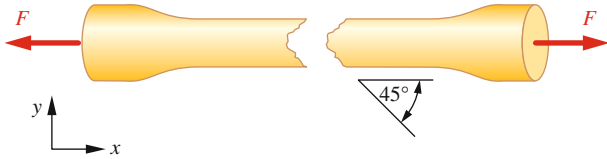


Aus Kapitel 4

Aufgaben

4.1 • Zugproben duktiler Werkstoffe reißen im Zugversuch regelmäßig mit einer größtenteils um 45° zur Krafrichtung geneigten Bruchfläche.



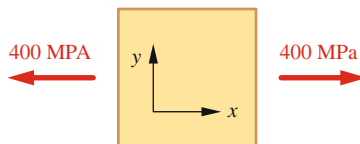
Analysieren Sie die Spannungsverhältnisse in einer solchen Zugprobe des Querschnitts 20 mm^2 , die unter einer Zugkraft von $F = 8 \text{ kN}$ gebrochen ist, in den folgenden Schritten:

1. Schneiden Sie ein Stück der Zugprobe frei und tragen Sie die angreifenden Spannungen in einen x, y -Lageplan ein.
2. Wie lautet der Spannungstensor?
3. Zeichnen Sie den Mohr'schen Spannungskreis.
4. In welchem Winkel treten die Hauptschubspannungen τ_{\max} auf und wie groß sind sie? Zeichnen Sie für das $1^*, 2^*$ -Hauptschubspannungssystem einen entsprechend gedrehten Lageplan und tragen Sie in diesen alle auftretenden Spannungen ein.
5. Was ist aus werkstoffkundlicher Sicht der Grund für die um 45° geneigte Bruchfläche?

Resultat: Die Hauptschubspannungen betragen $\tau_{\max} = 200 \text{ MPa}$.

Ausführliche Lösung:

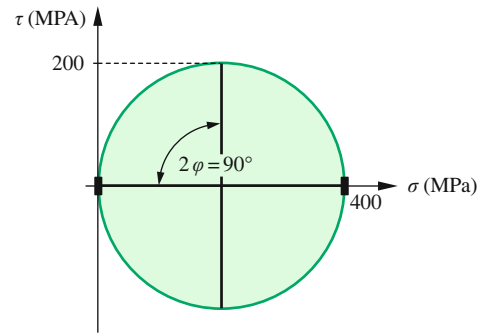
1. Lageplan:



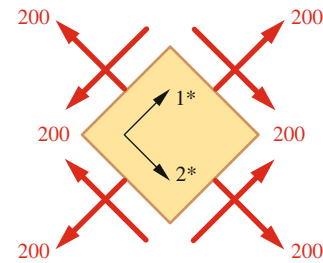
- 2.

$$S = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{xy} \text{ MPa}$$

3. Mohr'scher Spannungskreis:



4. Lageplan im gedrehten Koordinatensystem (alle Zahlenwerte in MPa):



5. Versetzungsgleiten auf den Ebenen der größten Schubspannungen.

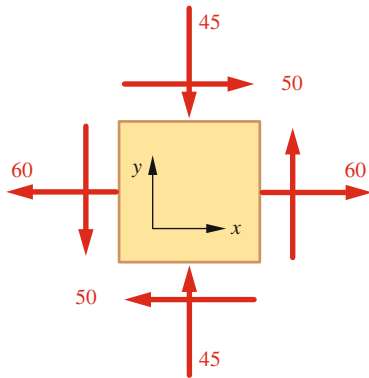
4.2 • Auf der freien Oberfläche eines Bauteils herrschen die Spannungen $\sigma_x = 60 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -45 \text{ MPa}$ und $\tau_{xy} = 50 \text{ MPa}$.

1. Tragen Sie die Spannungen in einen Lageplan ein.
2. Zeichnen Sie den Mohr'schen Spannungskreis.
3. Wie groß sind die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sowie die Hauptschubspannung τ_{\max} ?
4. Welcher Winkel liegt zwischen dem x, y -Koordinatensystem und den Hauptachsensystem?

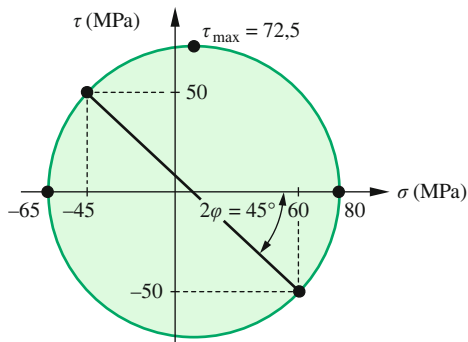
Resultat: $\sigma_1 = 80 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -65 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 72,5 \text{ MPa}$, $\varphi = 22^\circ$.

Ausführliche Lösung:

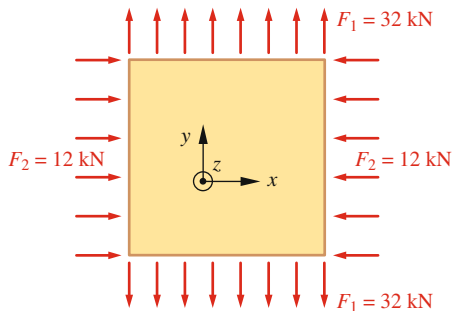
1. Lageplan (alle Zahlenwerte in MPa):



2. Mohr'scher Spannungskreis:

3. Aus dem Mohr'schen Spannungskreis abgelesen: $\sigma_1 = 80 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -65 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 72,5 \text{ MPa}$.4. Aus dem Mohr'schen Spannungskreis abgelesen: $\varphi = 22^\circ$.

4.3 • Am dargestellten, 4 mm starken, quadratischen Blech der Seitenlängen 100 mm wird mit gleichmäßig über die jeweiligen Stirnseiten verteilten Kräften $F_1 = 32 \text{ kN}$ gezogen und $F_2 = 12 \text{ kN}$ gedrückt.



1. Welche Art von Spannungszustand liegt vor?

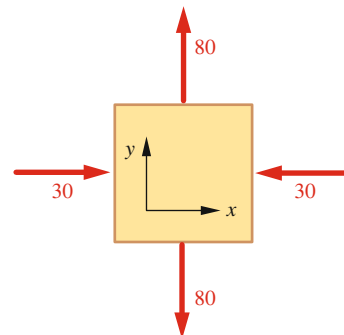
- Wie lautet der Spannungstensor im x, y -Koordinatensystem?
- Tragen Sie die vorliegenden Spannungskomponenten in einen Lageplan ein und zeichnen Sie den Mohr'schen Spannungskreis.
- Um welchen Winkel ist das Koordinatensystem zu drehen, damit die größtmöglichen Schubspannungen auftreten?
- Wie lautet der Spannungstensor im 1*, 2*-Hauptschubspannungssystem?
- Tragen Sie Komponenten des in das Hauptschubspannungssystem gedrehten Spannungstensors in einen entsprechend gedrehten Lageplan ein.

Resultat: $\sigma_x = -30 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 80 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 0 \text{ MPa}$.Zwischen dem x, y -Koordinatensystem und dem Hauptschubspannungssystem liegt ein Winkel von 45° . $\sigma_{1*} = \sigma_{2*} = 25 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 55 \text{ MPa}$.**Ausführliche Lösung:**

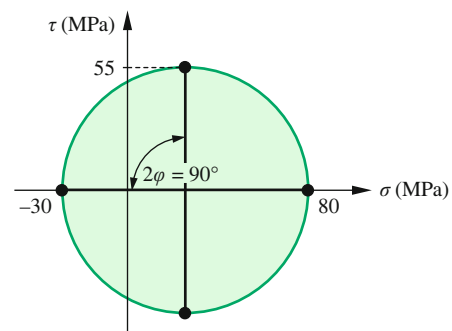
- Ebener Spannungszustand, da freie, unbelastete Oberfläche.
-

$$S = \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & 80 \end{pmatrix}_{xy} \text{ MPa}$$

3. Lageplan (alle Zahlenwerte in MPa):



Mohr'scher Spannungskreis:

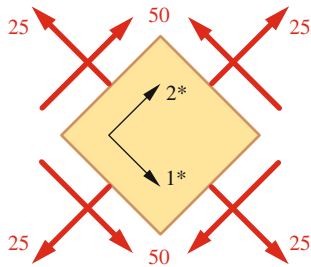


4. Zwischen dem x, y -Koordinatensystem und dem Hauptschubspannungssystem liegt ein Winkel von 45° .
5.

$$S = \begin{pmatrix} 25 & \pm 55 \\ \pm 55 & 25 \end{pmatrix}_{xy} \text{ MPa}$$

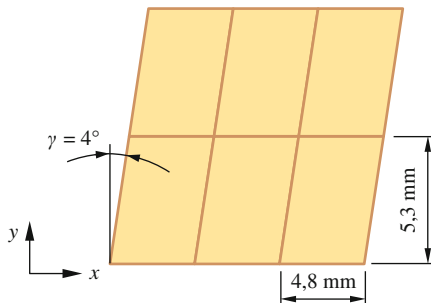
Anmerkung: Das Pluszeichen bei den Schubspannungen gilt für eine 45° -Drehung gegen den Uhrzeigersinn, das Minuszeichen für eine 45° -Drehung im Uhrzeigersinn.

6. Lageplan im gedrehten Koordinatensystem (alle Zahlenwerte in MPa):



4.4 • Im Kampf gegen die Langeweile sitzen Sie in der letzten Reihe des Hörsaals und zerren an einem Blatt karierten Papiers. Dabei verformt sich das Blatt wie folgt:

- Unverformter Zustand: quadratisches Karomuster mit Linienabständen von jeweils 5 mm.
- Verformter Zustand: siehe folgende, nichtmaßstäbliche Skizze:



1. Wie lautet der Verzerrungstensor in der x, y -Ebene?
2. Zeichnen Sie die vorliegenden Verzerrungen in einen Lageplan ein.
3. Zeichnen Sie den Mohr'schen Verzerrungskreis.
4. Wie groß sind die Hauptdehnungen ϵ_1 und ϵ_2 ? Zeichnen Sie die im Hauptachsensystem herrschenden Dehnungen in einen entsprechend gedehnten Lageplan ein.

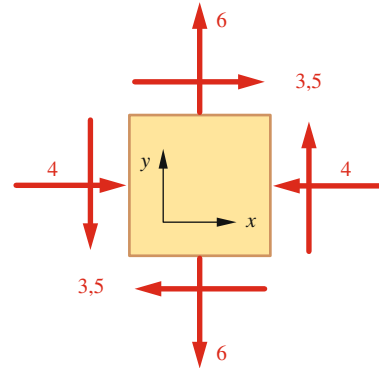
Resultat: $\epsilon_x = -4\%$, $\epsilon_y = 6\%$, $\epsilon_{xy} = 3,5\%$, $\epsilon_1 = 7,1\%$, $\epsilon_2 = -5,1\%$.

Ausführliche Lösung:

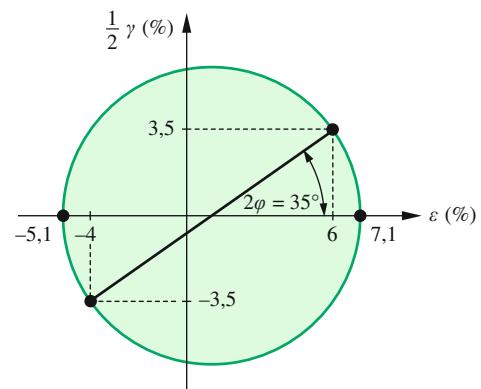
1.

$$V = \begin{pmatrix} -4 & 3,5 \\ 3,5 & 6 \end{pmatrix}_{xy} \%$$

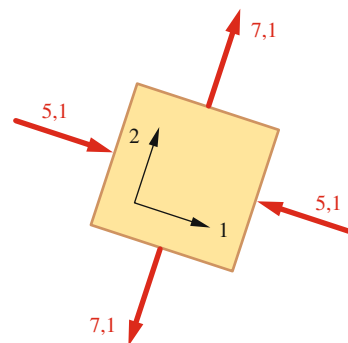
2. Lageplan (alle Zahlenwerte in Prozent):



3. Mohr'scher Verzerrungskreis:



4. Aus dem Mohr'schen Verzerrungskreis abgelesen: $\epsilon_1 = 7,1\%$, $\epsilon_2 = -5,1\%$.



4.5 • Leiten Sie eine für die meisten gängigen Konstruktionswerkstoffe gültige, einfache Faustformel zur

Berechnung des Schubmoduls G allein aus dem Elastizitätsmodul E her.

Resultat: $G = \frac{E}{2,6}$

Ausführliche Lösung: Da die Querkontraktionszahl für die meisten gängigen Konstruktionswerkstoffe um 0,3 liegt, gilt $G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} = \frac{E}{2,6}$.

4.6 • Welcher der beiden Verzerrungstensoren ist „schlimmer“, V_1 oder V_2 ?

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix} \% ,$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,4 \\ -0,4 & 0,9 \end{pmatrix} \%$$

Resultat: Keiner, beide beziehen sich auf denselben Verzerrungszustand.

Ausführliche Lösung: Man kann sich leicht am Mohr'schen Verzerrungskreis überzeugen, dass beide Verzerrungstensoren auf demselben Mohrkreis liegen, sie sind also gleich „schlimm“.

4.7 • Drei gleich große Würfel der Kantenlänge $a = 5$ cm, von denen der erste aus Stahl ($E = 205$ GPa, $\nu = 0,3$), der zweite aus Aluminium ($E = 70$ GPa, $\nu = 0,3$) und der dritte aus PVC ($E = 0,5$ GPa, $\nu = 0,5$) besteht, fallen im Marianengraben auf die mit 11.034 m tiefste Stelle des Meeresgrundes.

1. Wie groß ist dort der Wasserdruck p in N/mm²?
2. Wie lautet der Spannungstensor?
3. Bestimmen Sie mithilfe des Hooke'schen Gesetzes den dazugehörigen Verzerrungstensor.
4. Welche Volumenänderung (in cm³) erfahren die drei Würfel?
5. Welche Eigenschaft haben demnach Stoffe der Querkontraktionszahl $\nu = 0,5$?

Resultat:

1. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -110,4$ MPa.
3. Stahl: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -0,215$ ‰.
Alu: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -0,631$ ‰.
PVC $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$.
4. $\Delta V_{\text{Stahl}} = -0,081$ cm³, $\Delta V_{\text{Alu}} = -0,237$ cm³, $\Delta V_{\text{PVC}} = 0$ cm³.

Ausführliche Lösung:

1. Auf einem Quadratmeter Fläche lastet eine Gewichtskraft von $1 \text{ m}^2 \cdot 11.034 \text{ m} \cdot 1,02 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,104 \cdot 10^8 \text{ N}$. $\Rightarrow p = 1,104 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{10^6 \text{ mm}^2} = 110,4$ MPa.

2.

$$S = \begin{pmatrix} -110,4 & 0 & 0 \\ 0 & -110,4 & 0 \\ 0 & 0 & -110,4 \end{pmatrix}_{xyz} \text{ MPa.}$$

3.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$= \frac{1 - 2\nu}{E} (-110,4 \text{ MPa})$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{x,\text{Stahl}} = -0,215 \text{ ‰}, \varepsilon_{x,\text{Alu}} = -0,631 \text{ ‰}, \varepsilon_{x,\text{PVC}} = 0 \text{ ‰}.$$

4.

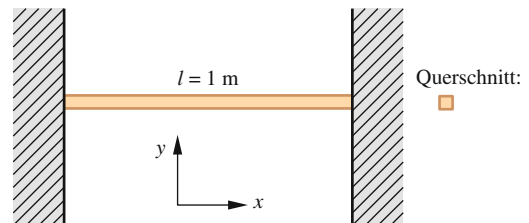
$$\Delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \cdot V \text{ mit } V = 125 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \Delta V_{\text{Stahl}} = -0,081 \text{ cm}^3, \Delta V_{\text{Alu}} = -0,237 \text{ cm}^3,$$

$$\Delta V_{\text{PVC}} = 0 \text{ cm}^3.$$

5. Sie sind inkompressibel.

4.8 •• Eine quadratische dünne Stahlstange der Länge $l = 1$ m (Materialdaten: $E = 205$ MPa, $\nu = 0,3$, $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) wird zwischen zwei starren Betonwänden eingemauert. Nach der Montage erwärmt sich die Stahlstange um $\Delta T = 40$ K.



1. Wie groß sind die Dehnung ε_x sowie die Spannungen σ_y , σ_z und alle Schubspannungen im Stab? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.
2. Berechnen Sie mithilfe des Hooke'schen Gesetzes alle anderen Komponenten von Spannungs- und Verzerrungstensor.

Resultat:

1. $\varepsilon_x = 0$. Die y - und z -Flächen sind freie Oberflächen. Alle Spannungskomponenten mit den Indizes y oder z verschwinden: $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.
2. $\sigma_x = -82$ MPa, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0,52$ ‰

Ausführliche Lösung:

1. $\varepsilon_x = 0$, da beide Enden der Stange in x -Richtung fixiert sind. Die y - und z -Flächen sind freie Oberflächen, sodass alle Spannungskomponenten mit den Indizes y oder z verschwinden: $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

$$\begin{aligned}
 2. \quad \sigma_x \text{ aus } \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\
 &\quad - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T \\
 \Rightarrow \sigma_x &= -82 \text{ MPa.} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] = 0,52 \text{ ‰, } \varepsilon_z = \varepsilon_y \\
 &= 0,52 \text{ ‰.}
 \end{aligned}$$

Alle Gleitungen verschwinden.

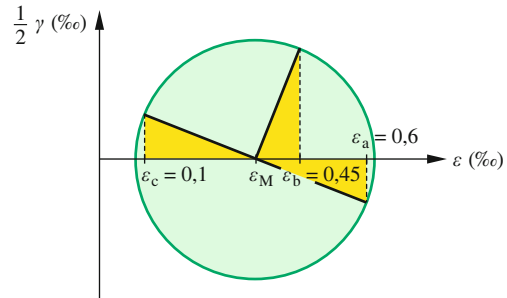
4.9 •• An einem Bauteil aus Aluminium ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$) werden mit einer DMS-Rosette die Dehnungen $\varepsilon_a = 0,6 \text{ ‰}$, $\varepsilon_b = 0,45 \text{ ‰}$ und $\varepsilon_c = 0,1 \text{ ‰}$ gemessen. Zwischen den DMS-Streifen (a), (b) und (c) liegen jeweils Winkel von 45° gegen den Uhrzeigersinn.

Wie groß sind die Hauptspannungen und in welche Richtung sind sie orientiert?

Resultat: $\sigma_1 = 49,5 \text{ MPa}$ und $\sigma_2 = 20,5 \text{ MPa}$.

Ausführliche Lösung: Der Mittelpunkt des Mohr'schen Verzerrungskreises liegt bei $\varepsilon_M = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0,35 \text{ ‰}$.

Die fehlende Gleitung (um den Verzerrungskreis zu zeichnen) beträgt $\frac{\gamma_{ac}}{2} = \varepsilon_b - \varepsilon_M = 0,1 \text{ ‰}$. Nun können wir den Mohr'schen Verzerrungskreis zeichnen:



Als Hauptdehnungen lesen wir ab: $\varepsilon_1 = 0,62 \text{ ‰}$ und $\varepsilon_2 = 0,08 \text{ ‰}$. Mit dem Hooke'schen Gesetz für den ESZ berechnen wir daraus als Hauptspannungen

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{70 \text{ GPa}}{1-0,3^2} \left(0,62 + 0,3 \cdot 0,08 \right) \cdot \frac{1}{1000} = 49,5 \text{ MPa} \quad \text{und} \\
 \sigma_2 &= \frac{70 \text{ GPa}}{1-0,3^2} \left(0,08 + 0,3 \cdot 0,62 \right) \cdot \frac{1}{1000} = 20,5 \text{ MPa.}
 \end{aligned}$$