

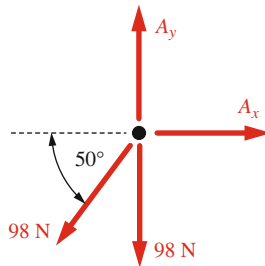
Aus Kapitel 2

Aufgaben

2.1 • Berechnen Sie die in Abb. 2.6 auftretenden Lagerkräfte. Mit welcher Kraft ist die Rolle an der Decke befestigt, wenn die Person in einem Winkel von $\alpha = 50^\circ$ zur Horizontalen am Seil zieht?

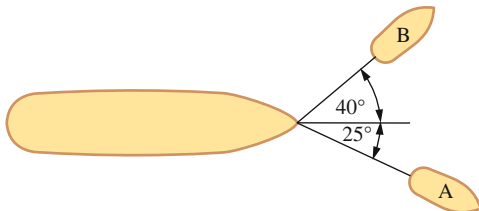
Resultat: $A_x = 63 \text{ N}$, $A_y = 173 \text{ N}$.

Ausführliche Lösung: Freikörperbild Rolle:



$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_{ix} &= A_x - 98 \text{ N} \cdot \cos 50^\circ = 0 \implies A_x = 63 \text{ N} , \\ \uparrow \sum F_{iy} &= A_y - 98 \text{ N} \cdot \sin 50^\circ = 0 \implies A_y = 173 \text{ N} . \end{aligned}$$

2.2 • Ein Frachtschiff wird von zwei Hafenschleppern (A und B) abgeschleppt. Die Seilkräfte betragen $F_A = 32 \text{ kN}$ im Seil zu Schlepper A und $F_B = 21 \text{ kN}$ im Seil zu Schlepper B.



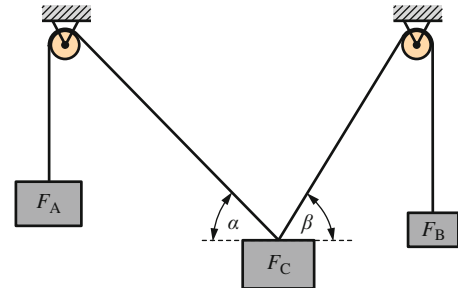
Berechnen Sie die auf das Frachtschiff wirkende resultierende Abschleppkraft.

Resultat: $R_x = 45,1 \text{ kN}$, $R_y = 0 \text{ kN}$.

Ausführliche Lösung:

$$\begin{aligned} R_x &= 21 \text{ kN} \cos 40^\circ + 32 \text{ kN} \cos 25^\circ = 45,1 \text{ kN} , \\ R_y &= 21 \text{ kN} \sin 40^\circ - 32 \text{ kN} \sin 25^\circ = 0 \text{ kN} . \end{aligned}$$

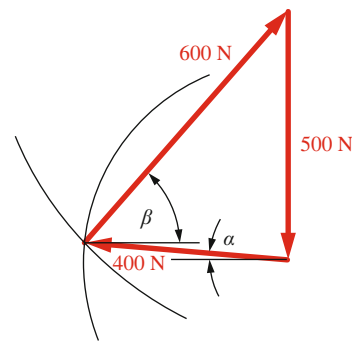
2.3 •• Ein Seil ist über zwei reibungsfrei drehbar gelagerte Rollen A und B geführt. An den Enden des Seils hängen die Gewichte $F_A = 400 \text{ N}$ und $F_B = 600 \text{ N}$, zwischen den Rollen das Gewicht $F_C = 500 \text{ N}$. Das Eigengewicht des Seils sei vernachlässigbar.



Bestimmen Sie die Winkel α und β (a) grafisch und (b) rechnerisch.

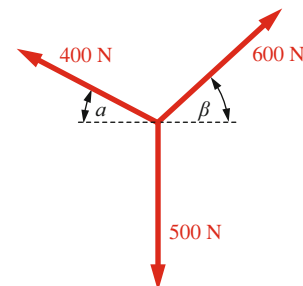
Resultat: $\alpha = 7,18^\circ$, $\beta = 48,59^\circ$.

Ausführliche Lösung: Grafische Lösung:



Rechnerische Lösung:

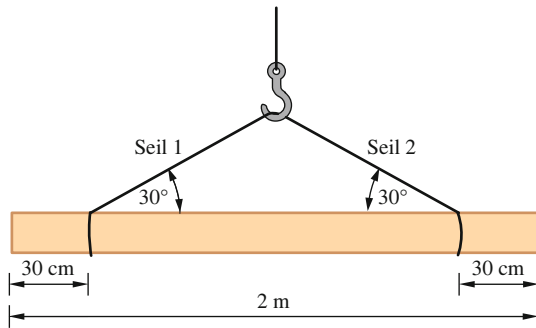
Freikörperbild:



$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_{ix} &= -400 \text{ N} \cos \alpha + 600 \text{ N} \cos \beta = 0 , \\ \uparrow \sum F_{iy} &= 400 \text{ N} \sin \alpha + 600 \text{ N} \sin \beta - 500 \text{ N} = 0 . \end{aligned}$$

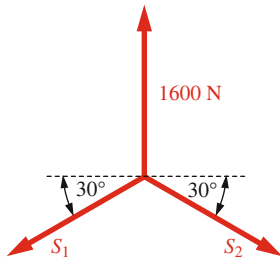
Jetzt beide Gleichungen kürzen, quadrieren, miteinander addieren und für α und β jeweils $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ anwenden.

2.4 • Ein 1600 N schwerer Stahlträger wird wie skizziert über zwei Seile mit einem Kran angehoben. Berechnen Sie die Seilkräfte.



Resultat: $S_1 = S_2 = 1600 \text{ N}$.

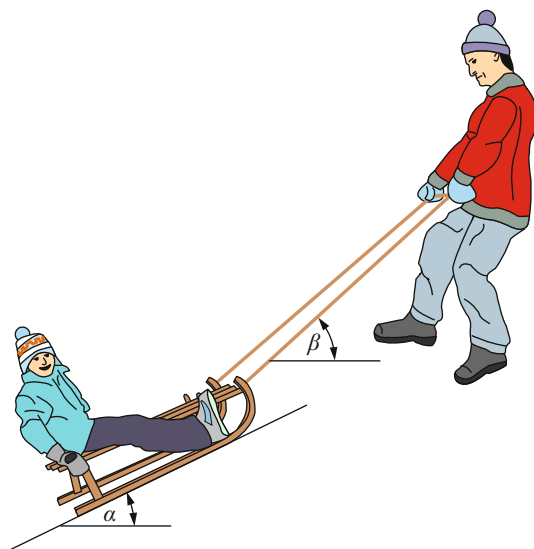
Ausführliche Lösung: Freikörperbild:



$$\rightarrow \sum F_{ix} = -S_1 \cos 30^\circ + S_2 \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow S_1 = S_2,$$

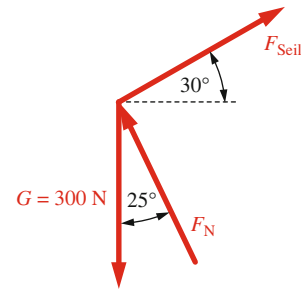
$$\uparrow \sum F_{iy} = 1600 \text{ N} - 2S_1 \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow S_1 = 1600 \text{ N}.$$

2.5 • Beim Rodeln müssen Sie einen Schlitten mit Kind den Berg hinaufziehen. Welche Kraft ist hierfür erforderlich? Zahlenwerte: Gewichtskraft von Schlitten und Kind: 300 N, $\alpha = 25^\circ$, $\beta = 30^\circ$.



Resultat: 127 N.

Ausführliche Lösung: Freikörperbild Schlitten:

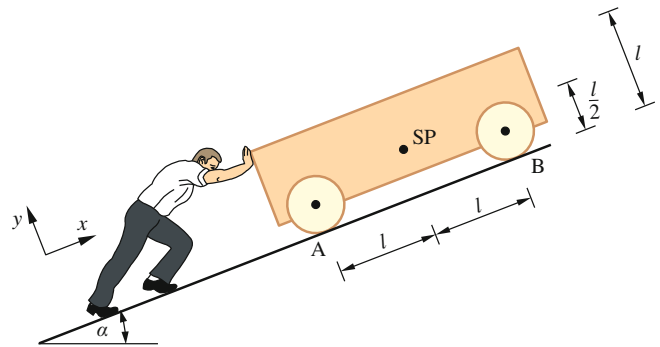


$$\rightarrow \sum F_{ix} = F_N \sin 25^\circ + F_{\text{Seil}} \cos 30^\circ = 0,$$

$$\uparrow \sum F_{iy} = -300 \text{ N} + F_N \cos 25^\circ + F_{\text{Seil}} \sin 30^\circ = 0.$$

Obere Gleichung in untere einsetzen führt zu $F_{\text{Seil}} = 127 \text{ N}$.

2.6 •• Sie schieben einen Wagen der bekannten Gewichtskraft G einen Berghang hinauf.

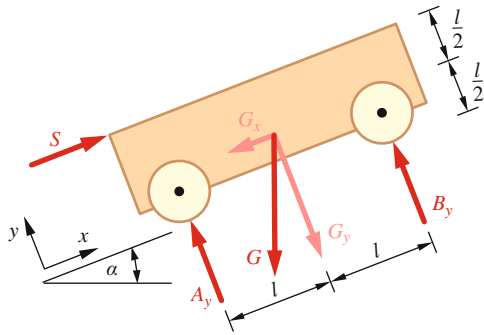


1. Berechnen Sie die Achslasten A_y und B_y sowie die Schubkraft S in Abhängigkeit des Winkels α und des Wagengewichts G .
2. Welchen Hangwinkel können Sie den Wagen gerade eben noch hinaufschieben, wenn das Wagengewicht 500 N beträgt und Sie nicht stärker als $S = 300 \text{ N}$ schieben wollen?

Nehmen Sie an, dass die Schubkraft S in der Höhe l über dem Boden angreift und in x -Richtung wirkt, dass die Gewichtskraft G des Wagens im um $l/2$ über dem Boden liegenden Schwerpunkt SP angreift und dass Reibung vernachlässigt werden kann. Beachten Sie, dass das Koordinatensystem entlang der Hangschräge orientiert ist.

Resultat:

1. $A_y = \frac{G}{4}(2 \cos \alpha - \sin \alpha)$, $B_y = \frac{G}{4}(\sin \alpha + 2 \cos \alpha)$,
 $S = G \sin \alpha$.
2. $\alpha_{\max} = 37^\circ$.

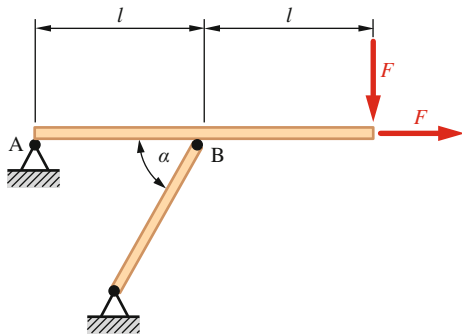
Ausführliche Lösung: Freikörperbild Wagen:


1. Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_i^{(S-A_y)} &= -G \sin \alpha \cdot \frac{l}{2} - G \cos \alpha \cdot l + B_y \cdot 2l = 0 \\ \Rightarrow B_y &= \frac{G}{4} (\sin \alpha + 2 \cos \alpha), \\ \rightarrow \sum F_{ix} &= S - G \sin \alpha = 0 \Rightarrow S = G \sin \alpha, \\ \uparrow \sum F_{iy} &= A_y + B_y - G \cos \alpha = 0 \\ \Rightarrow A_y &= \frac{G}{4} (2 \cos \alpha - \sin \alpha). \end{aligned}$$

2. Das Auflösen der Gleichgewichtsbedingung in x -Richtung nach α und das Einsetzen von $G = 500 \text{ N}$ und $S = 300 \text{ N}$ führt zu $\alpha_{\max} = \arcsin \frac{3}{5} = 37^\circ$.

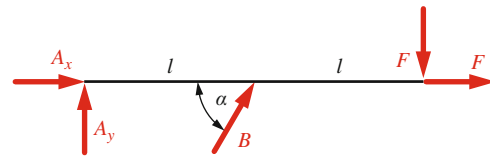
2.7 • Ein Träger der Länge $2l$ ist im Punkt A zweiwertig und im Punkt B mit einer Pendelstütze gelagert. Belastet wird er durch zwei Kräfte des Betrags F .



1. Ist der Träger statisch bestimmt gelagert?
2. Berechnen Sie die Lagerreaktionen in den Punkten A und B.

Resultat: $A_x = -F - \frac{2F}{\tan \alpha}$, $A_y = -F$, $B = \frac{2F}{\sin \alpha}$.

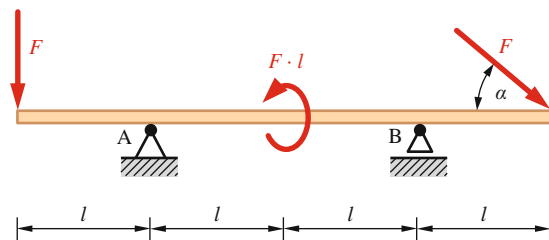
Ausführliche Lösung: Freikörperbild Träger:



Gleichgewichtsbedingungen und Ergebnisse:

$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_i^{(B)} &= -A_y l - F l = 0 \Rightarrow A_y = -F \\ \uparrow \sum F_{iy} &= A_y + B \sin \alpha - F = 0, \\ \Rightarrow B &= \frac{F - A_y}{\sin \alpha} = \frac{2F}{\sin \alpha}, \\ \rightarrow \sum F_{ix} &= A_x + B \cos \alpha + F = 0 \\ \Rightarrow A_x &= -F - B \cos \alpha = -F - \frac{2F}{\tan \alpha}. \end{aligned}$$

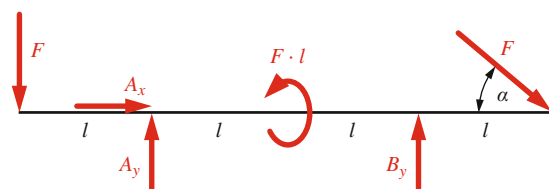
2.8 • Der skizzierte, in den Punkten A und B in Fest- und Loslagerung gelagerte Träger wird durch zwei Kräfte des Betrags F und ein Moment des Betrags $F l$ belastet.



Berechnen Sie die Lagerreaktionen.

Resultat: $A_x = -F \cos \alpha$, $A_y = 2F - \frac{1}{2}F \sin \alpha$, $B_y = 1,5F \sin \alpha - F$.

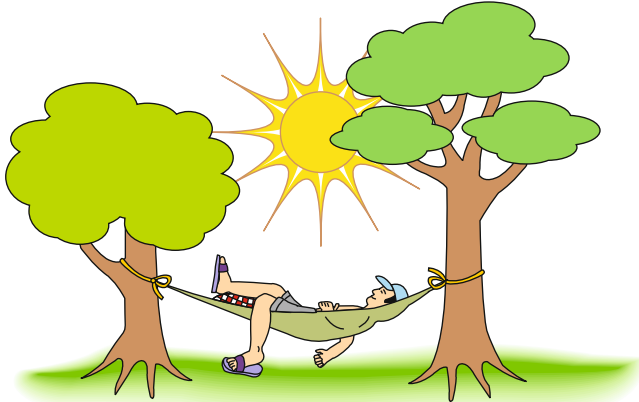
Ausführliche Lösung: Freikörperbild Träger:



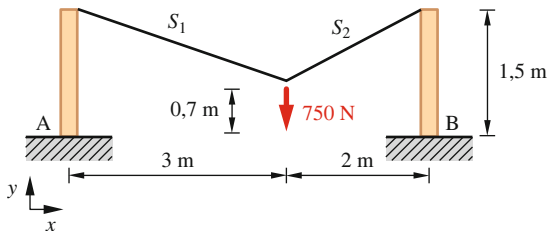
Gleichgewichtsbedingungen und Ergebnisse:

$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_i^{(A)} &= F l + F l + B_y \cdot 2l - F \cdot 3l \sin \alpha = 0 \\ \Rightarrow B_y &= 1,5F \sin \alpha - F, \\ \rightarrow \sum F_{ix} &= A_x + F \cos \alpha = 0 \Rightarrow A_x = -F \cos \alpha, \\ \uparrow \sum F_{iy} &= -F + A_y + B_y - F \sin \alpha = 0 \\ \Rightarrow A_y &= 2F - \frac{1}{2}F \sin \alpha. \end{aligned}$$

2.9 • Es ist Frühsommer, die Sonne scheint und Sie verbringen den Nachmittag lieber in der Hängematte als im Hörsaal. Bevor Sie die Müdigkeit vollends übermannt, versuchen Sie, die Kräfte in den beiden Halteseilen der Matte sowie die durch die Hängematte verursachten Lagerreaktionen im Wurzelwerk der Bäume zu berechnen.



Die geometrischen Abmessungen entnehmen Sie bitte der folgenden (nicht maßstäblichen) Skizze:

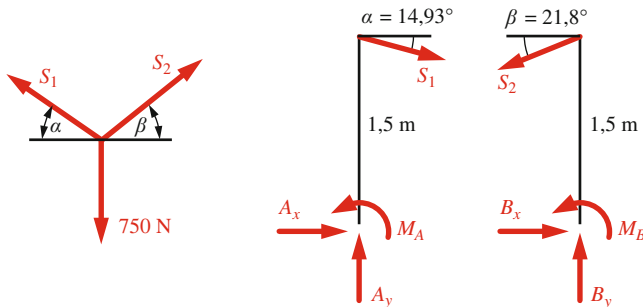


1. Ermitteln Sie die Seilkräfte S_1 und S_2 rechnerisch.
2. Ermitteln Sie die Seilkräfte S_1 und S_2 zeichnerisch. Verwenden Sie für Ihre Zeichnung den Kräftemaßstab $m_F = 1 \text{ cm}/100 \text{ N}$.
3. Berechnen Sie die durch die Hängematte verursachten Lagerreaktionen im Wurzelwerk der Bäume.

Resultat: 1: $S_1 = 1164 \text{ N}$, $S_2 = 1212 \text{ N}$

2. und 3: $A_x = -1125 \text{ N}$, $A_y = 300 \text{ N}$, $M_A = 1687 \text{ N m}$, $B_x = 1125 \text{ N}$, $B_y = 450 \text{ N}$, $M_B = -1687 \text{ N m}$.

Ausführliche Lösung: Freikörperbilder von Hängematte und Baumstämmen:



Zunächst die Gleichgewichtsbedingungen und Ergebnisse der Seilkräfteberechnung:

$$\rightarrow \sum F_{ix} = -S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot S_1 = 1,041 S_1,$$

$$\uparrow \sum F_{iy} = S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \beta - 750 \text{ N} = 0$$

mit den Ergebnissen $S_1 = 1164 \text{ N}$ und $S_2 = 1212 \text{ N}$.

Gleichgewichtsbedingungen und Ergebnisse der Lagerreaktionen: Linker Baumstamm:

$$\circlearrowleft \sum M_i^{(A)} = M_A - S_1 \cdot 1,5 \text{ m} \cos \alpha = 0,$$

$$\rightarrow \sum F_{ix} = A_x + S_1 \cos \alpha = 0,$$

$$\uparrow \sum F_{iy} = A_y - S_1 \sin \alpha = 0.$$

Rechter Baumstamm:

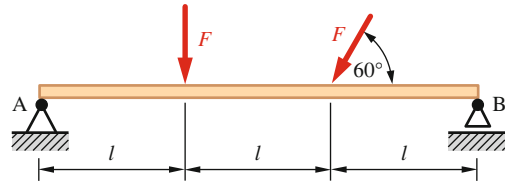
$$\circlearrowleft \sum M_i^{(B)} = M_B + S_2 \cdot 1,5 \text{ m} \cos \beta = 0,$$

$$\rightarrow \sum F_{ix} = B_x - S_2 \cos \beta = 0,$$

$$\uparrow \sum F_{iy} = B_y - S_2 \sin \beta = 0.$$

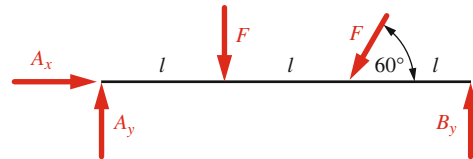
mit den Ergebnissen $A_x = -1125 \text{ N}$, $A_y = 300 \text{ N}$, $M_A = 1687 \text{ N m}$ sowie $B_x = 1125 \text{ N}$, $B_y = 450 \text{ N}$, $M_B = -1687 \text{ N m}$.

2.10 •• Berechnen Sie die Lagerreaktionen des skizzierten Trägers.



Resultat: $A_x = \frac{F}{2}$, $A_y = 0,96 F$, $B_y = 0,91 F$.

Ausführliche Lösung: Freikörperbild:



$$\circlearrowleft \sum M_i^{(A)} = -F \cdot l - F \cdot 2l \sin 60^\circ + B_y \cdot 3l = 0$$

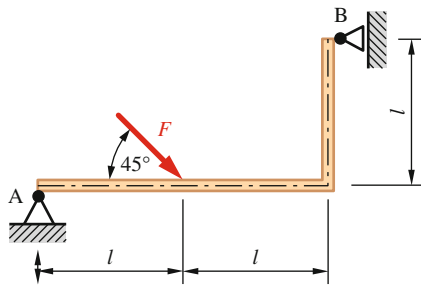
$$\Rightarrow B_y = \frac{F}{3} (1 + 2 \sin 60^\circ) = 0,91 F,$$

$$\rightarrow \sum F_{ix} = A_x - F \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow A_x = \frac{F}{2},$$

$$\uparrow \sum F_{iy} = A_y - F - F \sin 60^\circ + B_y = 0$$

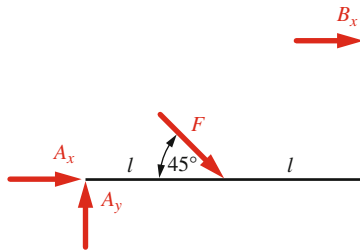
$$\Rightarrow A_y = 0,96 F.$$

2.11 •• Berechnen Sie die Lagerreaktionen des skizzierten Trägers.



Resultat: $A_x = 0$, $A_y = \frac{1}{2}\sqrt{2}F$, $B_x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}F$.

Ausführliche Lösung: Freikörperbild:

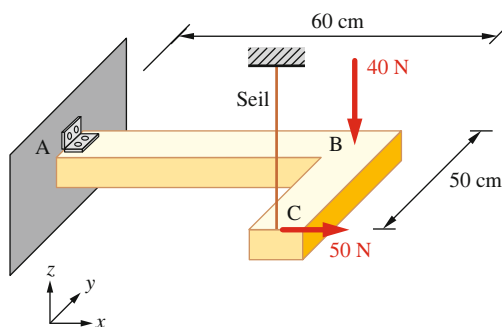


$$\circlearrowleft \sum M_i^{(A)} = -B_x l - \frac{1}{2}\sqrt{2}Fl = 0 \Rightarrow B_x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}F,$$

$$\rightarrow \sum F_{ix} = A_x + B_x + \frac{1}{2}\sqrt{2}F = 0 \Rightarrow A_x = 0,$$

$$\uparrow \sum F_{iy} = A_y - \frac{1}{2}\sqrt{2}F = 0 \Rightarrow A_y = \frac{1}{2}\sqrt{2}F.$$

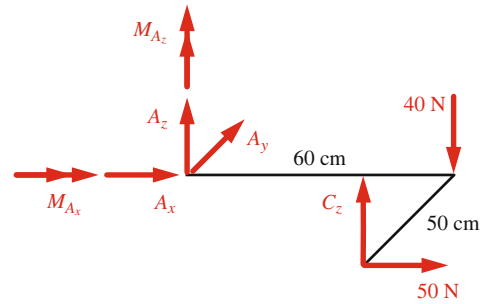
2.12 •• Ein Winkleisen mit vernachlässigbar kleiner Masse ist in den Punkten A und C durch ein Scharnier bzw. ein Seil gelagert, und im Punkt B durch die senkrechte Kraft 40 N belastet.



1. Untersuchen Sie das System auf statische Bestimmtheit.
2. Berechnen Sie die Lagerreaktionen.

Resultat: $A_x = -50 \text{ N}$, $A_y = 0$, $A_z = 0$, $S = 40 \text{ N}$, $M_{Ax} = 20 \text{ Nm}$, $M_{Az} = -25 \text{ Nm}$.

Ausführliche Lösung: Freikörperbild Winkleisen:



Vektoriell Momentengleichgewicht:

$$\begin{aligned} \sum M_i^{(A)} &= \begin{pmatrix} M_{Ax} \\ 0 \\ M_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \text{ cm} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -40 \text{ N} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 60 \text{ cm} \\ -50 \text{ cm} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \text{ N} \\ 0 \\ S \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} M_{Ax} \\ 0 \\ M_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2400 \text{ Ncm} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -S \cdot 50 \text{ cm} \\ -S \cdot 60 \text{ cm} \\ 2500 \text{ Ncm} \end{pmatrix} &= 0, \\ \Rightarrow S = 40 \text{ N}, \quad M_{Ax} = 20 \text{ Nm}, \quad M_{Az} = -25 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

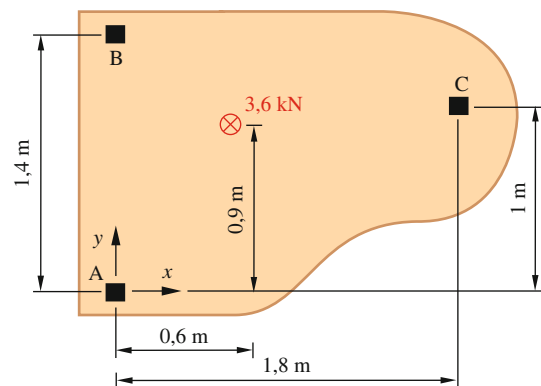
Kräftegleichgewichte:

$$\sum F_{ix} = A_x + 50 \text{ N} = 0 \Rightarrow A_x = -50 \text{ N},$$

$$\sum F_{iy} = A_y = 0,$$

$$\sum F_{iz} = A_z - 40 \text{ N} + S = 0 \Rightarrow A_z = 40 \text{ N} - S = 0.$$

2.13 • Das Gewicht eines Konzertflügels betrage 3,6 kN. Der Flügel steht auf drei Beinen, die sich jeweils reibungsfrei über den Boden rollen lassen. Die genauen Positionen der Beine und des Schwerpunktes entnehmen Sie bitte der folgenden Skizze:

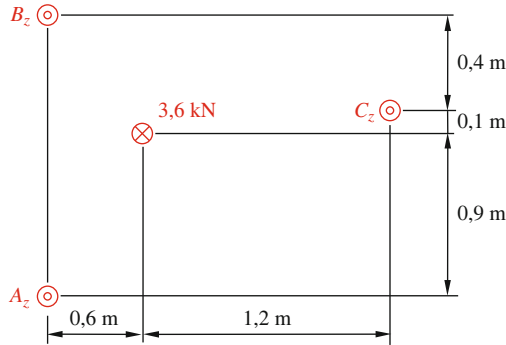


1. Ist der Flügel statisch bestimmt gelagert?
2. Berechnen Sie die Lagerreaktionen.

Resultat: $A_z = 0,94 \text{ kN}$, $B_z = 1,46 \text{ kN}$, $C_z = 1,2 \text{ kN}$.

Ausführliche Lösung:

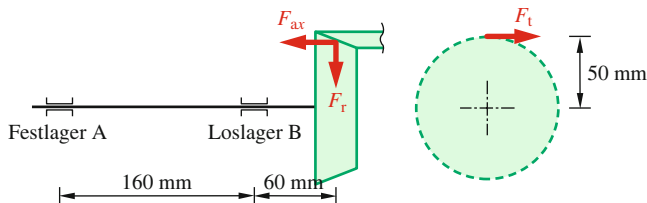
1. Der Flügel ist statisch unterbestimmt gelagert.
2. Freikörperbild Flügel (Draufsicht):



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned}\sum M_{iy}^{(A)} &= 3,6 \text{ kN} \cdot 0,6 \text{ m} - C_z \cdot 1,8 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow C_z &= 1,2 \text{ kN}, \\ \sum M_{ix}^{(A)} &= -3,6 \text{ kN} \cdot 0,9 \text{ m} + C_z \cdot 1 \text{ m} + B_z \cdot 1,4 \text{ m} = 0 \\ \Rightarrow B_z &= 1,46 \text{ kN}, \\ \sum F_{iz} &= A_z + B_z + C_z - 3,6 \text{ kN} = 0 \\ \Rightarrow A_z &= 0,94 \text{ kN}.\end{aligned}$$

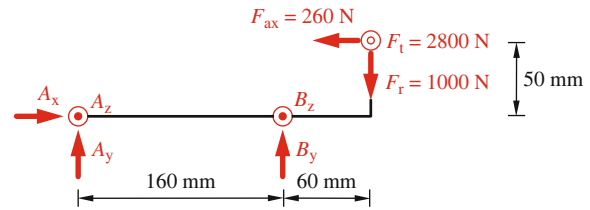
2.14 • An der skizzierten, in den Punkten A und B in Fest-/Loslagerung gelagerten Kegelradwelle greifen die Zahnkräfte $F_{ax} = 260 \text{ N}$ (Axialkraft), $F_r = 1000 \text{ N}$ (Radialkraft) und $F_t = 2800 \text{ N}$ (Tangentialkraft) an.



Berechnen Sie die Lagerreaktionen sowie das übertragene Moment.

Resultat: $A_x = 260 \text{ N}$, $A_y = -294 \text{ N}$, $A_z = 1050 \text{ N}$, $B_y = 1294 \text{ N}$, $B_z = -3850 \text{ N}$, $M_{\text{übertragen}} = 140 \text{ Nm}$.

Ausführliche Lösung: Freikörperbild Welle:

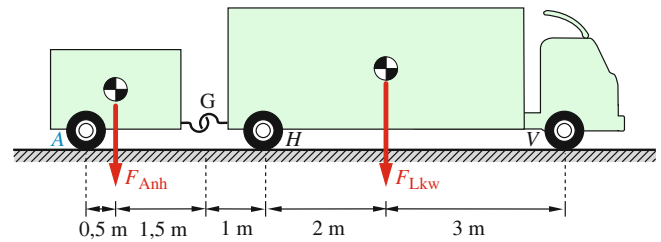


Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned}\sum M_{ix}^{(A)} &= 2800 \text{ N} \cdot 50 \text{ mm} + M_{\text{übertragen}} = 0 \\ \Rightarrow M_{\text{übertragen}} &= 140 \text{ Nm}, \\ \sum M_{iy}^{(A)} &= -B_z \cdot 160 \text{ mm} - 2800 \text{ N} \cdot 220 \text{ mm} = 0 \\ \Rightarrow B_z &= -3850 \text{ N}, \\ \sum M_{iz}^{(A)} &= B_y \cdot 160 \text{ mm} - 1000 \text{ N} \cdot 220 \text{ mm} + 260 \text{ N} \cdot 50 \text{ mm} = 0 \\ \Rightarrow B_y &= 1294 \text{ N}, \\ \sum F_{ix} &= A_x - 260 \text{ N} = 0 \Rightarrow A_x = 260 \text{ N}, \\ \sum F_{iy} &= A_y + B_y - 1000 \text{ N} = 0 \Rightarrow A_y = -294 \text{ N}, \\ \sum F_{iz} &= A_z + B_z + 2800 \text{ N} = 0 \Rightarrow A_z = 1050 \text{ N}.\end{aligned}$$

2.15 • Zu berechnen sind die Achslasten V , H und A (Vorder-, Hinter- und Anhängerachse) eines stehenden Lastzuges. LKW und Anhänger sind in der Anhängerkupplung G gelenkig miteinander verbunden. Die angezogene Handbremse des LKW blockiert dessen Hinterräder.

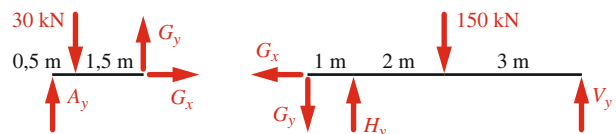
Gegeben: LKW-Gewicht $F_{\text{LKW}} = 150 \text{ kN}$, Anhänger-Gewicht $F_{\text{Anh}} = 30 \text{ kN}$.



1. Überprüfen Sie den Lastzug auf statische Bestimmtheit.
2. Berechnen Sie die Achslasten.

Resultat: $A_y = 22,5 \text{ kN}$, $G_x = 0$, $G_y = 7,5 \text{ kN}$, $H_x = 0$, $H_y = 99 \text{ kN}$, $V_y = 58,5 \text{ kN}$.

Ausführliche Lösung: Freikörperbilder von LKW und Anhänger:



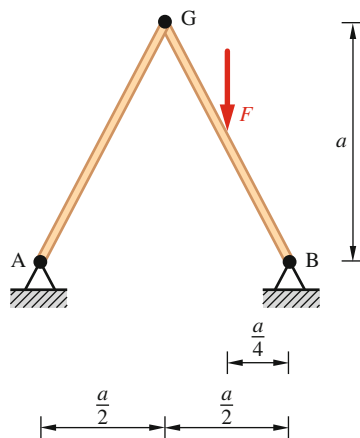
- 6 Lagerreaktionen und 6 Gleichgewichtsbedingungen, also statisch bestimmt gelagert.
- Gleichgewichtsbedingungen für den Anhänger:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= G_x = 0, \\ \sum M_i^{(G)} &= 30 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} - A_y \cdot 2 \text{ m} = 0 \\ &\Rightarrow A_y = 22,5 \text{ kN}, \\ \sum F_{iy} &= A_y - 30 \text{ kN} + G_y = 0 \\ &\Rightarrow G_y = 7,5 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Gleichgewichtsbedingungen für den LKW:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= H_x = 0, \\ \sum M_i^{(H)} &= G_y \cdot 1 \text{ m} + V_y \cdot 5 \text{ m} - 150 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = 0 \\ &\Rightarrow V_y = 58,5 \text{ kN}, \\ \sum F_{iy} &= H_y + V_y - 150 \text{ kN} - G_y = 0 \\ &\Rightarrow H_y = 99 \text{ kN}.\end{aligned}$$

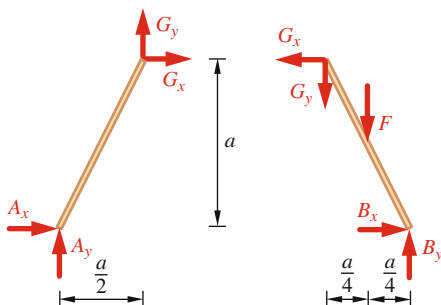
- 2.16 ••** Ein Gelenkträger ist in den Punkten A und B jeweils zweiwertig gelagert. An ihm greift eine Kraft F an.



- Überprüfen Sie den Träger auf statische Bestimmtheit.
- Bestimmen Sie die Lager- und Gelenkreaktionen.

Resultat: $A_x = \frac{F}{8}$, $A_y = \frac{F}{4}$, $B_x = -\frac{F}{8}$, $B_y = \frac{3}{4}F$, $G_x = -\frac{F}{8}$, $G_y = -\frac{F}{4}$.

Ausführliche Lösung: Freikörperbilder:



- 6 Lagerreaktionen und 6 Gleichgewichtsbedingungen, also statisch bestimmt gelagert.
- Linkes Freikörperbild:

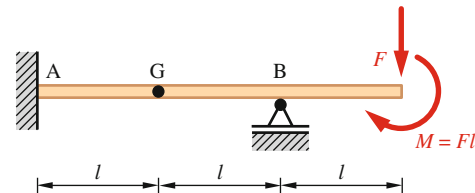
$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= A_x + G_x = 0, \\ \sum F_{iy} &= A_y + G_y = 0, \\ \sum M_i^{(A)} &= G_y \cdot \frac{a}{2} - G_x \cdot a = 0.\end{aligned}$$

Rechtes Freikörperbild:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= B_x - G_x = 0, \\ \sum F_{iy} &= B_y - F - G_y = 0, \\ \sum M_i^{(A)} &= G_y \cdot \frac{a}{2} + G_x \cdot a + F \cdot \frac{a}{4} = 0.\end{aligned}$$

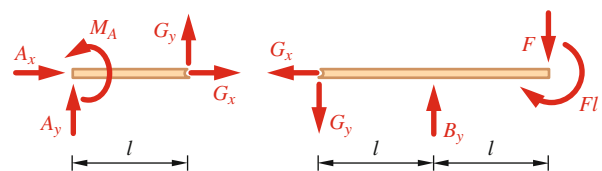
mit den Ergebnissen $A_x = \frac{F}{8}$, $A_y = \frac{F}{4}$, $B_x = -\frac{F}{8}$, $B_y = \frac{3}{4}F$, $G_x = -\frac{F}{8}$ und $G_y = -\frac{F}{4}$.

- 2.17 •** Berechnen Sie für den skizzierten Gelenkträger die Lager- und Gelenkreaktionen.



Resultat: $A_x = 0$, $A_y = -2F$, $M_A = -2Fl$, $B_y = 3F$, $G_x = 0$, $G_y = 2F$.

Ausführliche Lösung: Freikörperbilder:



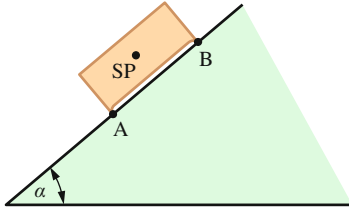
Rechtes Freikörperbild:

$$\begin{aligned}\sum M_i^{(G)} &= B_y \cdot l - 2Fl - Fl = 0 \Rightarrow B_y = 3F, \\ \sum F_{ix} &= -G_x = 0, \\ \sum F_{iy} &= -G_y + B_y - F = 0 \Rightarrow G_y = 2F.\end{aligned}$$

Linkes Freikörperbild:

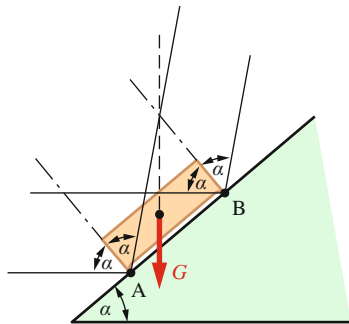
$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= A_x + G_x = 0 \Rightarrow A_x = 0, \\ \sum F_{iy} &= A_y + G_y = 0 \Rightarrow A_y = -2F, \\ \sum M_i^{(A)} &= M_A + G_y \cdot l = 0 \Rightarrow M_A = -2Fl.\end{aligned}$$

2.18 • Eine Kiste mit der Gewichtskraft G stehe in den Punkten A und B auf einer um den Winkel $\alpha = 40^\circ$ zur Horizontalen geneigten schiefen Ebene. Bestimmen Sie grafisch, wie groß der Haftkoeffizient μ_0 zwischen Kiste und schiefer Ebene mindestens sein muss, damit die Kiste nicht die schiefe Ebene hinabrutscht.



Resultat: $\mu_0 = \tan \alpha = 0,84$.

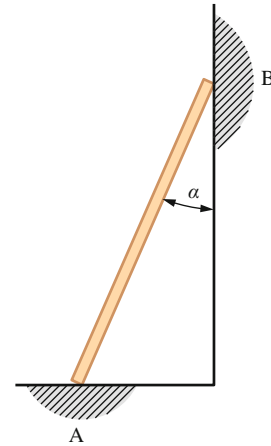
Ausführliche Lösung: Freikörperbild mit eingezeichneten Reibkegeln:



An der Kiste greifen drei Kräfte an, die Gewichtskraft G sowie die Kräfte in den Punkten A und B. Diese können nur dann im statischen Gleichgewicht stehen, wenn sich alle drei Wirkungslinien in einem Punkt schneiden. Aus dem Freikörperbild mit eingezeichneten Reibkegeln ist ersichtlich, dass hierzu der Winkel ρ des Reibkegels mindestens so groß sein muss wie der Winkel α .

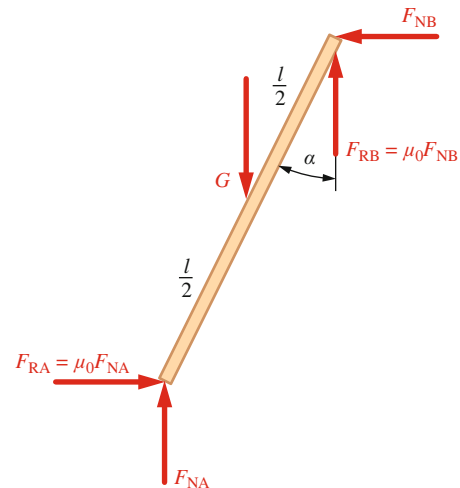
Somit gilt für α : $\alpha = \rho_0 = \arctan \mu_0$, woraus für μ_0 folgt: $\mu_0 = \tan \alpha = 0,84$.

2.19 •• Bis zu welchem Winkel α lässt sich ein Stab (Gewicht G , Länge l) an eine Wand lehnen, ohne hinunterzurutschen? Die Haftkoeffizienten zwischen Stab und Boden sowie Stab und Wand seien gleich groß und betragen jeweils $\mu_0 = 0,3$.



Resultat: $F_{NA} = \frac{G}{1+\mu_0^2}$, $F_{NB} = \frac{\mu_0 G}{1+\mu_0^2}$,
 $\alpha = \arctan \frac{2\mu_0}{1-\mu_0^2} = 33,4^\circ$.

Ausführliche Lösung: Freikörperbild:



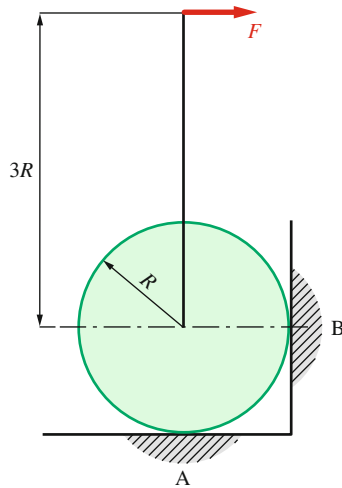
Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \sum M_i^{(B)} &= G \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha - F_{NA} \cdot l \sin \alpha + \mu_0 F_{NA} \cdot l \cos \alpha = 0, \\ \sum F_{ix} &= \mu_0 F_{NA} - F_{NB} = 0, \\ \sum F_{iy} &= F_{NA} - G + \mu_0 F_{NB} = 0, \end{aligned}$$

mit den Ergebnissen $F_{NA} = \frac{G}{1+\mu_0^2}$, $F_{NB} = \frac{\mu_0 G}{1+\mu_0^2}$ und $\alpha = \arctan \frac{2\mu_0}{1-\mu_0^2} = 33,4^\circ$.

2.20 •• Eine $G = 100 \text{ N}$ schwere Scheibe mit dem Radius R liegt wie skizziert in einer Ecke zwischen Boden und Wand. Die an einem starr mit der Scheibe verbundenen Hebelarm angreifende Kraft F versucht die Scheibe zu drehen. Die Haftkoeffizienten zwischen Scheibe und Boden sowie Scheibe und Wand betragen jeweils $\mu_0 = 0,3$.

Wie groß muss die Kraft F mindestens sein, damit sich die Scheibe dreht? Wie groß sind dann die Normalkräfte zwischen Scheibe und Boden (Punkt A) sowie Scheibe und Wand (Punkt B)?

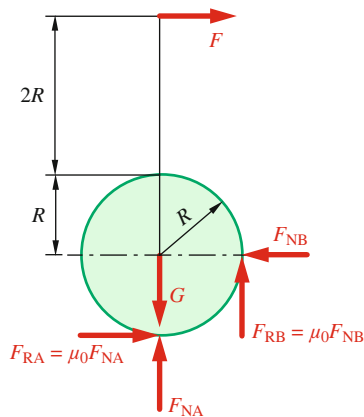


Resultat: $F_{NB} = \frac{G}{\mu_0 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\mu_0} = 39,2 \text{ N}$,

$F_{NA} = (\frac{3}{4\mu_0} - \frac{1}{4})F_{NB} = 88,2 \text{ N}$,

$F = \frac{1}{4}(1 + \mu_0)F_{NB} = 12,7 \text{ N}$.

Ausführliche Lösung: Freikörperbild:



Gleichgewichtsbedingungen:

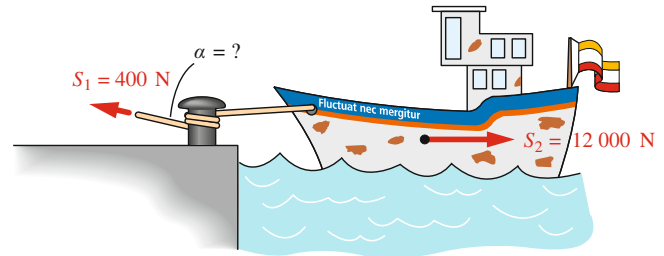
$$\sum M_i^{(A)} = -4FR + (1 + \mu_0)F_{NB}R = 0,$$

$$\sum F_{ix} = F + \mu_0 F_{NA} - F_{NB} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = F_{NA} - G + \mu_0 F_{NB} = 0,$$

mit den Ergebnissen $F_{NB} = \frac{G}{\mu_0 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\mu_0} = 39,2 \text{ N}$, $F_{NA} = (\frac{3}{4\mu_0} - \frac{1}{4})F_{NB} = 88,2 \text{ N}$ und $F = \frac{1}{4}(1 + \mu_0)F_{NB} = 12,7 \text{ N}$.

2.21 • In den wie immer viel zu kurzen Semesterferien jobben Sie als Hafenarbeiter. Jetzt sollen Sie ein Frachtschiff mal schnell am Tau gegen Abdriften festhalten. In Ermangelung höherer Kenntnisse zu Seemannsknoten schlingen Sie das Seil ein paar Mal um den Poller und halten so stark Sie können gegen.



Wie oft ist das Tau um den Poller zu wickeln?

Zahlenwerte:

- Abdriftkraft Frachtschiff: $S_2 = 12.000 \text{ N}$,
- Ihre Gegenhaltekraft: $S_1 = 400 \text{ N}$,
- Haftkoeffizient: $\mu_0 = 0,25$.

Resultat: 2,2 Umschlingungen.

Ausführliche Lösung:

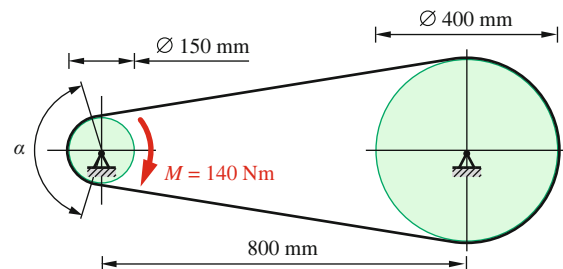
$$S_2 = S_1 \cdot \exp(\mu_0 \alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\ln \frac{S_2}{S_1}}{\mu_0} = \frac{\ln \frac{12.000}{400}}{0,25} = 13,6 = 779^\circ$$

$$\hat{=} 2,2 \text{ Umschlingungen.}$$

2.22 •• Ein Riemenantrieb bestehe aus zwei mit einem Riemen verbundenen Scheiben der Durchmesser 150 mm und 400 mm. Der Achsabstand der beiden Riemenscheiben betrage 800 mm, der Haftkoeffizient $\mu_0 = 0,4$.

Die kleinere Riemenscheibe soll mit einem Drehmoment von maximal 140 Nm angetrieben werden können, ohne dass der Riemen rutscht.



1. Berechnen Sie den Umschlingungswinkel α der kleinen Scheibe.
2. Wie groß sind die Kräfte im Riemen?
3. Berechnen Sie die durch die Riemenkräfte hervorgerufenen Lagerreaktionen im Lager der kleineren Riemenscheibe.

Resultat: $\alpha = 162^\circ$, $S_1 = 889 \text{ N}$, $S_2 = 2755 \text{ N}$, $A_x = 3599 \text{ N}$, $A_y = 292 \text{ N}$.

Ausführliche Lösung:

- $\alpha = 2 \cdot \arccos \frac{125}{800} = 162,0^\circ$.
- Aus dem Momentengleichgewicht um die linke Scheibe folgt:

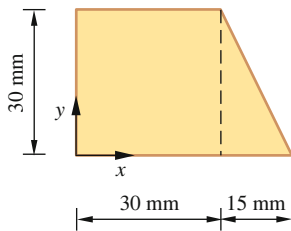
$$140 \text{ Nm} = S_2 \cdot 75 \text{ mm} - S_1 \cdot 75 \text{ mm} ,$$

$$\text{mit } S_2 = S_1 \cdot \exp(\mu_0 \alpha)$$

$$\Rightarrow S_1 = 889 \text{ N} , \quad S_2 = 2755 \text{ N} .$$

- $A_x = -(889 \text{ N} + 2755 \text{ N}) \cos 9^\circ = -3599 \text{ N}$,
 $A_y = (2755 \text{ N} - 889 \text{ N}) \sin 9^\circ = 292 \text{ N}$.

2.23 •• Gegeben ist der skizzierte trapezförmige Flächenquerschnitt.



- Berechnen Sie die Lage des Flächenschwerpunktes mithilfe der Integraldefinition des Schwerpunktes.
- Unterteilen Sie das Trapez in zwei Teilflächen und berechnen Sie die Lage des Flächenschwerpunktes.

Resultat: $x_S = 19 \text{ mm}$, $y_S = 14 \text{ mm}$.

Ausführliche Lösung:

1.

$$x_S = \frac{1}{A} \int_{(A)} x \, dA = \frac{1}{A} \int_{y=0}^{30 \text{ mm}} \left(\int_{x=0}^{45 \text{ mm} - \frac{y}{2}} x \, dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{A} \int_{y=0}^{30 \text{ mm}} \left(45 \text{ mm} - \frac{y}{2} \right)^2 dy = 19 \text{ mm} ,$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int_{(A)} y \, dA = \frac{1}{A} \int_{y=0}^{30 \text{ mm}} \left(\int_{x=0}^{45 \text{ mm} - \frac{y}{2}} y \, dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{A} \int_{y=0}^{30 \text{ mm}} \left(45 \text{ mm} \cdot y - \frac{y^2}{2} \right) dy = 14 \text{ mm} .$$

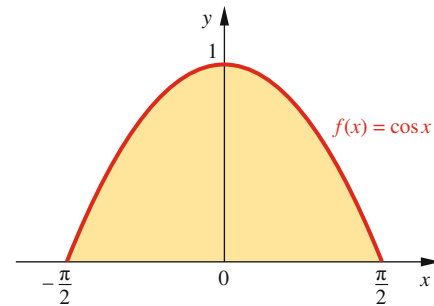
- Tabelle mit den Schwerpunktdaten der Teilquerschnitte:

Teilfläche	x_{Si} in mm	y_{Si} in mm	A_i in mm ²
1: Quadrat	15	15	900
2: Dreieck	35	10	225
			$A_{\text{ges}} = 1125 \text{ mm}^2$

$$x_S = \frac{1}{1125 \text{ mm}^2} (15 \text{ mm} \cdot 900 \text{ mm}^2 + 35 \text{ mm} \cdot 225 \text{ mm}^2) = 19 \text{ mm} ,$$

$$y_S = \frac{1}{1125 \text{ mm}^2} (15 \text{ mm} \cdot 900 \text{ mm}^2 + 10 \text{ mm} \cdot 225 \text{ mm}^2) = 14 \text{ mm} .$$

2.24 •• Berechnen Sie die Schwerpunktkoordinaten x_S und y_S der abgebildeten, durch die Funktion $f(x) = \cos x$ im Bereich $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ umrandeten Fläche.



Resultat: $x_S = 0$, $y_S = \frac{\pi}{8}$.

Ausführliche Lösung: Aus Symmetriegründen ist $x_S = 0$.

$$y_S = \frac{1}{A} \int_{(A)} y \, dA ,$$

$$\text{mit } A = \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 \quad \text{und}$$

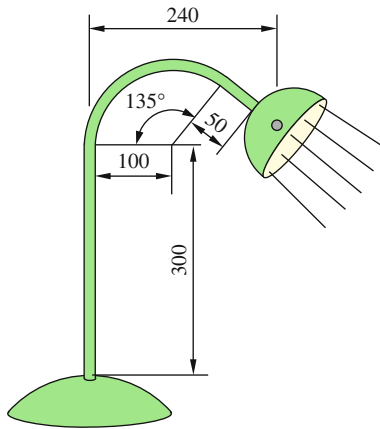
$$\int_{(A)} y \, dA = \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{y=0}^{\cos x} y \, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \left[x + \sin x \cos x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow y_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} .$$

2.25 •• Bestimmen Sie die Schwerpunktkoordinate x_S der skizzierten Schreibtischlampe (alle Längenmaße in mm). Es wiegen der Lampenfuß 400 g, der laufende Meter Rohr jeweils 100 g und der Lampenschirm mit Glühbirne 120 g.



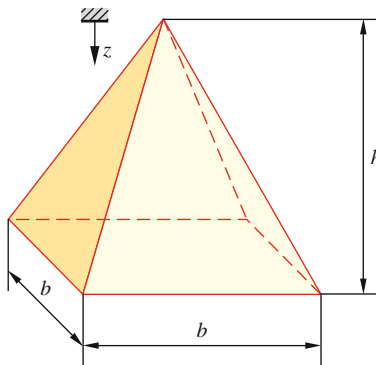
Resultat: $x_S = 54,3 \text{ mm}$.

Ausführliche Lösung:

Teilkörper	x_{S_i} in mm	m_i in g
1: Fuß	0	400
2: senkrechter Rohrabchnitt	0	30
3: Rohrbogen	$\frac{R-R\sin\alpha}{\alpha} = 70,0$	$\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 0,1\text{m} \cdot 100 \frac{\text{g}}{\text{m}} = 23,6 \text{ g}$
4: Rohr zwischen Bogen und Schirm	$100 + (100 + 25) \cdot \sin 45^\circ = 188,4$	5
5: Lampenschirm	240	120
		$m_{\text{ges}} = 578,6 \text{ g}$

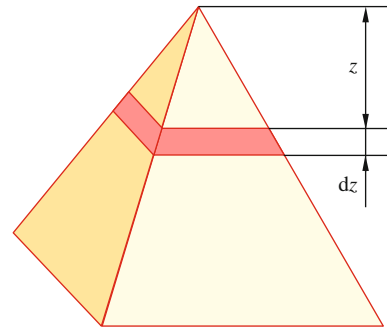
$$\Rightarrow x_S = \frac{1}{578,6\text{g}} (70 \text{ mm} \cdot 23,6 \text{ g} + 188,4 \text{ mm} \cdot 5 \text{ g} + 240 \text{ mm} \cdot 120 \text{ g}) = 54,3 \text{ mm}.$$

2.26 •• Berechnen Sie die Schwerpunktlage z_S einer Pyramide der Höhe h und der Breite b .



Resultat: $z_S = \frac{3}{4} h$.

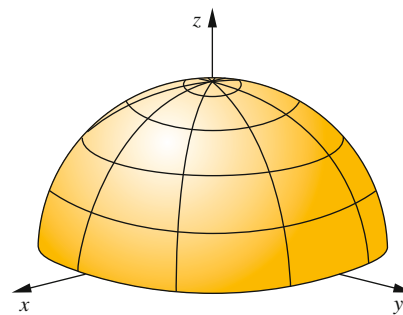
Ausführliche Lösung:



$$z_S: z_S = \frac{1}{V} \int_{(V)} z \, dV \text{ mit } V = \frac{1}{3} h a^2 \text{ und } dV = a^2 \left(\frac{z}{h} \right)^2 dz.$$

$$\Rightarrow z_S = \frac{1}{\frac{1}{3} h a^2} \int_{z=0}^h a^2 \frac{z^3}{h^2} dz = \frac{3}{h^3} \left[\frac{1}{4} z^4 \right]_{z=0}^h = \frac{3}{4} h.$$

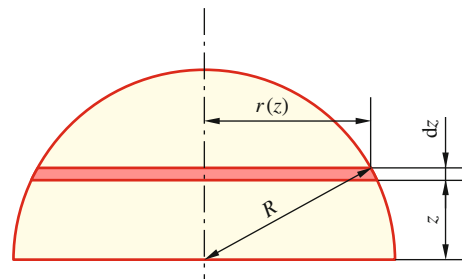
2.27 ••• Berechnen Sie die Schwerpunktlage einer homogenen Halbkugel des Radius R .



Resultat: $x_S = y_S = 0, z_S = \frac{3}{8} R$.

Ausführliche Lösung: Aus Symmetriegründen ist $x_S = y_S = 0$.

Zur Berechnung von z_S :



Mit einer parallel zur x - y -Ebene liegenden Kreisscheibe als Volumenelement gilt für dV

$$dV = \pi r(z)^2 dz,$$

wobei $r(z)$ der Radius der auf Koordinatenhöhe z liegenden Kreisscheibe ist. Für $r(z)$ gilt nach dem Satz des

Pythagoras der Zusammenhang

$$z^2 + r(z)^2 = R^2.$$

Wir erhalten somit für dV

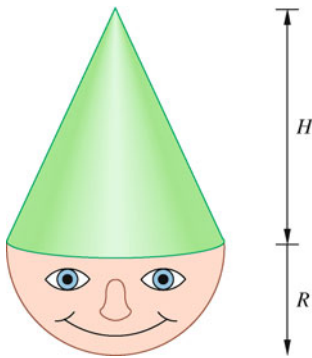
$$dV = \pi (R^2 - z^2) dz.$$

Das Volumen einer Halbkugel beträgt $\frac{2}{3}\pi R^3$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{3}{2\pi R^3} \int_{z=0}^R z \pi (R^2 - z^2) dz \\ &= \frac{3}{2R^3} \left[R^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^R = \frac{3}{2R^3} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{3}{8}R. \end{aligned}$$

2.28 •• Ein Stehaufmännchen ist ein prima Kinderspielzeug. Man kann es stundenlang aufs Neue kippen, und es richtet sich stets alleine wieder auf.

Sie haben sich nun entschlossen, Ihrer niedlichen kleinen Nichte zum ersten Geburtstag ein Stehaufmännchen zu basteln. Es soll aus einem Stück bestehen, mit einer Halbkugel mit dem Radius R für das Gesicht und einem Kegel der Höhe H als Mütze.



1. Was hat diese Aufgabe mit dem Schwerpunkt zu tun?
2. Welche Höhe H_{zul} darf die Mütze höchstens haben?

Resultat: $H_{zul} = \sqrt{3} R$.

Ausführliche Lösung:

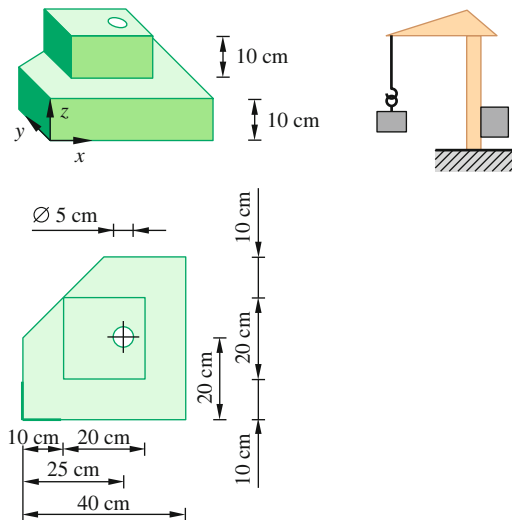
1. Das Stehaufmännchen richtet sich nur dann von alleine auf, wenn der Schwerpunkt innerhalb der Halbkugel liegt.
2. Wir unterteilen das Stehaufmännchen in die beiden Teilkörper Kegel und Halbkugel und berechnen die jeweiligen z -Komponenten des Schwerpunktes. Wenn wir den Nullpunkt der z -Achse auf die Grenze zwischen Kegel und Halbkugel legen, erhalten wir für die Schwerpunktberechnung die folgende Tabelle:

Teilvolumen	z_{Si}	V_i
Kegel (Mütze)	$\frac{H}{4}$	$\frac{\pi}{3} H R^2$
Halbkugel (Gesicht)	$-\frac{3}{8}R$	$\frac{2\pi}{3} R^3$
		$V_{ges} = \frac{\pi}{3} R^2 (H + 2R)$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} z_{S,ges} &= \frac{1}{\frac{\pi}{3} R^2 (H + 2R)} \left(\frac{H}{4} \cdot \frac{\pi}{3} H R^2 - \frac{3}{8} R \cdot \frac{2\pi}{3} R^3 \right) = 0 \\ \Rightarrow H_{zul} &= \sqrt{3} R. \end{aligned}$$

2.29 • Auf einen Körper aus Stahl soll ein Haken angeschweißt werden, um den Körper mit einem Kran anheben zu können. Der Körper besteht aus einer 10 cm hohen fünfeckigen Basis, einem ebenfalls 10 cm hohen quadratischen Aufsatz und einer durchgehenden Bohrung des Durchmessers 5 cm. Die anderen Maße entnehmen Sie bitte der Zeichnung.



An welche Stelle ist der Haken anzuschweißen, damit der Körper beim Anheben nicht kippt?

Resultat: Der Haken muss genau über dem Schwerpunkt verschweißt werden. Die Schwerpunktkoordinaten betragen $x_S = 21,4$ mm, $y_S = 18,5$ mm.

Ausführliche Lösung:

Teilvolumen	x_{Si} in cm	y_{Si} in cm	V_i in cm^3
1: großes Quadrat unten	20	20	16.000
2: fehlendes Dreieck unten	6,7	33,3	-2000
3: Quadrat oben	20	20	4000
4: durchgehende Bohrung	25	20	-392
			$V_{ges} = 17.608$

$$x_S = \frac{1}{17.608 cm^3} (20 cm \cdot 16.000 cm^3 - 6,7 cm \cdot 2000 cm^3 + 20 cm \cdot 4000 cm^3 - 25 mm \cdot 392 cm^3) = 21,4 mm$$

$$y_S = \frac{1}{17.608 cm^3} (20 cm \cdot 16.000 cm^3 - 33,3 cm \cdot 2000 cm^3 + 20 cm \cdot 4000 cm^3 - 20 mm \cdot 392 cm^3) = 18,5 mm$$