

Aus Kapitel 39

Aufgaben

39.1 • Ein Übertragungsglied sei beschrieben durch die Differenzialgleichung

$$3\ddot{y}(t) + 12\dot{y}(t) + 12y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t).$$

Das Eingangssignal sei $u(t) = e^{-2t}$, alle Anfangswerte seien null. Ermitteln Sie die Lösung $y(t)$ mithilfe der Laplace-Transformation und berechnen Sie mithilfe des Endwertsatzes der Laplace-Transformation den Endwert des Ausgangssignals $y(t \rightarrow \infty)$. Geben Sie die komplexe Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems an.

Resultat:

$$y(t) = \frac{1}{3}te^{-2t}.$$

Der Endwert des Ausgangssignals lautet 0.

Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu $G(s) = \frac{1}{3(s+2)}$.

Ausführliche Lösung:

$$3\ddot{y}(t) + 12\dot{y}(t) + 12y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\circ \bullet 3[s^2Y(s) - sy(-0) - \dot{y}(-0)] + 12[sY(s) - y(-0)] + 12Y(s) = sU(s) - u(-0) + 2U(s).$$

Ausklammern und Anfangswerte zu null setzen:

$$3Y(s)(s^2 + 4s + 4) = U(s)(s + 2),$$

$$Y(s) = \frac{1}{3(s+2)}U(s). \quad (*)$$

$u(t) = e^{-2t} \circ \bullet U(s) = \frac{1}{(s+2)}$ wird eingesetzt:

$$Y(s) = \frac{1}{3(s+2)^2}$$

$$\bullet \circ y(t) = \frac{1}{3}te^{-2t}.$$

Der Endwert von $y(t)$ ergibt sich zu:

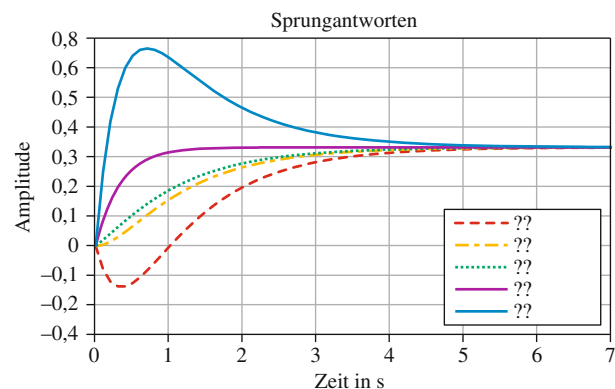
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{3(s+2)^2} = 0.$$

Aus (*) liest man die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{3(s+2)}$ ab.

39.2 ••• Ein System sei durch folgende Differenzialgleichung charakterisiert:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_1\dot{u} + b_0u.$$

1. Wie lautet die Übertragungsfunktion $G(s)$ zwischen der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$?
2. Bestimmen Sie den Endwert des Ausgangssignals $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ für das sprunghöhenförmige Eingangssignal $u(t) = \sigma(t)$ mit dem Endwertsatz der Laplace-Transformation. Unter welcher Voraussetzung ist das Ergebnis gültig?
3. Bestimmen Sie $\lim_{t \rightarrow 0} y(t)$ mit dem Anfangswertsatz der Laplace-Transformation für das Eingangssignal $u(t) = \delta(t)$.
4. Bestimmen Sie für die Parameterwerte $a_1 = 4$ und $a_0 = 3$ die Systempole nach (39.156). Ist das System asymptotisch stabil?
5. Wie lautet die Impulsantwort $g(t)$ des Systems, wenn man außerdem die Parameterwerte $b_1 = b_0 = 1$ einsetzt? Geben Sie die Sprungantwort $h(t)$ des Systems an.
6. Ist das System mit den gegebenen Parameterwerten übertragungsstabil?
7. Ordnen Sie die Sprungantworten nach Abb. 39.2 dem jeweiligen Wert für b_1 zu: $b_1 = -1$, $b_1 = 0$, $b_1 = 0,2$, $b_1 = 1$, $b_1 = 3$ (dabei ist wiederum $a_1 = 4$, $a_0 = 3$ und $b_0 = 1$).



Sprungantworten bei unterschiedlicher Lage der Nullstelle

Resultat:

1. $G(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$.
2. Unter Annahme von Übertragungsstabilität ist der Endwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{b_0}{a_0}$.
3. $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = b_1$.

4. Das System ist asymptotisch stabil.
5. $g(t) = e^{-3t}$ und $h(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})$.
6. Das System ist übertragungsstabil.
7. Zu den Sprungantworten gehören von oben (hellblau) nach unten (rot) die folgenden Werte von b_1 : 3; 1; 0,2; 0; -1.

Ausführliche Lösung:

1. Laplace-Transformation der Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y &= b_1\dot{u} + b_0u \\ \circ \bullet s^2Y(s) - sy(-0) - \dot{y}(-0) \\ &+ a_1[sY(s) - y(-0)] + a_0Y(s) \\ &= b_1[sU(s) - u(-0)] + b_0U(s). \end{aligned}$$

Zur Ermittlung der Übertragungsfunktion alle Anfangswerte zu null annehmen:

$$\rightarrow s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_0Y(s) = b_1sU(s) + b_0U(s).$$

Die Übertragungsfunktion beschreibt das Verhalten zwischen Eingang und Ausgang:

$$Y(s) = G(s)U(s) \rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}.$$

2. Um $y(t)$ für $t \rightarrow \infty$ für das Eingangssignal $u(t) = \sigma(t) \circ \bullet U(s) = \frac{1}{s}$ zu ermitteln, wenden wir den Endwertsatz der Laplace-Transformation an:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{b_0}{a_0}. \end{aligned}$$

Das über den Endwertsatz berechnete Ergebnis ist nur gültig, wenn der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existiert. Die

Systemantwort darf also weder gegen $(\pm)\infty$ streben (bestimmt divergent) noch unbestimmt divergent sein, also beispielsweise einen Dauerschwingungsanteil aufweisen. Wenn das System übertragungsstabil ist und das Eingangssignal für $t \rightarrow \infty$ gegen einen festen Wert strebt, wird diese Voraussetzung erfüllt sein.

3. Um $y(t)$ für $t \rightarrow 0$ für das Eingangssignal $u(t) = \delta(t) \circ \bullet U(s) = 1$ zu ermitteln, verwenden wir den Anfangswertsatz der Laplace Transformation:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} y(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)U(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_1s^2 + b_0s}{s^2 + a_1s + a_0} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \frac{b_0}{s}}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_0}{s^2}} = b_1. \end{aligned}$$

Der Anfangswert der Impulsantwort ist die Anfangssteigung der Sprungantwort (siehe Aufgabenteil e). Für $b_1 = 0$ sieht man, dass diese Anfangssteigung beim PT2-Glied immer null ist.

4. Asymptotische Stabilität: Die Systempole ergeben sich als Lösungen von $s^2 + 4s + 3 = 0$, also:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = -2 \pm 1 \\ \rightarrow p_1 &= -1, \quad p_2 = -3. \end{aligned}$$

Beide Systempole liegen in der linken komplexen Halbebene. Das System ist asymptotisch stabil. (Für die hier vorgegebenen Zahlenwerte von a_1 und a_0 ist somit das Ergebnis von Aufgabenteil 2 gültig)

5. Impulsantwort des Systems (für $b_1 = b_0 = 1$ und $a_1 = 4, a_0 = 3$):

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+3} \quad \bullet \circ g(t) = e^{-3t}$$

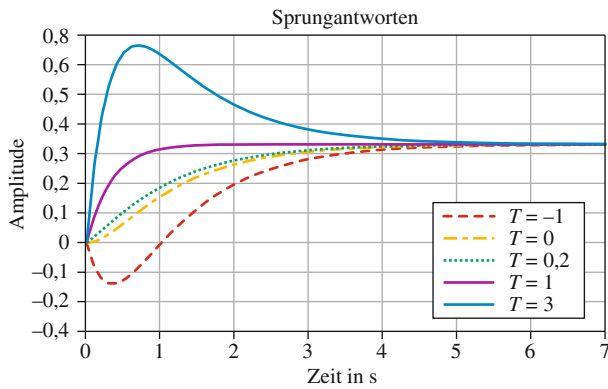
Die Sprungantwort ergibt sich durch Integration der Impulsantwort:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-3\tau} d\tau = \left[-\frac{1}{3}e^{-3\tau} \right]_{\tau=0}^t \\ &= -\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \end{aligned}$$

oder durch Multiplikation der Übertragungsfunktion mit dem Eingangssignal, also der Sprungfunktion, im Frequenzbereich und anschließender Rücktransformation:

$$\begin{aligned} H(s) &= G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3} \frac{3}{s(s+3)} \\ \bullet \circ h(t) &= \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}). \end{aligned}$$

6. Übertragungsstabilität: Da beim betrachteten R-Glied die Sprungantwort gegen einen festen Wert läuft, nämlich $\frac{1}{3}$, siehe 5, gilt hier Übertragungsstabilität. Alternativ kann man argumentieren, dass aus der in 4 gezeigten asymptotischen Stabilität sofort Übertragungsstabilität folgt.
7. Nullstelleneffekte: In der Abbildung sind die Sprungantworten den zugehörigen Werten von $T = b_1$ zugeordnet. Die in der rechten komplexen Halbebene gelegene Nullstelle verursacht ein Unterschwingen der Sprungantwort, d.h., der Systemausgang läuft zunächst in die „falsche Richtung“ los. Eine links und dabei nahe null gelegene Nullstelle bewirkt ein deutliches Überschwingen der Sprungantwort. Für $b_1 = 0$ stellt sich reines PT2-Verhalten ein.



Sprungantworten bei unterschiedlicher Lage der Nullstelle

39.3 • Folgendes Zustandsraummodell wurde bei einer Modellierung der Kurzzeitdynamik eines Flugzeuges hergeleitet:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1,5 & 0,75 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0,2 \\ 10 \end{pmatrix}}_b, \quad y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{c^T} x$$

Untersuchen Sie das System auf Stabilität und berechnen Sie die Übertragungsfunktion!

Hinweis: Verwenden Sie Kriterium 2a der asymptotischen Stabilität.

Resultat: Das System ist instabil. Die komplexe Übertragungsfunktion $G(s)$ lautet:

$$G(s) = \frac{0,2s + 7,7}{s^2 + 2,5s - 1,5}.$$

Ausführliche Lösung: Stabilitätsuntersuchung:

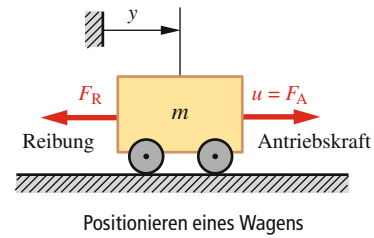
$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= 0 \\ s^2 + 2,5s - 1,5 &= 0 \\ \Rightarrow p_1 &= -3, \quad p_2 = 0,5. \end{aligned}$$

Das System ist also instabil.

Berechnung der Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} G(s) &= c^T (sI - A)^{-1} b \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} s+1,5 & -0,75 \\ -4 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 0) \frac{1}{s^2 + 2,5s - 1,5} \begin{pmatrix} s+1 & 0,75 \\ 4 & s+1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 2,5s - 1,5} (s+1 \ 0,75) \begin{pmatrix} 0,2 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{0,2s + 7,7}{s^2 + 2,5s - 1,5}. \end{aligned}$$

39.4 •• Ein in der Regelungstechnik häufig auftretendes Problem ist die Positionsregelung. Die Abbildungen des Wagens und der Festplatte zeigen zwei Beispiele.



Positionieren eines Wagens



Positionieren des Schreib-Lesekopfes eines Festplatten-Laufwerks

Für die folgenden Aufgaben wird der Wagen betrachtet, in ähnlicher Weise könnte man diese auch für das Festplatten-Laufwerk durchführen.

Der Wagen der Masse m werde durch eine Antriebskraft F_A (Stellgröße u) beschleunigt, wobei eine geschwindigkeitsproportionale Reibkraft $F_R = c_R \dot{y}$ entgegenwirkt. Regelgröße sei der Ort y des Wagens.

Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung des Systems auf und geben Sie die komplexe Übertragungsfunktion an.

Hinweis: Die Summe der angreifenden Kräfte ist gleich $m\ddot{y}$.

Resultat:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -F_R + F_A = -c_R \dot{y} + u. \\ G(s) &= \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + s \frac{c_R}{m}}. \end{aligned}$$

Ausführliche Lösung:

$$\begin{aligned}
 \circ \bullet \quad s^2 Y(s) &= -\frac{c_R}{m} s Y(s) + \frac{1}{m} U(s), \\
 s^2 Y(s) + \frac{c_R}{m} s Y(s) &= \frac{1}{m} U(s), \quad (**) \\
 Y(s) \left(s^2 + \frac{c_R}{m} s \right) &= \frac{1}{m} U(s), \\
 Y(s) &= \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + s \frac{c_R}{m}} U(s)
 \end{aligned}$$

39.5 • Jemand schlägt eine Regelung des gerade betrachteten Positioniersystems vor, bei der die Stellgröße u durch proportionale Verstärkung der Regelabweichung $e = w - y$ berechnet wird, also:

$$u = K_R(w - y). \quad (***)$$

Bestimmen Sie die komplexe Übertragungsfunktion $\tilde{G}(s)$, die im so geregelten System den Zusammenhang $Y(s) = \tilde{G}(s)W(s)$ zwischen Führungs- und Regelgröße beschreibt.

Hinweis: Unterziehen Sie die Gleichung der Laplace-Transformation und setzen Sie ein.

Resultat:

$$\tilde{G}(s) = \frac{\frac{K_R}{m}}{s^2 + \frac{c_R}{m}s + \frac{K_R}{m}}.$$

Ausführliche Lösung: Laplace-Transformation von (***) liefert $U(s) = K_R[W(s) - Y(s)]$; dies wird in (**) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 s^2 Y(s) + \frac{c_R}{m} s Y(s) &= \frac{1}{m} K_R W(s) - \frac{1}{m} K_R Y(s) \\
 \rightarrow Y(s) \left(s^2 + \frac{c_R}{m} s + \frac{K_R}{m} \right) &= \frac{K_R}{m} W(s) \\
 \rightarrow Y(s) &= \underbrace{\frac{\frac{K_R}{m}}{s^2 + \frac{c_R}{m}s + \frac{K_R}{m}}}_{\tilde{G}(s)} W(s)
 \end{aligned}$$

39.6 • Für spezielle Werte der Parameter m, c_R, K_R (deren Einheiten wir der Übersichtlichkeit halber weglassen) erhält man in der vorherigen Aufgabe:

$$\tilde{G}(s) = \frac{25}{s^2 + 10s + 25}.$$

Berechnen Sie die Pole und beurteilen Sie die Stabilität des Systems.

Hinweis: Zur Beurteilung der Stabilität des hier vorliegenden *geregelten* Systems können Sie das bekannte Kriterium der Übertragungsstabilität verwenden.

Resultat:

$$p_1 = -5, \quad p_2 = -5.$$

Das System ist also stabil.

Ausführliche Lösung:

$$\begin{aligned}
 s^2 + 10s + 25 &= 0, \\
 (s + 5)(s + 5) &= 0, \\
 \Rightarrow p_1 = -5, \quad p_2 &= -5.
 \end{aligned}$$

39.7 • Berechnen Sie die Impulsantwort $g(t)$ und die Sprungantwort $h(t)$ des Systems aus Aufgabe 39.6.

Hinweis: $\dot{h}(t) = g(t)$.

Resultat:

$$g(t) = 25te^{-5t}, \quad h(t) = 1 - e^{-5t} - 5te^{-5t}.$$

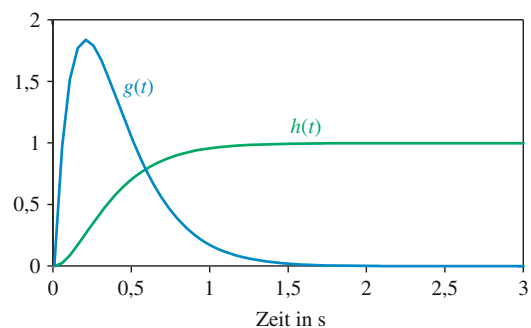
Ausführliche Lösung: Die Impulsantwort kann durch Laplace-Rücktransformation sofort ermittelt werden:

$$\tilde{G}(s) = \frac{25}{(s+5)^2} \quad \bullet \circ \quad g(t) = 25te^{-5t}.$$

Die Sprungantwort ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{25}{s^2 + 10s + 25} \cdot \frac{1}{s} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+5} - \frac{1}{(s+5)^2} \\
 \bullet \circ \quad h(t) &= 1 - e^{-5t} - 5te^{-5t}.
 \end{aligned}$$

In folgender Abbildung sind die Zeitverläufe beider Ergebnisse zu sehen.



39.8 • Ermitteln Sie rechnerisch den Anfangs- und den Endwert der Sprungantwort des Systems aus Aufgabe 39.6.

Hinweis: Es gibt zwei naheliegende Lösungswege.

Resultat:

$$h(t \rightarrow 0^+) = 0, \quad h(t \rightarrow \infty) = 1.$$

Ausführliche Lösung: Der Anfangswert der Sprungantwort, also $h(t \rightarrow 0^+)$, kann mithilfe des Anfangswertsatzes der Laplace-Transformation ermittelt werden:

$$h(t \rightarrow 0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[sG(s) \frac{1}{s} \right] = G(s \rightarrow \infty) = 0$$

oder durch Auswerten der oben ermittelten Funktion $h(t)$:

$$h(t \rightarrow 0^+) = 1 - 1 - 0 = 0.$$

Der Endwert der Sprungantwort, also $h(t \rightarrow \infty)$, kann mithilfe des Endwertsatzes der Laplace-Transformation ermittelt werden:

$$h(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[sG(s) \frac{1}{s} \right] = G(0) = \frac{25}{25} = 1$$

oder durch

$$h(t \rightarrow \infty) = 1 - 0 - 0 = 1.$$

39.9 •• Betrachtet wird das Lager aus Abb. 38.30 mit dem Zustandsraummodell aus Aufgabe 38.8, allerdings mit der Ausgangsgröße $y = x_1$. Für spezielle Werte der Parameter m , C und D ergibt sich die Zustandsdarstellung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_b F$$

$$\underbrace{y}_{c^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{c^T} \mathbf{x},$$

die wir dimensionslos, d. h. ohne Berücksichtigung der physikalischen Einheiten behandeln. Das Eingangssignal sei $F(t) = \delta(t)$ und der Anfangszustand sei $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{0}$. Wenden Sie auf das obige System die Formeln (39.105) zur direkten Berechnung von $\mathbf{X}(s)$ und $Y(s)$ an und ermitteln Sie die Lösung $y(t)$ durch Laplace-Rücktransformation. Berechnen Sie weiterhin die Übertragungsfunktion $G(s)$ direkt aus der Zustandsdarstellung.

Hinweis: Berechnung der Adjunkte einer 2×2 Matrix:

$$\text{adj} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Resultat: Lösung für $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} \sin(3t).$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}.$$

Ausführliche Lösung: Berechnung von $\mathbf{X}(s)$ und $Y(s)$ mit den Formeln

$$\mathbf{X}(s) = \underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U(s)}_{\text{Anregungsterm}} + \underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0)}_{\text{Anfangswertterm}},$$

$$Y(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U(s) + \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0).$$

Inverse berechnen:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

$$= \frac{1}{\det \begin{pmatrix} s & -1 \\ 10 & s+2 \end{pmatrix}} \text{adj} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 10 & s+2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 2s + 10} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ -10 & s \end{pmatrix}.$$

Folglich wird:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1 + 0 = \frac{1}{s^2 + 2s + 10} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix},$$

$$Y(s) = \mathbf{c}^T \mathbf{X}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 2s + 10} = \frac{1}{3} \frac{3}{(s+1)^2 + 3^2} := \frac{1}{3} \frac{\omega}{(s+\delta)^2 + \omega^2}.$$

Rücktransformation:

$$\bullet \circ y(t) = \frac{1}{3} e^{-\delta t} \sin(\omega t) = \frac{1}{3} e^{-t} \sin(3t)$$

Folglich lautet die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}.$$