert:

$$\begin{aligned} dA &= (A + dA) - A \\ &= 2 \left(4x^2 + 8xdx - \pi r^2 - 2\pi r dr - 4x^2 + \pi r^2 \right) \\ &= 2(8xdx - 2\pi r dr). \end{aligned}$$

$$3. dA(x, r) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_r dx + \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)_x dr = 2(8xdx - 2\pi r dr).$$

$$4. A(x_0, r_0) = 2(4x_0^2 - \pi r_0^2), A(x, r) = 2(4x^2 - \pi r^2)$$

mit $x = \lambda x_0$ und $r = \lambda r_0$ folgt:

$$A(x, r) = 2[4(\lambda x_0)^2 - \pi(\lambda r_0)^2].$$

Damit ergibt sich:

$$A(x, r) - A(x_0, r_0) = (\lambda^2 - 1) A(x_0, r_0).$$

$$5. \Delta A(x, r) = 2(8x_0 \Delta x - 2\pi r_0 \Delta r)$$

mit $\Delta x = x - x_0 = (\lambda - 1)x_0$ und $\Delta r = r - r_0 = (\lambda - 1)r_0$ folgt:

$$\begin{aligned} \Delta A(x, r) &= 2 \left[8x_0^2 (\lambda - 1) - 2\pi r_0^2 (\lambda - 1) \right] \\ &= 2(\lambda - 1) (8x_0^2 - 2\pi r_0^2) = 2(\lambda - 1) A(x_0, r_0). \end{aligned}$$

Fehler:

$$\begin{aligned} f &= \frac{[A(x, r) - A(x_0, r_0)] - \Delta A(x, r)}{[A(x, r) - A(x_0, r_0)]} \\ &= \frac{(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda - 1)}{(\lambda^2 - 1)} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \end{aligned}$$

mit $A(x_0 = 10 \text{ cm}, r_0 = 5 \text{ cm}) = 642,92 \text{ cm}^2$ folgt:

| λ | $(A - A_0) / (\text{cm}^2)$ | $\Delta A / (\text{cm}^2)$ | f |
|-----------|-----------------------------|----------------------------|-----------|
| 1,001 | 1,28648366 | 1,28584073 | 0,04998 % |
| 1,01 | 12,9226994 | 12,8584073 | 0,49751 % |
| 1,1 | 135,013277 | 128,584073 | 4,76190 % |