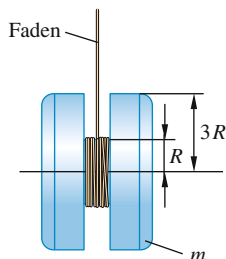


# Aus Kapitel 11

## Aufgaben

**11.1 •** Der Faden eines Jo-Jos wird festgehalten, während das Jo-Jo nach unten beschleunigt.



Wie groß ist die Beschleunigung des Schwerpunktes, wenn der Radius der Walze, auf dem der Faden aufgewickelt ist,  $R$  beträgt und das Jo-Jo selbst als homogene Scheibe der Masse  $m$  mit Radius  $3R$  betrachtet werden kann? Zur Lösung soll das Prinzip von d'Alembert in Lagrange'scher Fassung verwendet werden.

**Resultat:**

$$\ddot{x} = \frac{2}{11}g$$

**Ausführliche Lösung:** Das System hat einen Freiheitsgrad. Die virtuelle Verdrehung  $\delta\varphi$  und die virtuelle Verschiebung  $\delta x$  sind über

$$\delta x = R\delta\varphi$$

gekoppelt. Analog gilt

$$\ddot{x} = R\ddot{\varphi}.$$

Bei einer virtuellen Verrückung folgt somit:

$$\delta W = mg\delta x - m\ddot{x}\delta x - J_S\ddot{\varphi}\delta\varphi = 0.$$

Mit  $J_S = m(3R)^2/2 = 9mR^2/2$  ergibt sich:

$$(mg - m\ddot{x} - \frac{9}{2}m\ddot{x})\delta x = 0.$$

Aus der Forderung, dass die Klammer verschwinden muss, erhalten wir:

$$\ddot{x} = \frac{2}{11}g.$$

**11.2 •** Lösen Sie Aufgabe 11.1 mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen.

**Resultat:**

$$\ddot{x} = \frac{2}{11}g$$

**Ausführliche Lösung:** Das System hat einen Freiheitsgrad. Wir können als generalisierte Koordinate entweder den Verdrehwinkel  $\varphi$  oder die Verschiebung  $x$  nach unten einführen. Wir wählen im Folgenden  $x$ . Damit gilt

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{R}.$$

Die Bewegungsgleichung erhalten wir aus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x.$$

Da ein konservatives System vorliegt, ist  $Q_x = 0$ , und für  $L$  gilt

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$$

mit

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_S\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + \frac{9}{2}m\dot{x}^2) \\ &= \frac{11}{4}m\dot{x}^2, \end{aligned}$$

$$E_{\text{pot}} = -mgx.$$

Hierbei wurde  $J_S = 9mR^2/2$  eingesetzt. Somit folgt für  $L$ :

$$L = \frac{11}{4}m\dot{x}^2 + mgx$$

und damit für die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{11}{2}m\dot{x}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{11}{2}m\ddot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= mg. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt die Bewegungsgleichung

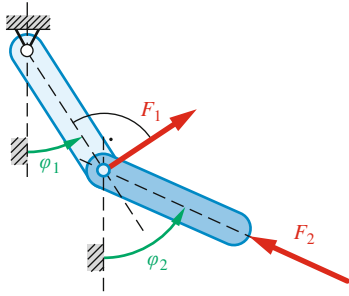
$$\frac{11}{2}m\ddot{x} - mg = 0,$$

aus der die Beschleunigung zu

$$\ddot{x} = \frac{2}{11}g$$

bestimmt wird.

**11.3 ••** An dem abgebildeten Doppelpendel greifen die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  an. Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Wie groß ist die virtuelle Arbeit bei einer virtuellen Verrückung?



**Resultat:**

$$\delta W = [F_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)F_2]l_1\delta\varphi_1$$

**Ausführliche Lösung:** Die virtuelle Arbeit der beiden Kräfte berechnet sich aus

$$\delta W = F_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + F_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2.$$

Die Kräfte sind mit

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 \end{pmatrix} F_1,$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_2 \\ -\cos \varphi_2 \end{pmatrix} F_2$$

gegeben, wenn wir  $x$  nach rechts und  $y$  nach unten positiv nehmen. Die virtuellen Verschiebungen werden aus den Ortsvektoren der Kraftangriffspunkte bestimmt:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \sin \varphi_1 \\ l_1 \cos \varphi_1 \end{pmatrix},$$

$$\delta \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \cos \varphi_1 \\ -l_1 \sin \varphi_1 \end{pmatrix} \delta \varphi_1,$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \\ l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \end{pmatrix},$$

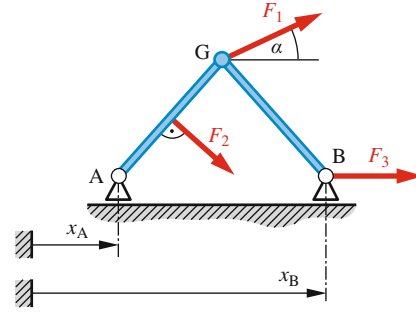
$$\delta \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \cos \varphi_1 \\ -l_1 \sin \varphi_1 \end{pmatrix} \delta \varphi_1 + \begin{pmatrix} l_2 \cos \varphi_2 \\ -l_2 \sin \varphi_2 \end{pmatrix} \delta \varphi_2$$

Auswertung der Skalarprodukte ergibt

$$\delta W = [F_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)F_2]l_1\delta\varphi_1.$$

**11.4 ••** Der abgebildete Zweischlag besteht aus zwei Stäben der Länge  $l$ . Die Punkte A und B können sich horizontal verschieben, ihre Lage wird durch die Koordinaten  $x_A$  und  $x_B$  beschrieben. Am Gelenk G greift die Kraft  $F_1$  unter dem Winkel  $\alpha$  an. Am linken Stab wirkt mittig die

Kraft  $F_2$  stets senkrecht zur Stab längsachse und am Punkt B die horizontale Kraft  $F_3$ .



Wie groß ist die virtuelle Arbeit? Was ergibt sich für die verallgemeinerten Kräfte?

**Resultat:**

$$F_A = \frac{1}{2} \cos \alpha F_1 + \frac{x_B - x_A}{2\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_1 \sin \alpha + \frac{3}{8l} \sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2} F_2 - \frac{(x_B - x_A)^2}{8l\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_2,$$

$$F_B = \frac{1}{2} \cos \alpha F_1 + \frac{x_B - x_A}{2\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_1 \sin \alpha + \frac{1}{8l} \sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2} F_2 + \frac{(x_B - x_A)^2}{8l\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_2 + F_3.$$

**Ausführliche Lösung:** Zunächst werden die Ortsvektoren zu den Kraftangriffspunkten bestimmt. Mit

$$\cos \varphi = \frac{x_B - x_A}{2l}$$

für den Winkel  $\varphi$  zwischen den Stäben und der Horizontalen folgt

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{1}{2l} \sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}$$

und damit

$$\mathbf{r}_G = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{1}{2} \sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{F_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x_A + \frac{1}{4}x_B \\ \frac{1}{4} \sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus berechnen sich die virtuellen Verschiebungen zu

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{r}_G &= \begin{pmatrix} \frac{\delta x_A + \delta x_B}{2} \\ -\frac{(x_B - x_A)(\delta x_B - \delta x_A)}{2\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} \end{pmatrix}, \\ \delta \mathbf{r}_{F_2} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\delta x_A + \frac{1}{4}\delta x_B \\ -\frac{(x_B - x_A)(\delta x_B - \delta x_A)}{4\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} \end{pmatrix}, \\ \delta \mathbf{r}_B &= \begin{pmatrix} \delta x_B \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Kraftvektoren sind durch

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} F_1, \\ \mathbf{F}_2 &= \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} F_2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2l}\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2} \\ -\frac{x_B - x_A}{2l} \end{pmatrix} F_2, \\ \mathbf{F}_3 &= \begin{pmatrix} F_3 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

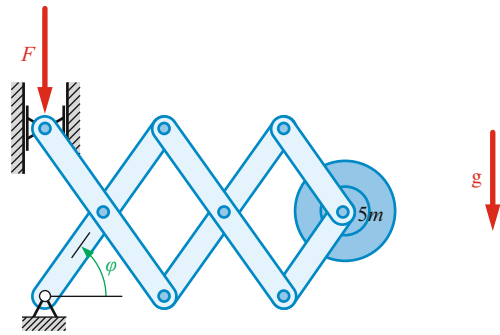
Die virtuelle Arbeit beträgt

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_G + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_2} + \mathbf{F}_3 \cdot \delta \mathbf{r}_B \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha F_1 \delta x_A + \frac{1}{2} \cos \alpha F_1 \delta x_B \\ &\quad - \frac{(x_B - x_A)(\delta x_B - \delta x_A)}{2\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_1 \sin \alpha \\ &\quad + \frac{3}{8l} \sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2} F_2 \delta x_A \\ &\quad + \frac{1}{8l} \sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2} F_2 \delta x_B \\ &\quad + \frac{(x_B - x_A)^2}{8l\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_2 \delta x_B \\ &\quad - \frac{(x_B - x_A)^2}{8l\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_2 \delta x_A + F_3 \delta x_B \\ &= \left( \frac{1}{2} \cos \alpha F_1 + \frac{x_B - x_A}{2\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_1 \sin \alpha \right. \\ &\quad + \frac{3}{8l} \sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2} F_2 \\ &\quad \left. - \frac{(x_B - x_A)^2}{8l\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_2 \right) \delta x_A \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} \cos \alpha F_1 + \frac{x_B - x_A}{2\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_1 \sin \alpha \right. \\ &\quad + \frac{1}{8l} \sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2} F_2 \\ &\quad \left. + \frac{(x_B - x_A)^2}{8l\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_2 + F_3 \right) \delta x_B.\end{aligned}$$

Daraus folgen die verallgemeinerten Kräfte

$$\begin{aligned}F_A &= \frac{1}{2} \cos \alpha F_1 + \frac{x_B - x_A}{2\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_1 \sin \alpha \\ &\quad + \frac{3}{8l} \sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2} F_2 - \frac{(x_B - x_A)^2}{8l\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_2, \\ F_B &= \frac{1}{2} \cos \alpha F_1 + \frac{x_B - x_A}{2\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_1 \sin \alpha \\ &\quad + \frac{1}{8l} \sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2} F_2 \\ &\quad + \frac{(x_B - x_A)^2}{8l\sqrt{4l^2 - (x_B - x_A)^2}} F_2 + F_3.\end{aligned}$$

**11.5 ••** Über den abgebildeten Klappmechanismus wird der Massenpunkt mithilfe der Kraft  $F$  beschleunigt.



Der Massenpunkt hat die Masse  $5m$ , die Stäbe jeweils die Masse  $m/2$  und die Länge  $l$  beziehungsweise  $m/4$  und  $l/2$ . Leiten Sie die Bewegungsgleichung mithilfe des Prinzips von d'Alembert her. Überprüfen Sie das Ergebnis mit den Lagrange'schen Gleichungen 2. Art.

**Resultat:**

$$\begin{aligned}\frac{25}{12} ml^2 \ddot{\varphi} + \frac{275}{8} ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \frac{275}{8} ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ + \frac{15}{4} mgl \cos \varphi + Fl \cos \varphi = 0\end{aligned}$$

**Ausführliche Lösung:** Für die Lösung mit Hilfe des Prinzips von d'Alembert in Lagrangescher Fassung werden zunächst die Ortsvektoren zu den Schwerpunkten der Stäbe und des Massenpunktes bestimmt und daraus die Beschleunigungen und die virtuellen Verschiebungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{1,2} &= \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \cos \varphi \\ \frac{l}{2} \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}_{3,4} &= \begin{pmatrix} \frac{3l}{2} \cos \varphi \\ \frac{l}{2} \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}_5 &= \begin{pmatrix} \frac{9l}{4} \cos \varphi \\ \frac{l}{4} \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}_6 &= \begin{pmatrix} \frac{9l}{4} \cos \varphi \\ \frac{3l}{4} \sin \varphi \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_M &= \begin{pmatrix} \frac{5l}{2} \cos \varphi \\ \frac{l}{2} \sin \varphi \end{pmatrix}, \\
\mathbf{r}_F &= \begin{pmatrix} 0 \\ l \sin \varphi \end{pmatrix}, \\
\dot{\mathbf{r}}_{1,2} &= \begin{pmatrix} -\frac{l}{2} \sin \varphi \\ \frac{l}{2} \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi}, \\
\dot{\mathbf{r}}_{3,4} &= \begin{pmatrix} -\frac{3l}{2} \sin \varphi \\ \frac{l}{2} \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi}, \\
\dot{\mathbf{r}}_5 &= \begin{pmatrix} -\frac{9l}{4} \sin \varphi \\ \frac{l}{4} \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi}, \\
\dot{\mathbf{r}}_6 &= \begin{pmatrix} -\frac{9l}{4} \sin \varphi \\ \frac{3l}{4} \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi}, \\
\dot{\mathbf{r}}_M &= \begin{pmatrix} -\frac{5l}{2} \sin \varphi \\ \frac{l}{2} \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi}, \\
\ddot{\mathbf{r}}_{1,2} &= \begin{pmatrix} \frac{l}{2} (-\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \\ \frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \end{pmatrix}, \\
\ddot{\mathbf{r}}_{3,4} &= \begin{pmatrix} \frac{3l}{2} (-\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \\ \frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \end{pmatrix}, \\
\ddot{\mathbf{r}}_5 &= \begin{pmatrix} \frac{9l}{4} (-\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \\ \frac{l}{4} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \end{pmatrix}, \\
\ddot{\mathbf{r}}_6 &= \begin{pmatrix} \frac{9l}{4} (-\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \\ \frac{3l}{4} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \end{pmatrix}, \\
\ddot{\mathbf{r}}_M &= \begin{pmatrix} \frac{5l}{2} (-\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \\ \frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \end{pmatrix}, \\
\delta \mathbf{r}_{1,2} &= \begin{pmatrix} -\frac{l}{2} \sin \varphi \\ \frac{l}{2} \cos \varphi \end{pmatrix} \delta \varphi, \\
\delta \mathbf{r}_{3,4} &= \begin{pmatrix} -\frac{3l}{2} \sin \varphi \\ \frac{l}{2} \cos \varphi \end{pmatrix} \delta \varphi, \\
\delta \mathbf{r}_5 &= \begin{pmatrix} -\frac{9l}{4} \sin \varphi \\ \frac{l}{4} \cos \varphi \end{pmatrix} \delta \varphi, \\
\delta \mathbf{r}_6 &= \begin{pmatrix} -\frac{9l}{4} \sin \varphi \\ \frac{3l}{4} \cos \varphi \end{pmatrix} \delta \varphi, \\
\delta \mathbf{r}_M &= \begin{pmatrix} -\frac{5l}{2} \sin \varphi \\ \frac{l}{2} \cos \varphi \end{pmatrix} \delta \varphi, \\
\delta \mathbf{r}_F &= \begin{pmatrix} 0 \\ l \cos \varphi \end{pmatrix} \delta \varphi.
\end{aligned}$$

Wenn wir Winkelverdrehungen entgegen dem Uhrzeigersinn positiv annehmen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,3,5} &= \varphi, \\
\varphi_{2,4,6} &= -\varphi, \\
\ddot{\varphi}_{1,3,5} &= \ddot{\varphi}, \\
\ddot{\varphi}_{2,4,6} &= -\ddot{\varphi}, \\
\delta \varphi_{1,3,5} &= \delta \varphi, \\
\delta \varphi_{2,4,6} &= -\delta \varphi.
\end{aligned}$$

Eingeprägte Kräfte sind die Kraft  $F$  und die Gewichtskräfte

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix}, \\
\mathbf{G}_{1,2,3,4} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{mg}{2} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{G}_{5,6} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{mg}{4} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{G}_M &= \begin{pmatrix} 0 \\ -5mg \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die virtuelle Arbeit von eingeprägten Kräften, Trägheitskräften und Trägheitsmomenten setzt sich wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
\delta W &= \sum_{i=1}^6 (-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - M \ddot{\mathbf{r}}_M \cdot \delta \mathbf{r}_M - \sum_{i=1}^6 (-J_{S,i} \ddot{\varphi}_i \delta \varphi_i) \\
&\quad + F \cdot \delta \mathbf{r}_F + \sum_{i=1}^6 \mathbf{G}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{G}_M \cdot \delta \mathbf{r}_M.
\end{aligned}$$

mit den Massenträgheitsmomenten

$$\begin{aligned}
J_{S,1,2,3,4} &= \frac{1}{24} ml^2, \\
J_{S,5,6} &= \frac{1}{192} ml^2.
\end{aligned}$$

Die Auswertung der Skalarprodukte ergibt

$$\begin{aligned}
&\left[ 2 \frac{m}{2} \frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \left( -\frac{l}{2} \sin \varphi \right) \right. \\
&\quad + 2 \frac{m}{2} \frac{l}{2} (-\ddot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \left( \frac{l}{2} \cos \varphi \right) \\
&\quad + 2 \frac{m}{2} \frac{l}{2} (3\ddot{\varphi} \sin \varphi + 3\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \left( -\frac{3l}{2} \sin \varphi \right) \\
&\quad + 2 \frac{m}{2} \frac{l}{2} (-\ddot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \left( \frac{l}{2} \cos \varphi \right) \\
&\quad + \frac{m}{4} \frac{l}{4} (9\ddot{\varphi} \sin \varphi + 9\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \left( -\frac{9l}{4} \sin \varphi \right) \\
&\quad + \frac{m}{4} \frac{l}{4} (-\ddot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \left( \frac{l}{4} \cos \varphi \right) \\
&\quad + \frac{m}{4} \frac{l}{4} (9\ddot{\varphi} \sin \varphi + 9\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \left( -\frac{9l}{4} \sin \varphi \right) \\
&\quad + \frac{m}{4} \frac{l}{4} (-3\ddot{\varphi} \cos \varphi + 3\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \left( \frac{3l}{4} \cos \varphi \right) \\
&\quad + 5m \frac{l}{2} (5\ddot{\varphi} \sin \varphi + 5\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \left( -\frac{5l}{2} \sin \varphi \right) \\
&\quad + 5m \frac{l}{2} (-\ddot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \left( \frac{l}{2} \cos \varphi \right) \\
&\quad \left. + ml^2 \left( 2 \frac{1}{24} \ddot{\varphi} + 2 \frac{1}{24} \ddot{\varphi} + 2 \frac{1}{192} \ddot{\varphi} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$-mg \left( 2\frac{1}{2}\frac{l}{2} \cos \varphi + 2\frac{1}{2}\frac{l}{2} \cos \varphi + \frac{1}{4}\frac{l}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4}\frac{3l}{4} \cos \varphi + 5\frac{l}{2} \cos \varphi \right) - Fl \cos \varphi \Big] \delta \varphi = 0$$

oder

$$\left( -\frac{25}{12}ml^2\ddot{\varphi} - \frac{275}{8}ml^2\dot{\varphi}\sin\varphi - \frac{275}{8}ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{15}{4}mgl\cos\varphi - Fl\cos\varphi \right) \delta\varphi = 0.$$

Hieraus folgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{25}{12}ml^2\ddot{\varphi} + \frac{275}{8}ml^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi + \frac{275}{8}ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{15}{4}mgl\cos\varphi + Fl\cos\varphi = 0.$$

Zur Überprüfung mit den Lagrangeschen Gleichungen müssen die kinetische Energie, die potentielle Energie und die verallgemeinerte Kraft  $Q_\varphi$  berechnet werden. Dazu werden zunächst die Quadrate der Geschwindigkeiten bestimmt:

$$\begin{aligned} v_{1,2}^2 &= \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2, \\ v_{3,4}^2 &= \left( \frac{l^2}{4} + 2l^2\sin^2\varphi \right) \dot{\varphi}^2, \\ v_5^2 &= \left( \frac{l^2}{16} + 5l^2\sin^2\varphi \right) \dot{\varphi}^2, \\ v_6^2 &= \left( \frac{9l^2}{16} + \frac{9l^2}{2}\sin^2\varphi \right) \dot{\varphi}^2, \\ v_M^2 &= \left( \frac{l^2}{4} + 6l^2\sin^2\varphi \right) \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \sum_{i=1}^6 \left( \frac{m_i}{2} v_i^2 + \frac{J_{S,i}}{2} \dot{\varphi}_i^2 \right) + \frac{5m}{2} v_M^2 \\ &= \left( \frac{25}{24} + \frac{275}{16} \sin^2 \varphi \right) ml^2 \dot{\varphi}^2, \\ E_{\text{pot}} &= \sum_{i=1}^6 m_i g y_i + 5m y_M \\ &= 4\frac{m}{2} g \frac{l}{2} \sin \varphi + \frac{m}{4} g \frac{l}{4} \sin \varphi + \frac{m}{4} g \frac{3l}{4} \sin \varphi + 5mg \frac{l}{2} \sin \varphi \\ &= \frac{15}{4} mgl \sin \varphi, \\ \delta W &= -Fl \cos \varphi \delta \varphi, \\ Q_\varphi &= -Fl \cos \varphi. \end{aligned}$$

Das kinetische Potential

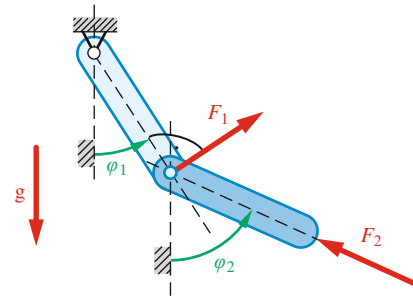
$$L = \left( \frac{25}{24} + \frac{275}{16} \sin^2 \varphi \right) ml^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{15}{4} mgl \sin \varphi$$

wird abgeleitet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \left( \frac{25}{12} + \frac{275}{8} \sin^2 \varphi \right) ml^2 \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \left( \frac{25}{12} + \frac{275}{8} \sin^2 \varphi \right) ml^2 \ddot{\varphi} + \frac{275}{4} ml^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{275}{8} ml^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - \frac{15}{4} mgl \cos \varphi. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen in die Lagrange'sche Gleichung zweiter Art ergibt sich dasselbe Ergebnis wie aus dem Prinzip von d'Alembert in Lagrange'scher Fassung.

**11.6 ••** Das Doppelpendel besteht aus zwei dünnen Stäben mit jeweils Masse  $m$  und Länge  $l$ . Belastet wird das Doppelpendel durch die zwei Kräfte  $F_1$  und  $F_2$ . Die Schwerkraft wirkt vertikal nach unten.



Wie viele Freiheitsgrade hat das Doppelpendel? Geben Sie die Bewegungsgleichungen mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art an.

**Resultat:**

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} ml^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 \\ + \frac{1}{2} ml^2 (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 \\ + \frac{3}{2} mgl \sin \varphi_1 = [F_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) F_2] l, \\ \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} ml^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 \\ + \frac{1}{2} ml^2 (-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 \\ + \frac{1}{2} mgl \sin \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

**Ausführliche Lösung:** Das Doppelpendel hat 2 Freiheitsgrade, z. B.  $q_1 = \varphi_1$  und  $q_2 = \varphi_2$ . Die kinetische und die potentielle Energie berechnen sich mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \begin{pmatrix} l \sin \varphi_1 + \frac{1}{2} l \sin \varphi_2 \\ -l \cos \varphi_1 - \frac{1}{2} l \cos \varphi_2 \end{pmatrix}, \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 l \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_2 l \cos \varphi_2 \\ l \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_2 l \sin \varphi_2 \end{pmatrix}, \\ v_2^2 &= l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}_2^2 + l^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\varphi}_2^2 \\ &= \frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}_2^2 \\ &\quad + \frac{m}{2} l^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ E_{\text{pot}} &= -mg \frac{l}{2} \cos \varphi_1 - mg(l \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_2). \end{aligned}$$

Die virtuelle Arbeit und damit die generalisierten Kräfte wurden in Aufgabe 11.3 bestimmt:

$$\begin{aligned} \delta W &= [F_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) F_2] l \delta \varphi_1, \\ Q_{\varphi_1} &= [F_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) F_2] l, \\ Q_{\varphi_2} &= 0. \end{aligned}$$

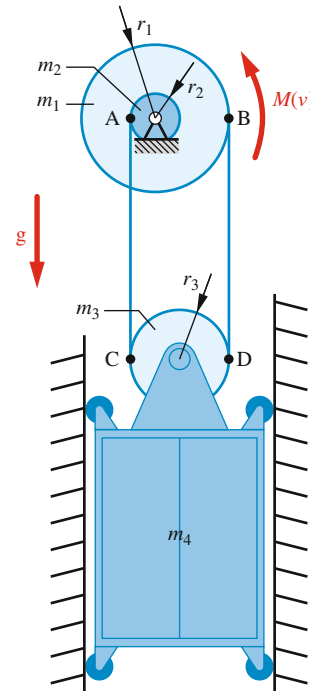
Für die Ableitungen ergeben sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} &= \frac{4}{3} ml^2 \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} ml^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} &= \frac{4}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} ml^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} ml^2 (-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \\ &\quad + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_2, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \frac{1}{3} ml^2 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} ml^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} ml^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} ml^2 (-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \\ &\quad + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_1, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= \frac{1}{2} ml^2 (-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ &\quad - \frac{3}{2} mgl \sin \varphi_1, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= \frac{1}{2} ml^2 (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} mgl \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Eingesetzt ergeben sich damit die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{4}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} ml^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} ml^2 (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 \\ &\quad + \frac{3}{2} mgl \sin \varphi_1 \\ &= \{F_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) F_2\} l, \\ &\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} ml^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} ml^2 (-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} mgl \sin \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

**11.7 ••** Das Modell eines Aufzuges besteht aus drei Walzen mit den Radien  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  und den Massen  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ . Die Last mit der Masse  $m_4$  hängt an der unteren Scheibe. Die oberen beiden Walzen sind fest verbunden, sodass sie sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  drehen. An ihnen wirkt das Antriebsmoment  $M_A$  und ein Dämpfungsmoment  $k_D \omega$  aufgrund eines viskosen Drehdämpfers.



Mit dem Prinzip von d'Alembert ist die Bewegungsgleichung herzuleiten.

**Resultat:**

$$\left[ (m_3 + m_4) \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 + \frac{m_1}{2} r_1^2 + \frac{m_2}{2} r_2^2 + \frac{m_3}{2} r_3^2 \right] \ddot{\varphi} + (m_3 + m_4) g \frac{r_1 - r_2}{2} + k_D \dot{\varphi} = M_A.$$

**Ausführliche Lösung:** Wenn wir Geschwindigkeiten nach oben positiv annehmen, so gilt:

$$\begin{aligned} v_A &= -r_2 \omega, \\ v_B &= r_1 \omega, \\ v_C &= -r_2 \omega, \\ v_D &= r_1 \omega. \end{aligned}$$

Daraus lassen sich die Geschwindigkeit des Schwerpunkts von Walze 3 und deren Winkelgeschwindigkeit bestimmen:

$$\begin{aligned} v_{S_3} &= \frac{r_1 - r_2}{2} \omega, \\ \omega_3 &= \frac{r_1 + r_2}{2r_3} \omega. \end{aligned}$$

Aus der Zeichnung sehen wir, dass

$$2r_3 = r_1 + r_2$$

gilt und deshalb:

$$\omega_3 = \omega.$$

Bei einer virtuellen Verschiebung haben wir mit  $\dot{\varphi} = \omega$  folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \delta \varphi_1 &= \delta \varphi, \\ \delta \varphi_2 &= \delta \varphi, \\ \delta \varphi_3 &= \delta \varphi, \\ \delta \varphi_4 &= 0, \\ \delta x_1 &= 0, \\ \delta x_2 &= 0, \\ \delta x_3 &= \frac{r_1 - r_2}{2} \delta \varphi, \\ \delta x_4 &= \frac{r_1 - r_2}{2} \delta \varphi. \end{aligned}$$

Die Massenträgheitsmomente sind mit

$$\begin{aligned} J_{S_1} &= \frac{m_1}{2} r_1^2, \\ J_{S_2} &= \frac{m_2}{2} r_2^2, \\ J_{S_3} &= \frac{m_3}{2} r_3^2 \end{aligned}$$

gegeben. Mit dem Prinzip von d'Alembert in Lagrange'scher Fassung ergibt sich:

$$\begin{aligned} &-(m_3 + m_4) \frac{r_1 - r_2}{2} \ddot{\varphi} \frac{r_1 - r_2}{2} \delta \varphi \\ &-(m_3 + m_4) g \frac{r_1 - r_2}{2} \delta \varphi \\ &-(\frac{m_1}{2} r_1^2 + \frac{m_2}{2} r_2^2 + \frac{m_3}{2} r_3^2) \ddot{\varphi} \delta \varphi \\ &+ M_A \delta \varphi - k_D \omega \delta \varphi = 0 \end{aligned}$$

und damit die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} &\left[ (m_3 + m_4) \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 + \frac{m_1}{2} r_1^2 + \frac{m_2}{2} r_2^2 + \frac{m_3}{2} r_3^2 \right] \ddot{\varphi} \\ &+ (m_3 + m_4) g \frac{r_1 - r_2}{2} + k_D \dot{\varphi} = M_A. \end{aligned}$$

**11.8 ••** Leiten Sie mit den Angaben aus Aufgabe 11.7 die Bewegungsgleichungen nun auch mithilfe des Langrange'schen Formalismus her.

**Resultat:**

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{m_1}{2} r_1^2 + \frac{m_2}{2} r_2^2 + \frac{m_3}{2} r_3^2 + m_3 \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 + m_4 \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 \right] \ddot{\varphi} \\ &+ (m_3 + m_4) g \frac{r_1 - r_2}{2} + k_D \dot{\varphi} = M_A \end{aligned}$$

**Ausführliche Lösung:** Die Kinematik entnehmen wir Aufgabe 11.7:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi}, \\ \omega_2 &= \dot{\varphi}, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi}, \\ v_{S_3} &= \frac{r_1 - r_2}{2} \dot{\varphi}, \\ v_{S_4} &= \frac{r_1 - r_2}{2} \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Die kinetische Energie und die potentielle Energie berechnen sich zu

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \frac{m_1}{2} r_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2}{2} r_2^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3}{2} r_3^2 \dot{\varphi}^2 \\ &+ \frac{m_3}{2} \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_4}{2} \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{m_1}{2} r_1^2 + \frac{m_2}{2} r_2^2 + \frac{m_3}{2} r_3^2 + m_3 \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 + m_4 \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 \right] \dot{\varphi}^2, \\ E_{\text{pot}} &= (m_3 + m_4) g \frac{r_1 - r_2}{2} \varphi, \end{aligned}$$

Die virtuelle Arbeit des Antriebs- und des Dämpfungsmomentes

$$\delta W = (M_A - k_D \dot{\varphi}) \delta \varphi$$

führt auf die verallgemeinerte Kraft

$$Q_\varphi = M_A - k_D \dot{\varphi}.$$

Die Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left[ \frac{m_1}{2} r_1^2 + \frac{m_2}{2} r_2^2 + \frac{m_3}{2} r_3^2 + m_3 \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 + m_4 \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 \right] \dot{\varphi},$$

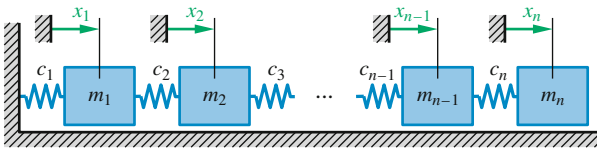
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left[ \frac{m_1}{2} r_1^2 + \frac{m_2}{2} r_2^2 + \frac{m_3}{2} r_3^2 + m_3 \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 + m_4 \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 \right] \ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -(m_3 + m_4) g \frac{r_1 - r_2}{2},$$

ergeben nach Einsetzen die Bewegungsgleichung

$$\left[ \frac{m_1}{2} r_1^2 + \frac{m_2}{2} r_2^2 + \frac{m_3}{2} r_3^2 + m_3 \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 + m_4 \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 \right] \ddot{\varphi} + (m_3 + m_4) g \frac{r_1 - r_2}{2} + k_D \dot{\varphi} = M_A.$$

**11.9 ••** Für die abgebildete Schwingerkette leite man die Bewegungsgleichungen mithilfe des Lagrange'schen Formalismus her und überprüfe das Ergebnis mithilfe des Prinzips von d'Alembert in Lagrange'scher Fassung. Wie lautet das Ergebnis für  $n = 4$ ?



**Resultat:**

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Ausführliche Lösung:** Die kinetische Energie des Systems beträgt:

$$E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2.$$

Die potentielle Energie setzt sich aus den Anteilen der einzelnen Federn zusammen, wobei beachtet werden muss, dass die erste Feder gesondert zu betrachten ist, da deren Längenänderung nur von  $m_1$  abhängt und bei den übrigen Federn von den Verschiebungen benachbarter Massen:

$$E_{\text{pot}} = \frac{c_1}{2} x_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{c_i}{2} (x_i - x_{i-1})^2.$$

Nicht konservative Kräfte liegen keine vor. Das System hat  $n$  Freiheitsgrade, sodass sich  $n$  Bewegungsgleichungen ergeben. Dazu werden zunächst die Ableitungen von

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$$

gebildet. Für die Freiheitsgrade  $x_1$  und  $x_n$  sind diese unterschiedlich zu den restlichen. Bei  $x_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n-1$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= m_i \dot{x}_i, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= m_i \ddot{x}_i, \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -c_i (x_i - x_{i-1}) - c_{i+1} (x_i - x_{i+1}), \end{aligned}$$

Der Sonderfall  $i = 1$  ergibt sich, wenn  $x_0$  zu null und der Sonderfall  $i = n$ , wenn  $c_{n+1} = 0$  gesetzt wird. Eingesetzt in die Lagrange'sche Gleichungen folgen die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) x_1 - c_2 x_2 &= 0, \\ m_i \ddot{x}_i - c_i x_{i-1} + (c_i + c_{i+1}) x_i - c_{i+1} x_{i+1} &= 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ m_n \ddot{x}_n + c_n x_n - c_n x_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Auch wenn wir das Ergebnis mithilfe dem Prinzip von d'Alembert überprüfen, müssen die Massenpunkte  $m_1$  und  $m_n$  gesondert berücksichtigt werden. Die Kräfte sind durch die Federkräfte und die Trägheitskräfte gegeben und es folgt:

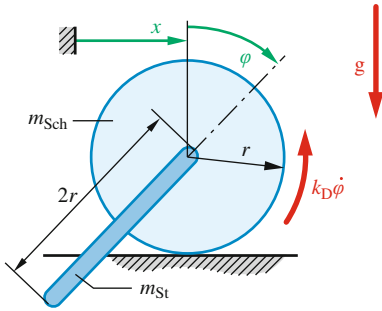
$$\begin{aligned} &[-m_1 \ddot{x}_1 - c_1 x_1 - c_2 (x_1 - x_2)] \delta x_1 \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} [-m_i \ddot{x}_i - c_i (x_i - x_{i-1}) - c_{i+1} (x_i - x_{i+1})] \delta x_i \\ &+ [-m_n \ddot{x}_n - c_n (x_n - x_{n-1})] \delta x_n = 0. \end{aligned}$$

Da die  $\delta x_i$  alle unabhängig voneinander sind, müssen die Vorfaktoren verschwinden, was zu den schon oben angegebenen Gleichungen führt.

Für den Sonderfall  $n = 4$  können die Bewegungsgleichungen in Matrizenform zusammengefasst werden:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**11.10 ••** Eine Scheibe kann auf dem Untergrund abrollen. Die Scheibe hat den Radius  $r$  und die Masse  $m_{\text{Sch}}$ . An der Scheibe ist ein Stab der Länge  $2r$  und der Masse  $m_{\text{St}}$  angeschweißt. Zur Beschreibung werden die Koordinaten  $x$  und  $\varphi$  eingeführt. Beide sind null, wenn der Stab vertikal nach unten zeigt. Der Drehung der Scheibe wirkt ein Dämpfermoment  $k_D \dot{\varphi}$  entgegen. Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Die Bewegungsgleichungen sind mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art herzuleiten.



**Resultat:**

$$\left( \frac{3}{2} m_{\text{Sch}} + \frac{7}{3} m_{\text{St}} - 2 m_{\text{St}} \cos \varphi \right) r^2 \ddot{\varphi} + m_{\text{St}} \sin \varphi r^2 \dot{\varphi}^2 + k_D \dot{\varphi} + m_{\text{St}} g r \sin \varphi = 0$$

**Ausführliche Lösung:** Das System hat einen Freiheitsgrad. Die Geschwindigkeit des Scheibenschwerpunktes beträgt  $\dot{x} = r \dot{\varphi}$ . Zur Ermittlung der Geschwindigkeit des Stangenschwerpunktes stellen wir zunächst den Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{\text{St}} = \begin{pmatrix} x - r \sin \varphi \\ r(1 - \cos \varphi) \end{pmatrix}$$

auf und leiten diesen nach der Zeit ab:

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{St}} = \begin{pmatrix} \dot{x} - r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ r(\dot{\varphi} \sin \varphi) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir:

$$v_{\text{St}}^2 = \dot{x}^2 - 2r\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + r^2\dot{\varphi}^2.$$

Daraus ergibt sich die kinetische Energie

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} m_{\text{Sch}} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_{\text{Sch}} r^2}{2} \dot{\varphi}^2 \\ &+ \frac{1}{2} m_{\text{St}} (\dot{x}^2 - 2r\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} \frac{m_{\text{St}} 4r^2}{12} \dot{\varphi}^2 \\ &= \left( \frac{3}{4} m_{\text{Sch}} + \frac{7}{6} m_{\text{St}} - m_{\text{St}} \cos \varphi \right) r^2 \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Die potentielle Energie beträgt (Nullniveau in der Höhe des Scheibenmittelpunktes):

$$E_{\text{pot}} = -m_{\text{St}} g r \cos \varphi.$$

Die virtuelle Arbeit des Dämpfungsmomentes

$$\delta W = -k_D \dot{\varphi} \delta \varphi$$

liefert die verallgemeinerte Kraft

$$Q_{\varphi} = -k_D \dot{\varphi}.$$

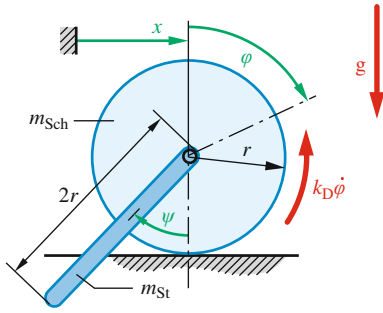
Wir berechnen die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \left( \frac{3}{2} m_{\text{Sch}} + \frac{7}{3} m_{\text{St}} - 2 m_{\text{St}} \cos \varphi \right) r^2 \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \left( \frac{3}{2} m_{\text{Sch}} + \frac{7}{3} m_{\text{St}} - 2 m_{\text{St}} \cos \varphi \right) r^2 \ddot{\varphi} \\ &+ 2 m_{\text{St}} \sin \varphi r^2 \dot{\varphi}^2, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m_{\text{St}} r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - m_{\text{St}} g r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{3}{2} m_{\text{Sch}} + \frac{7}{3} m_{\text{St}} - 2 m_{\text{St}} \cos \varphi \right) r^2 \ddot{\varphi} \\ &+ m_{\text{St}} \sin \varphi r^2 \dot{\varphi}^2 + k_D \dot{\varphi} + m_{\text{St}} g r \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

**11.11 •••** Eine Scheibe kann auf dem Untergrund abrollen. Die Scheibe hat den Radius  $r$  und die Masse  $m_{\text{Sch}}$ . Im Mittelpunkt der Scheibe ist ein Stab der Länge  $2r$  und der Masse  $m_{\text{St}}$  über ein Gelenk reibungsfrei drehbar befestigt. Zur Beschreibung der Lage werden die horizontale Koordinate  $x$  des Scheibenschwerpunktes und die Verdrehwinkel  $\varphi$  der Scheibe und  $\psi$  des Stabes eingeführt. Alle Koordinaten sind null, wenn der Stab vertikal nach unten zeigt und der Scheibenschwerpunkt sich bei  $x = 0$  befindet. Der Drehung der Scheibe wirkt ein Dämpfermoment  $k_D \dot{\varphi}$  entgegen. Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Die Bewegungsgleichungen sind mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art herzuleiten.

**Resultat:**

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}m_{\text{Sch}} + m_{\text{St}}\right) r^2 \ddot{\varphi} - m_{\text{St}} r^2 \ddot{\psi} \cos \psi \\ + m_{\text{St}} r^2 \dot{\psi}^2 \sin \psi + k_D \dot{\varphi} = 0, \\ \frac{4}{3} m_{\text{St}} r^2 \ddot{\psi} - m_{\text{St}} r^2 \ddot{\varphi} \cos \psi + m_{\text{St}} g r \sin \psi = 0. \end{aligned}$$

**Ausführliche Lösung:** Das System hat zwei Freiheitsgrade, z. B. die Winkel  $\varphi$  und  $\psi$ . Die Verschiebung  $x$  hängt vom Verdrehwinkel  $\varphi$  ab:

$$\dot{x} = r \dot{\varphi}.$$

Der Ortsvektor zum Stangenmittelpunkt ist:

$$\mathbf{r}_{\text{St}} = \begin{pmatrix} x - r \sin \psi \\ r(1 - \cos \psi) \end{pmatrix}$$

Ableiten ergibt die Geschwindigkeit:

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{St}} = \begin{pmatrix} \dot{x} - r \dot{\psi} \cos \psi \\ r(\dot{\psi} \sin \psi) \end{pmatrix}.$$

Die kinetische Energie beträgt

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} m_{\text{Sch}} (r \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \frac{m_{\text{Sch}} r^2}{2} \dot{\varphi}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_{\text{St}} (r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 - 2r^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi) + \frac{1}{2} \frac{m_{\text{St}} (2r)^2}{12} \dot{\psi}^2 \\ &= \left(\frac{3}{4} m_{\text{Sch}} + \frac{1}{2} m_{\text{St}}\right) r^2 \dot{\varphi}^2 \\ &\quad + \frac{2}{3} m_{\text{St}} r^2 \dot{\psi}^2 - m_{\text{St}} r^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi. \end{aligned}$$

Die potentielle Energie hängt nur vom Stab ab:

$$E_{\text{pot}} = -m_{\text{St}} g r \cos \psi$$

wenn das Nullniveau wieder in der Höhe des Scheibenmittelpunktes festgelegt wird. Die virtuelle Arbeit der nicht konservativen Kräfte

$$\delta W = -k_D \dot{\varphi} \delta \varphi$$

führt auf die verallgemeinerten Kräfte

$$\begin{aligned} Q_{\varphi} &= -k_D \dot{\varphi}, \\ Q_{\psi} &= 0. \end{aligned}$$

Das kinetische Potential

$$\begin{aligned} L &= E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} \\ &= \left(\frac{3}{4} m_{\text{Sch}} + \frac{1}{2} m_{\text{St}}\right) r^2 \dot{\varphi}^2 \\ &\quad + \frac{2}{3} m_{\text{St}} r^2 \dot{\psi}^2 - m_{\text{St}} r^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi \\ &\quad + m_{\text{St}} g r \cos \psi \end{aligned}$$

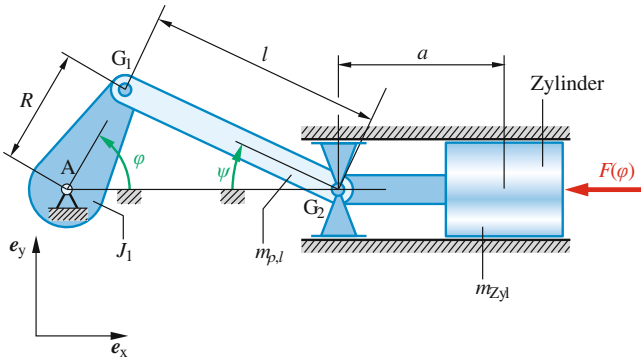
wird abgeleitet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \left(\frac{3}{2} m_{\text{Sch}} + m_{\text{St}}\right) r^2 \dot{\varphi} - m_{\text{St}} r^2 \dot{\psi} \cos \psi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \left(\frac{3}{2} m_{\text{Sch}} + m_{\text{St}}\right) r^2 \ddot{\varphi} \\ &\quad - m_{\text{St}} r^2 \ddot{\psi} \cos \psi + m_{\text{St}} r^2 \dot{\psi}^2 \sin \psi, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= \frac{4}{3} m_{\text{St}} r^2 \dot{\psi} - m_{\text{St}} r^2 \dot{\varphi} \cos \psi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{4}{3} m_{\text{St}} r^2 \ddot{\psi} - m_{\text{St}} r^2 \ddot{\varphi} \cos \psi \\ &\quad + m_{\text{St}} r^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi, \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= m_{\text{St}} r^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi - m_{\text{St}} g r \sin \psi, \end{aligned}$$

und es folgen die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} m_{\text{Sch}} + m_{\text{St}}\right) r^2 \ddot{\varphi} - m_{\text{St}} r^2 \ddot{\psi} \cos \psi + m_{\text{St}} r^2 \dot{\psi}^2 \sin \psi + k_D \dot{\varphi} &= 0, \\ \frac{4}{3} m_{\text{St}} r^2 \ddot{\psi} - m_{\text{St}} r^2 \ddot{\varphi} \cos \psi + m_{\text{St}} g r \sin \psi &= 0. \end{aligned}$$

**11.12 •••** Beim abgebildeten Einzylindermotor wirkt auf die Kolbenfläche die Druckkraft  $F(\varphi)$ . Am Abtrieb ist eine Schwungscheibe angebracht, die starr über die Motorwelle mit der Kurbel verbunden ist, und an der das Lastmoment  $M_L$  wirkt. Das Massenträgheitsmoment von Schwungscheibe, Motorwelle und Kurbel beträgt zusammen  $J_1$ . Die Pleuelstange hat die Länge  $l$ , die Masse  $m_P$  und das Massenträgheitsmoment  $J_P$  bezüglich dem Schwerpunkt, der in der Mitte des Pleuels liegt. Kreuzkopf und Zylinder haben zusammen die Masse  $m_{\text{Zyl}}$ .



Geben Sie die Bewegungsgleichung an.

**Resultat:**

$$\begin{aligned} \delta W = & -J_1 \ddot{\varphi} \delta \varphi - J_P \ddot{\psi} \delta \psi - m_{Pl} (\ddot{r}_{Pl,x} \delta r_{Pl,x} + \ddot{r}_{Pl,y} \delta r_{Pl,y}) \\ & - m_{Zyl} \ddot{x}_{Zyl} \delta x_{Zyl} - F \delta x_{Zyl} - M_L \delta \varphi \\ = & 0 \end{aligned}$$

**Ausführliche Lösung:** Wir lösen die Aufgabe mit dem Prinzip von d'Alembert in Lagrange'scher Fassung. Formal lautet dies in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \delta W = & -J_1 \ddot{\varphi} \delta \varphi - J_P \ddot{\psi} \delta \psi - m_{Pl} (\ddot{r}_{Pl,x} \delta r_{Pl,x} + \ddot{r}_{Pl,y} \delta r_{Pl,y}) \\ & - m_{Zyl} \ddot{x}_{Zyl} \delta x_{Zyl} - F \delta x_{Zyl} - M_L \delta \varphi = 0. \end{aligned}$$

Aus der Geometrie folgt:

$$R \sin \varphi = l \sin \psi$$

und damit:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{R}{l} \sin \varphi, \\ \cos \psi &= \sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi}, \\ R \cos \varphi \delta \varphi &= l \cos \psi \delta \psi, \\ \delta \psi &= \frac{R}{l} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} \delta \varphi. \end{aligned}$$

Für die Ortsvektoren gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{Pl} &= \begin{pmatrix} R \cos \varphi + \frac{l}{2} \cos \psi \\ \frac{R}{2} \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R \cos \varphi + \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi} \\ \frac{R}{2} \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}_{Pl} &= \begin{pmatrix} R \cos \varphi + l \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R \cos \varphi + l \sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die virtuellen Verschiebungen

$$\begin{aligned} \delta r_{Pl,x} &= \left( -R \sin \varphi - \frac{R^2}{2l} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} \right) \delta \varphi, \\ \delta r_{Pl,y} &= \frac{R}{2} \cos \varphi \delta \varphi, \\ \delta x_{Zyl} &= \left( -R \sin \varphi - \frac{R^2}{l} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} \right) \delta \varphi \end{aligned}$$

sowie die Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \dot{r}_{Pl,x} &= \left( -R \sin \varphi - \frac{R^2}{2l} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} \right) \dot{\varphi}, \\ \dot{r}_{Pl,y} &= \frac{R}{2} \cos \varphi \dot{\varphi}, \\ \dot{x}_{Zyl} &= \left( -R \sin \varphi - \frac{R^2}{l} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} \right) \dot{\varphi} \end{aligned}$$

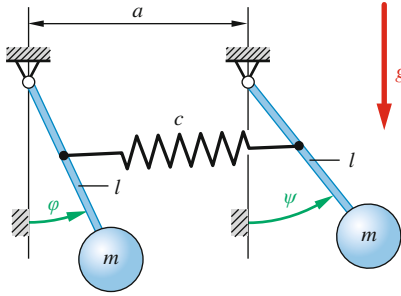
und die Beschleunigungen

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{Pl,x} &= \left( -R \sin \varphi - \frac{R^2}{2l} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} \right) \ddot{\varphi} \\ &+ \left( -R \cos \varphi - \frac{R^2}{2l} \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{R^4}{2l^3} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi})^3} \right) \dot{\varphi}^2, \\ \ddot{r}_{Pl,y} &= \frac{R}{2} \cos \varphi \ddot{\varphi} - \frac{R}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}^2, \\ \ddot{x}_{Zyl} &= \left( -R \sin \varphi - \frac{R^2}{l} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} \right) \ddot{\varphi} \\ &+ \left( -R \cos \varphi - \frac{R^2}{l} \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{R^4}{l^3} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \varphi})^3} \right) \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Damit hängen alle Größen nur noch von  $\varphi$  ab und der gemeinsame Faktor  $\delta \varphi$  kann ausgeklammert werden. Die sich ergebende Bewegungsgleichung wird aufgrund deren Komplexität hier nicht explizit angegeben.

**11.13 ••** Beim sympathischen Pendel sind zwei identische mathematische Pendel über eine Feder miteinander

verbunden. Die Pendel haben die Länge  $l$  und die Masse  $m$ . Die Feder ist jeweils in der Mitte der Pendelstangen angebracht. Vertikal nach unten wirkt die Erdbeschleunigung.



Leiten Sie die nichtlinearen Bewegungsgleichungen mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art her. Linearisieren Sie diese für  $\varphi \ll 1$  und  $\psi \ll 1$ .

**Resultat:**

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl\varphi + \frac{cl^2}{4}(\varphi - \psi) = 0,$$

$$ml^2 \ddot{\psi} + mgl\psi + \frac{cl^2}{4}(\psi - \varphi) = 0.$$

**Ausführliche Lösung:** Unter der Voraussetzung, dass für die Federverlängerung nur die horizontalen Verschiebungen der Federenden berücksichtigt werden müssen, gilt:

$$\Delta l = \frac{l}{2}(\sin \psi - \sin \varphi),$$

und die potentielle Energie beträgt

$$E_{\text{pot}} = -mg \cos \varphi - mg \cos \psi + \frac{c}{2} \frac{l^2}{4} (\sin \psi - \sin \varphi)^2$$

wenn wir das Nullniveau für das Schwerpotential in Höhe der Lager festlegen. Da es sich um mathematische Pendel handelt, erhalten wir für die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}(l\dot{\varphi})^2 + \frac{m}{2}(l\dot{\psi})^2,$$

und somit das kinetische Potential

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$$

$$= \frac{m}{2}l^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) + mg(\cos \varphi + \cos \psi)$$

$$- \frac{c}{2} \frac{l^2}{4} (\sin \psi - \sin \varphi)^2.$$

Da keine nicht konservativen Anteile vorliegen, berechnen wir die Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi - \frac{cl^2}{4}(-\sin \psi + \sin \varphi),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = ml^2 \dot{\psi},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = ml^2 \ddot{\psi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -mgl \sin \psi - \frac{cl^2}{4}(\sin \psi - \sin \varphi).$$

Daraus folgen dann die Bewegungsgleichungen

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi + \frac{cl^2}{4}(-\sin \psi + \sin \varphi) = 0,$$

$$ml^2 \ddot{\psi} + mgl \sin \psi + \frac{cl^2}{4}(\sin \psi - \sin \varphi) = 0.$$

Für kleine Winkel werden die Gleichungen linearisiert und wir erhalten:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl\varphi + \frac{cl^2}{4}(\varphi - \psi) = 0,$$

$$ml^2 \ddot{\psi} + mgl\psi + \frac{cl^2}{4}(\psi - \varphi) = 0.$$