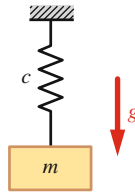


# Aus Kapitel 12

## Aufgaben

**12.1 •** An einer am oberen Ende fest eingespannten Feder mit der Federkonstanten  $c$  hängt eine Masse  $m$  im Schwerfeld mit der Gravitationskonstanten  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .



Die statische Verlängerung der Feder unter dem Einfluss der Gewichtskraft beträgt  $q_{\text{st}} = 8 \text{ mm}$ . Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz des Schwingers.

**Resultat:**  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{q_{\text{st}}}}$

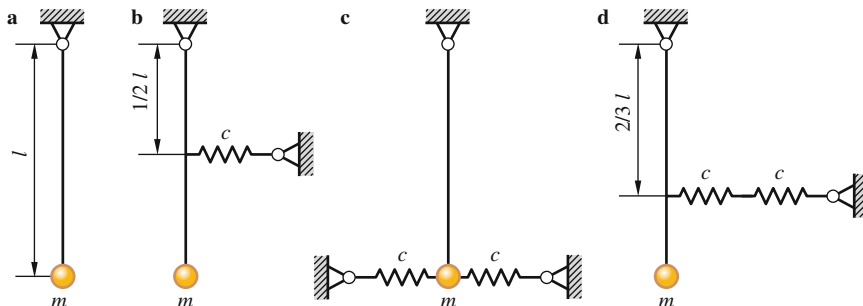
**Ausführliche Lösung:** In der statischen Ruhelage gilt das Gleichgewicht aus Gewichtskraft und Federkraft an der Masse:

$$mg = cq_{\text{st}}.$$

Daraus ergibt sich die Federsteifigkeit  $c = \frac{mg}{q_{\text{st}}}$ . Die Eigenkreisfrequenz des Schwingers ist somit:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{q_{\text{st}}m}} = \sqrt{\frac{g}{q_{\text{st}}}}.$$

**12.2 •** Auf ein mathematisches Pendel mit der Masse  $m$  und der Länge  $l$  wirkt die Erdbeschleunigung  $g$ . Für kleine Auslenkungen  $\varphi$  lautet die Bewegungsgleichung aus dem Drehimpulssatz  $ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0$ . Zwischen der Pendelstange und der Umgebung werden in verschiedenen Konfigurationen Federn der Steifigkeit  $c$  angebracht. Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_0$  der Konfigurationen.



**Resultat:**

$$\begin{aligned} \text{a) } \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l}} & \text{b) } \omega_0 &= \sqrt{\frac{c}{4m} + \frac{g}{l}} \\ \text{c) } \omega_0 &= \sqrt{\frac{2c}{m} + \frac{g}{l}} & \text{d) } \omega_0 &= \sqrt{\frac{2c}{9m} + \frac{g}{l}} \end{aligned}$$

**Ausführliche Lösung:** Das Drehmoment eines Federsystems am Pendel der Steifigkeit  $c_{\text{ers}}$ , das im Abstand  $l$  vom Drehpunkt angebracht ist, beträgt bei der Auslenkung  $\varphi$   $M = c_{\text{ers}}l^2\varphi$  und kann zur Bewegungsgleichung, die ja eine Momentenbilanz ist, hinzuaddiert werden. Zu beachten ist, dass die Konfiguration c) eine Parallelschaltung und d) eine Reihenschaltung darstellt!

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \text{a) } ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi &= 0, \\ \text{b) } ml^2\ddot{\varphi} + \left(\frac{1}{4}l^2c + mgl\right)\varphi &= 0, \\ \text{c) } ml^2\ddot{\varphi} + (c_{\text{ers}}l^2 + mgl)\varphi &= 0, \text{ mit } c_{\text{ers}} = c + c = 2c, \\ \text{d) } ml^2\ddot{\varphi} + \left(\frac{4}{9}c_{\text{ers}}l^2 + mgl\right)\varphi &= 0, \text{ mit } \frac{1}{c_{\text{ers}}} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{c}. \end{aligned}$$

**12.3 ••** Ein Torsionsschwinger besteht aus einer einseitig fest eingespannten Welle mit dem Durchmesser  $D = 30 \text{ mm}$  und der Länge  $l = 500 \text{ mm}$  aus Stahl mit dem Schubmodul  $G = 70 \text{ GPa}$ . Am freien Ende der Welle befindet sich eine Stahlscheibe, Dichte  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ , mit dem Durchmesser  $D_S = 400 \text{ mm}$  und der Dicke  $d = 60 \text{ mm}$ . Wie groß ist die Eigenkreisfrequenz dieses Torsionsschwingers?

**Resultat:** Die Eigenkreisfrequenz beträgt  $\omega_0 = 97,29 \text{ rad/s}$ .

**Ausführliche Lösung:** Die Torsionssteifigkeit einer rotationssymmetrischen Welle lautet:

$$c_T = \frac{GI_T}{l} \quad \text{mit} \quad I_T = \frac{\pi}{32} D^4,$$

was nach Einsetzen von Zahlenwerten gerundet auf  $c_T = 11.133 \text{ Nm/rad}$  führt. Das Trägheitsmoment der Scheibe ergibt sich zu:

$$J = \frac{1}{2} m R^2 \quad \text{bzw.} \quad J = \frac{1}{8} m D_S^2 \quad \text{mit} \quad m = \frac{1}{4} \pi \rho d D_S^2,$$

was gerundet  $J = 1,18 \text{ kgm}^2$  ergibt. Die Eigenkreisfrequenz ist ergibt sich nun zu:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_T}{J}} = 97,29 \text{ rad/s.}$$

Nach Division durch  $2\pi$  ergibt sich die Eigenfrequenz  $f = 15,49 \text{ Hz}$ .

**12.4 •** Ein ungedämpftes Feder-Masse-System wird durch eine harmonische Kraft erregt. Bei der Erregerkreisfrequenz  $\Omega_1 = 10 \text{ rad/s}$  tritt Resonanz auf. Wird auf dem Körper eine Zusatzmasse  $\Delta m = 2 \text{ kg}$  befestigt und der gleiche Versuch wiederholt, tritt die Resonanz bei  $\Omega_2 = 9,535 \text{ rad/s}$  auf. Bestimmen Sie die Masse und Federsteifigkeit des ursprünglichen Systems.

**Resultat:**

$$m = 20,02 \text{ kg}; \quad c = 2,00 \cdot 10^5 \text{ N/cm.}$$

**Ausführliche Lösung:** Bei einem ungedämpften System entspricht die Resonanzfrequenz der Eigenfrequenz, somit gilt für das Schwingersystem ohne Zusatzmasse:

$$\Omega_1^2 = \frac{c}{m}.$$

Für das System mit Zusatzmasse gilt entsprechend:

$$\Omega_2^2 = \frac{c}{m + \Delta m}.$$

Aus den obigen beiden Gleichungen können die Unbekannten  $m$  und  $c$

$$m = \frac{\Delta m \Omega_2^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}, \quad c = \frac{\Delta m \Omega_1^2 \Omega_2^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}.$$

gelöst werden. Einsetzen der Zahlenwerte ergibt das oben genannte Resultat.

**12.5 •** Experimentell wurde die Eigenkreisfrequenz eines gedämpften Einmassenschwingers  $\omega_d$  bestimmt. Bei harmonischer Anregung stellt man fest, dass der

Schwinger bei der Erregerfrequenz  $\omega_r$  die maximale Amplitude aufweist. Ermitteln Sie daraus das Dämpfungsmaß  $D$ , das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  sowie die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  des ungedämpften Systems.

**Resultat:**

$$D = \sqrt{\frac{\omega_d^2 - \omega_r^2}{2\omega_d^2 - \omega_r^2}}, \quad \omega_0 = \sqrt{2\omega_d^2 - \omega_r^2},$$

$$\Lambda = 2\pi \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_d}\right)^2}.$$

**Ausführliche Lösung:** Die Eigenfrequenz und die Resonanzfrequenz des gedämpften Systems haben folgende Beziehungen zu der Eigenfrequenz des gleichen ungedämpften Systems:

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}, \quad \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}.$$

Diese beiden Gleichungen können nach den Unbekannten  $\omega_0$  und  $D$  aufgelöst werden:

$$D = \sqrt{\frac{\omega_d^2 - \omega_r^2}{2\omega_d^2 - \omega_r^2}}, \quad \omega_0 = \sqrt{2\omega_d^2 - \omega_r^2}.$$

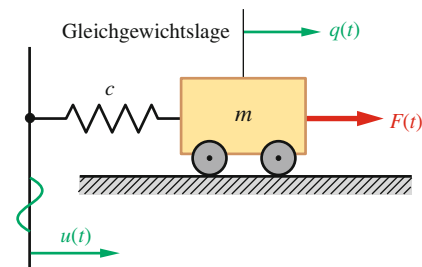
Das logarithmische Dekrement ergibt sich zu:

$$\Lambda = D\omega_0 T_d = D\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_d} = 2\pi \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_d}\right)^2}.$$

**12.6 •** Ein Einmassenschwinger wird durch eine harmonische Kraft  $F(t)$  und eine Wegerregung  $u(t)$  aus der Ruhelage erregt, wobei

$$F(t) = \hat{F} \sin \Omega_1 t, \quad u(t) = \hat{u} \cos \Omega_2 t$$

sind. Bestimmen Sie die stationäre Schwingungsantwort der Masse  $m$ .



**Resultat:**

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t)$$

$$= \frac{\hat{F}}{c} \frac{1}{1 - \eta_1^2} \sin \Omega_1 t + \hat{u} \frac{1}{1 - \eta_2^2} \cos \Omega_2 t.$$

**Ausführliche Lösung:** Die Bewegungsgleichung des Systems lautet:

$$m\ddot{q} + cq = \hat{F} \sin \Omega_1 t + c\hat{u} \cos \Omega_2 t.$$

Die Eigenkreisfrequenz des Systems beträgt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Die Systemantwort setzt sich gemäß des Superpositionsprinzips aus den Teilantworten auf harmonische Anregung  $\hat{F} \sin \Omega_1 t$  und  $c\hat{u} \cos \Omega_2 t$  zusammen. Beide Teilantworten entsprechen dem Fall *harmonische Kraftanregung*, siehe Abschn. 12.4, also der Vergrößerungsfunktion Typ 1:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_1(t) + q_2(t) \\ &= \frac{\hat{F}}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega_1^2} \sin \Omega_1 t + \frac{c\hat{u}}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega_2^2} \cos \Omega_2 t. \end{aligned}$$

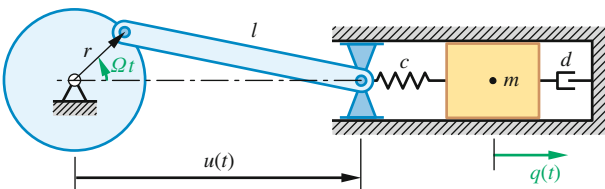
Mit den dimensionslosen Frequenzverhältnissen

$$\eta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_0}, \quad \eta_2 = \frac{\Omega_2}{\omega_0}$$

ergibt sich die Lösung:

$$q(t) = \frac{\hat{F}}{c} \frac{1}{1 - \eta_1^2} \sin \Omega_1 t + \frac{\hat{u}}{1 - \eta_2^2} \cos \Omega_2 t.$$

**12.7** ••• In Textil- und Verarbeitungsmaschinen werden häufig ungleichförmig übersetzende Getriebe oder Mechanismen eingesetzt, um eine gewünschte periodische Bewegung zu erzeugen. Einfachster Vertreter davon ist die *Schubkurbel*, die eine Drehung in eine Translationsbewegung umsetzt. Die periodischen Bewegungen können andere Teile der Maschine in Schwingungen versetzen. In dieser Aufgabe sind schwingungsfähige Teile der Maschine vereinfacht durch einen Einmassenschwinger abgebildet.



Die Bewegungsgleichung für die Masse dieses Systems lautet  $m\ddot{q} + d\dot{q} + cq = cu(t)$ , wobei  $u(t)$  die *Hubkurve* ist, die von der Schubkurbel verursacht wird. Diese ist keine

einfache harmonische Funktion. Mit dem Pleuelstangenverhältnis  $\lambda = \frac{r}{l}$  lautet sie

$$u(t) = r \left( \cos \Omega t + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \Omega t} \right)$$

mit der konstanten Drehgeschwindigkeit  $\Omega$  des Antriebs. Diese lässt sich als harmonische Reihe der Gestalt

$$u(t) = r \sum_{k=0}^{\infty} u_k \cos k\Omega t$$

entwickeln, wobei die Glieder mit Ordnung  $k > 4$  in der Regel vernachlässigt werden können. Die Fourier-Koeffizienten  $u_k$  lauten genähert  $u_0 = -\left(\frac{\lambda}{4} + \frac{3\lambda^3}{64} - \frac{1}{\lambda}\right)$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^3}{16}$ ,  $u_3 = 0$ , und  $u_4 = -\frac{\lambda^3}{64}$ .

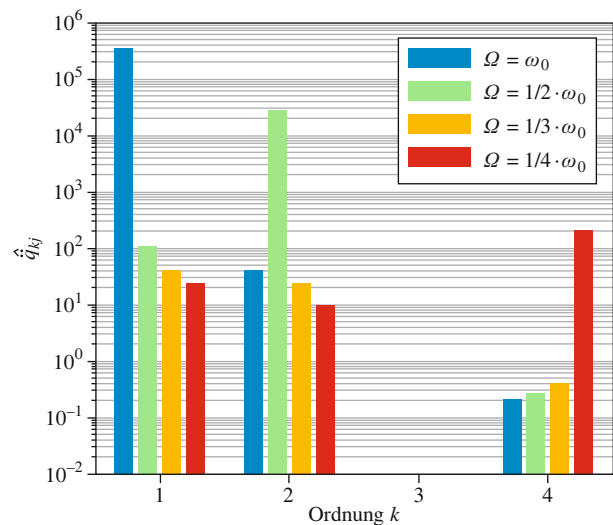
Berechnen Sie die stationären Amplituden der Beschleunigung der Masse  $m$  für folgende Winkelgeschwindigkeiten der Kurbel:  $\Omega = \frac{\omega_0}{4}$ ,  $\frac{\omega_0}{3}$ ,  $\frac{\omega_0}{2}$  und  $\omega_0$ .

Verwenden Sie die Zahlenwerte  $m = 0,25 \text{ kg}$ ,  $c = 10^3 \text{ N/m}$ ,  $d = 15 \cdot 10^{-3} \text{ N s/m}$ ,  $\lambda = \frac{1}{3}$  und  $l = 0,25 \text{ m}$ .

**Resultat:** Für die Amplituden  $\hat{q}_k$  der Beschleunigung der Masse  $m$  gilt:

$$\hat{q}_k = -r(k\Omega)^2 V_1 \left( \frac{k\Omega}{\omega_0} \right) u_k, \quad \text{für } k = 1, 2, 4.$$

Man erkennt, dass auch für Drehfrequenzen  $\Omega \neq \omega_0$  Resonanzen auftreten, wenn für das Argument der Vergrößerungsfunktion  $V_1$  der Wert  $\frac{k\Omega}{\omega_0} = 1$  gilt. Das ist z. B. für  $\Omega = \frac{\omega_0}{4}$  für die vierte Ordnung ( $k = 4$ ) der Fall. In der folgenden Abbildung sind die Amplituden graphisch dargestellt.



**Ausführliche Lösung:** Mithilfe der Vergrößerungsfunktion  $V_1$  in Absolutkoordinaten (12.46) und den in Beziehung (12.35) vorgestellten Teilanregungen, lässt sich für die

Antwortamplituden der Bewegung der Masse  $m$  des Systems infolge der harmonischen Anteile der Erregung für den Weg  $q_{kj}$  schreiben:

$$\hat{q}_{kj} = r V_1(\eta_j) u_k, \quad \text{mit } k = 1, 2, 4, j = 1, \dots, 4.$$

Entsprechend gilt für die Amplituden der Beschleunigung:

$$\hat{\ddot{q}}_{kj} = -r \Omega_k^2 V_1(\eta_j) u_k, \quad \text{mit } k = 1, 2, 4, j = 1, \dots, 4.$$

Dabei beschreibt der Index  $k$  die jeweilige Ordnung der Systemantwort infolge der  $j$ -ten Erregerkreisfrequenz  $\Omega_j$ . Einsetzen der Zahlenwerte liefert für die verschiedenen Erregerkreisfrequenzen die in folgender Tabelle aufgelisteten Ergebnisse für das *Frequenz- bzw. Abstimmungsverhältnis* und für die Vergrößerungsfunktion  $V_1$ . Die auftretenden Resonanzstellen sind mit einem roten Rahmen gekennzeichnet.

Wert des Abstimmungsverhältnisses  $\eta$  und der Vergrößerungsfunktion  $V_1$  für verschiedene Erregerkreisfrequenzen  $\Omega_k$ .

Erregerkreisfrequenz	Ordnung					
	1		2		4	
	$\eta$	$V_1$	$\eta$	$V_1$	$\eta$	$V_1$
$\Omega = \frac{1}{4}\omega_0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{(\frac{15}{16})^2 + \frac{1}{4}D^2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} + D^2}}$	1	$\frac{1}{2D}$
$\Omega = \frac{1}{3}\omega_0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{(\frac{64}{81} + \frac{4}{9}D^2)}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{81} + \frac{16}{9}D^2}}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{49}{81} + \frac{64}{9}D^2}}$
$\Omega = \frac{1}{2}\omega_0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} + D^2}}$	1	$\frac{1}{2D}$	2	$\frac{1}{\sqrt{9 + 16D^2}}$
$\Omega = \omega_0$	1	$\frac{1}{2D}$	2	$\frac{1}{\sqrt{9 + 16D^2}}$	4	$\frac{1}{\sqrt{225 + 64D^2}}$

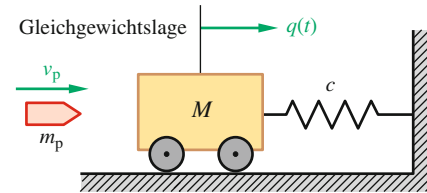
Es ergeben sich infolge der Erregung jeweils Resonanzen für  $\Omega = \frac{1}{4}\omega_0$  in der vierten, für  $\Omega = \frac{1}{2}\omega_0$  in der zweiten und für  $\Omega = \omega_0$  in der ersten Ordnung. Keine Resonanz ist für  $\Omega = \frac{1}{3}\omega_0$  zu erkennen. Das Balkendiagramm zeigt die Amplituden der Beschleunigung gemäß (12.5) und folgender Tabelle

Zahlenwerte der Amplituden $\hat{q}_{kj}$ in $\frac{m}{s^2}$				
$\Omega_j$	$\hat{q}_{1j}$	$\hat{q}_{2j}$	$\hat{q}_{3j}$	$\hat{q}_{4j}$
$\Omega = \frac{1}{4}\omega_0$	22,22	9,52	0	203,34
$\Omega = \frac{1}{3}\omega_0$	41,67	22,83	0	0,44
$\Omega = \frac{1}{2}\omega_0$	111,11	$3,01 \cdot 10^4$	0	0,26
$\Omega = \omega_0$	$3,51 \cdot 10^5$	38,07	0	0,21

stellt die Antwortamplituden als Zahlenwerte für die verschiedenen Erregerkreisfrequenzen gegenüber; ebenfalls sind die Resonanzamplituden wieder mit einem roten Rahmen gekennzeichnet. Wie erwartet ist zu erkennen, dass keine Resonanz in der dritten Ordnung der Erregung auftritt. Alle anderen Erregerordnungen haben eine Resonanzamplitude innerhalb der Systemantwort zur Folge. Somit ist festzuhalten, dass auch Resonanzen in der

Systemantwort infolge einer Überlagerung mehrerer harmonischer Anteile in der Erregerfunktion durchaus auch bei anderen Drehfrequenzen der Schubkurbel als der Systemeigenfrequenz auftreten können.

**12.8 ••** Die mit einer Feder der Konstanten  $c$  gehaltene, ungedämpfte Masse  $M$  befindet sich in ihrer Gleichgewichtslage in Ruhe. Sie wird von einem Projektil der Masse  $m_P$  mit der unbekannten Geschwindigkeit  $v_P$  getroffen. Das Projektil bleibt in der Masse  $M$  stecken. Danach schwingt die Masse  $M + m_P$  mit einer Amplitude von  $\hat{q}$ . Ermitteln Sie die Energie  $E_P$  des Projektils und den Anteil der Geschossenergie, der auf den Schwingungsvorgang übertragen wird.



**Resultat:**

$$E_P = \frac{1}{2} c \hat{q}^2 \frac{M + m_P}{m_P}, \quad \frac{E_S}{E_P} = \frac{m_P}{M + m_P}$$

**Ausführliche Lösung:** Der Impuls  $p = m_P v_P$  des Geschosses wird vollständig an den Schwinger übertragen und löst dadurch eine Bewegung aus. Die Impulsantwort (12.34) vereinfacht sich für den ungedämpften Schwinger mit  $\delta = 0$  und  $\omega_d = \omega_0$  zu:

$$q(t) = \frac{p}{m\omega_0} \sin \omega_0 t = \frac{p}{\sqrt{cm}} \sin \omega_0 t.$$

Die schwingende Masse beträgt nach dem Einschuss  $m = M + m_P$ , da beide Körper gemeinsam schwingen. Somit gilt:

$$\hat{q} = \frac{m_P v_P}{\sqrt{c(M + m_P)}},$$

was zunächst nach

$$v_P = \hat{q} \frac{\sqrt{c(M + m_P)}}{m_P}$$

aufgelöst werden kann. Daraus kann die Geschossenergie

$$E_P = \frac{1}{2} m_P v_P^2 = \frac{1}{2} c \hat{q}^2 \frac{M + m_P}{m_P}$$

bestimmt werden. Die an den Schwinger übertragene Energie lässt sich z. B. aus der potenziellen Federenergie im Moment der maximalen Amplitude bestimmen, weil dabei keine kinetische Energie vorhanden ist. Es gilt somit:

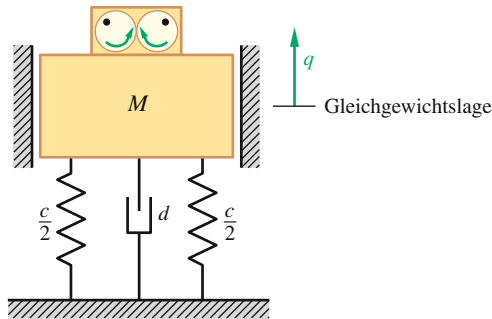
$$E_S = \frac{1}{2} c \hat{q}^2.$$

Für das Verhältnis der Schwinger- zur Geschossenergie ergibt sich:

$$\frac{E_S}{E_P} = \frac{m_P}{M + m_P},$$

das immer kleiner als eins ist. Der nicht an den Schwinger übertragene Anteil der Geschossenergie wird beim plastischen Stoß, der beim Steckenbleiben des Projektils in der Masse  $M$  stattfindet, dissipiert.

**12.9 ••** Auf einer Maschine, die von zwei Federn mit der gleichen Federkonstanten  $c/2$  sowie einem Dämpfer gestützt ist, wird ein Unwuchterreger befestigt, um die Schwingungseigenschaften der Maschine zu ermitteln.



Der Unwuchterreger hat eine Unwucht von  $m_U$  und einen Radius  $r_U$  zum Schwerpunkt der Unwucht. Die Drehzahl  $n$  des Erregers wird bei einem Schwingversuch aus dem Stillstand langsam gesteigert. Dabei wird eine maximale Amplitude der Masse von  $\hat{q}_{\max} = 1,60$  cm gemessen. Bei weiterer Steigerung der Drehzahl stellt sich schließlich eine konstante Amplitude  $\hat{q}_{\infty} = 0,32$  cm ein. Gegeben sind  $m_U = 12$  kg,  $r_U = 15$  cm und  $c = 1000$  N/cm. Ermitteln Sie das Dämpfungsmaß  $D$  sowie die vertikale Schwingungsamplitude des Systems, wenn der Unwuchterreger mit einer Drehzahl  $n = 300$  U/min läuft.

**Resultat:**

$$D = 0,10; \quad \hat{q} = 0,388 \text{ cm.}$$

**Ausführliche Lösung:** Die Gesamtmasse der Maschine mit dem Unwuchterreger wird mit  $M$  bezeichnet. Die Schwingungsamplitude der Maschine für die Unwuchterregung ist:

$$\hat{q} = \frac{m_U r_U}{M} \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}} = \frac{m_U r_U}{M} V_3(\eta).$$

Im Resonanzfall gilt mit der Näherungsformel für kleine Dämpfungswerte:

$$\hat{q}_{\max} = \frac{m_U r_U}{M} \frac{1}{2D}.$$

Für das Frequenzverhältnis  $\eta \rightarrow \infty$  geht  $V_3 \rightarrow 1$ , damit ergibt sich:

$$\hat{q}_{\infty} = \frac{m_U r_U}{M}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich das Dämpfungsmaß:

$$D = \frac{\hat{q}_{\infty}}{2\hat{q}_{\max}} = \frac{0,32}{2 \cdot 1,60} = 0,1.$$

Die Gesamtmasse ist:

$$M = \frac{m_U r_U}{\hat{q}_{\infty}},$$

und man erhält die Eigenkreisfrequenz des Systems

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{M}} = \sqrt{\frac{c \hat{q}_{\infty}}{m_U r_U}} = 13,33 \text{ rad/s,}$$

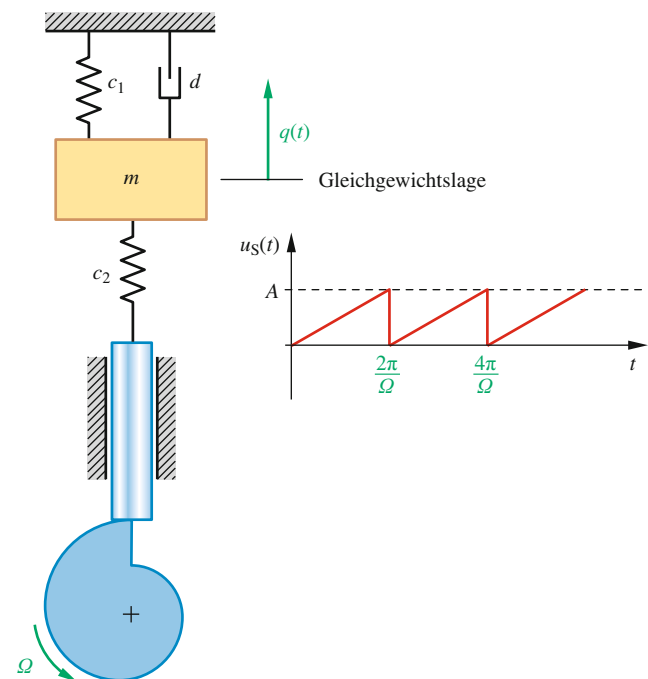
Das Abstimmungsverhältnis bei der Drehzahl  $n$  ist somit:

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{2n\pi}{60\omega_0} = 2,36.$$

Schließlich ergibt sich die vertikale Schwingungsamplitude:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \frac{m_U r_U}{M} \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}} \\ &= \hat{q}_{\infty} \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}} \\ &= 0,388 \text{ cm.} \end{aligned}$$

**12.10 •••** Ein System aus einer Masse, zwei Federn  $c_1$  und  $c_2$  sowie einem Dämpfer  $d$  wird durch einen Nocken mit Stößel angeregt. Der Nocken rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und erzeugt am masselosen Stößel eine sägezahnförmige Hubkurve  $u_s(t)$  mit der maximalen Hubhöhe  $A$ .



Ermitteln Sie die stationäre Bewegung  $q(t)$  der Masse  $m$ .

**Resultat:**

$$q(t) = \frac{c_2 A}{c_1 + c_2} \cdot \left[ \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi \sqrt{(1 - k^2 \eta^2)^2 + (2Dk\eta)^2}} \sin(k\Omega t - \psi_k) \right]$$

**Ausführliche Lösung:** Die Bewegungsgleichung des Systems lautet:

$$m\ddot{q} + d\dot{q} + (c_1 + c_2)q = c_2 u_s(t)$$

und die Eigenkreisfrequenz beträgt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}.$$

Die sägezahnförmige Hubkurve  $u_s(t)$  lässt sich in eine Fourier-Reihe zerlegen und führt zu der Form:

$$u_s(t) = \frac{A}{2} \left[ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(k\Omega t) \right].$$

Damit hat das Schwingungssystem folgende Erregerkraft:

$$F(t) = c_2 u_s(t) = \frac{c_2 A}{2} - c_2 A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin(k\Omega t).$$

Der erste Term von  $F(t)$  ist  $\frac{1}{2}c_2 A$  und entspricht einer Sprungkrafterregung, deren stationäre Systemantwort lautet:

$$q_0(t) = \frac{A}{2} \frac{c_2}{c_1 + c_2}.$$

Für den  $k$ -ten Term  $c_2 A \frac{1}{k\pi} \sin(k\Omega t)$  lautet die Systemantwort:

$$q_k(t) = \frac{A}{k\pi} \frac{c_2}{c_1 + c_2} \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2 \eta^2)^2 + (2Dk\eta)^2}} \sin(k\Omega t - \psi_k),$$

wobei die folgenden Abkürzungen gelten:

$$D = \frac{d}{2m\omega_0}, \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad \psi_k = \arctan\left(\frac{2Dk\eta}{1 - k^2 \eta^2}\right).$$

Damit ergibt sich aus dem Superpositionsprinzip die gesamte stationäre Bewegung der Masse:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \\ &= \frac{c_2 A}{c_1 + c_2} \cdot \left[ \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi \sqrt{(1 - k^2 \eta^2)^2 + (2Dk\eta)^2}} \sin(k\Omega t - \psi_k) \right]. \end{aligned}$$