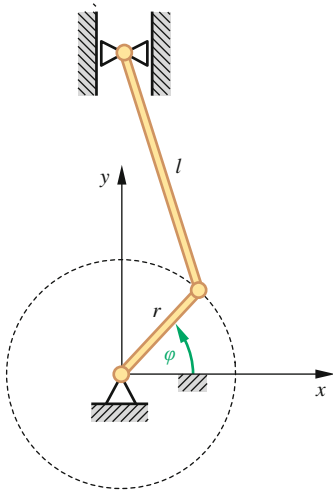


Aus Kapitel 9

Aufgaben

9.1 • Gegeben ist der abgebildete Schubkurbelmechanismus



Bestimmen Sie die Koordinaten des Momentanpols der Koppelstange in der augenblicklichen Stellung.

Resultat:

$$y_P = r \sin \varphi + l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cos^2 \varphi}$$

$$x_P = r \cos \varphi + \frac{l}{\tan \varphi} \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cos^2 \varphi}$$

Ausführliche Lösung: Der Momentanpol liegt im Schnittpunkt der Verlängerung der Kurbel mit der Horizontalen durch das verschiebbliche Lager. Aus der Geometrie gilt

$$r \cos \varphi = l \sin \psi$$

und damit

$$\sin \psi = \frac{r}{l} \cos \varphi.$$

Die y -Koordinate des Momentanpols ergibt sich zu

$$\begin{aligned} y_P &= r \sin \varphi + l \cos \psi \\ &= r \sin \varphi + l \sqrt{1 - \sin^2 \psi} \\ &= r \sin \varphi + l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cos^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Für die x -Koordinate gilt

$$\frac{y_P}{x_P} = \tan \varphi$$

und damit

$$x_P = r \cos \varphi + \frac{l}{\tan \varphi} \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cos^2 \varphi}.$$

9.2 • Bei Kardanwinkeln wird ein Körper zunächst um die 1-Achse, dann um die neue 2'-Achse und zum Schluss um die 3''-Achse gedreht. Wie lässt sich die Winkelgeschwindigkeit des Körpers mit den Einheitsvektoren i_1 , k'_2 und k''_3 ausdrücken, wenn die Verdrehwinkel α , β und γ sind?

Resultat:

$$\omega = \dot{\alpha} i_1 + \dot{\beta} k'_2 + \dot{\gamma} k''_3$$

Ausführliche Lösung: Die Winkelgeschwindigkeiten der drei Elementardrehungen

$$\omega_1 = \dot{\alpha} i_1$$

$$\omega_2 = \dot{\beta} k'_2$$

$$\omega_3 = \dot{\gamma} k''_3$$

können vektoriell überlagert werden:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\ &= \dot{\alpha} i_1 + \dot{\beta} k'_2 + \dot{\gamma} k''_3. \end{aligned}$$

In diesem Ergebnis können noch die einzelnen Einheitsvektoren durch die Einheitsvektoren einer Basis ausgedrückt werden, z. B. durch diejenigen der Inertialsystems oder des körperfesten Systems, auf was aber an dieser Stelle verzichtet wird.

9.3 •• Bei welchem Winkel führen die Umrechnungen der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 und ω_3 bei Verwendung von Kardanwinkeln (vgl. Aufgabe 9.2) zu Schwierigkeiten, da Singularitäten auftreten?

Resultat: $\beta = \pm 90^\circ$

Ausführliche Lösung: Aus der Anschauung folgt sofort, dass für $\beta = \pm 90^\circ$ die Drehungen um α und γ jeweils um dieselbe Achse gedreht wird.

9.4 • Oft nehmen wir an, dass die Erde ein Inertialsystem ist. Näherungsweise ist diese Annahme natürlich gerechtfertigt. Bei einer genaueren Betrachtung ist die Erde jedoch ein Körper, der eine Winkelgeschwindigkeit um die Polachse hat. In welche Richtung kann ein Mensch auf der Erdoberfläche am Äquator gehen, sodass aufgrund

der Erddrehung keine Coriolisbeschleunigung auftritt? Tritt am Nord- oder am Südpol eine entsprechende Coriolisbeschleunigung auf? Wie sieht es aus, wenn man am Äquator beziehungsweise an einem der Pole einen Stein in einen tiefen Brunnen fallen lässt?

Resultat: Richtungen ohne Coriolisbeschleunigung: nord-süd-Richtung am Äquator. Am Nord- und am Südpol tritt Coriolisbeschleunigung auf. Stein in Brunnen: am Äquator tritt Coriolisbeschleunigung auf, an den Polen nicht.

Ausführliche Lösung: Am Äquator ist bei Nord-Süd-Richtung v_{rel} parallel ω , sodass in diesem Fall keine Coriolisbeschleunigung auftritt. An den Polen stehen v_{rel} und ω senkrecht aufeinander, sodass dort die Coriolisbeschleunigung vorhanden ist. Wird am Äquator ein Stein in einen Brunnen geworfen, dann sind v_{rel} und ω senkrecht zueinander und damit eine Coriolisbeschleunigung vorhanden. An den Polen sind Relativgeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit parallel und damit die Coriolisbeschleunigung null.

9.5 ••• Wie lautet die Drehmatrix bei Kardanwinkeln, wenn die Drehwinkel um die 1-Achse mit α , um die 2'-Achse mit β und um die 3''-Achse mit γ bezeichnet werden?

Resultat:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = m^K \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} m_{11}^K &= \cos \beta \cos \gamma, & m_{12}^K &= \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma, \\ m_{13}^K &= -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma, \\ m_{21}^K &= -\cos \beta \sin \gamma, & m_{22}^K &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ m_{23}^K &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ m_{31}^K &= \sin \beta, & m_{32}^K &= -\sin \alpha \cos \beta, \\ m_{33}^K &= \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Ausführliche Lösung: Werden wieder Zwischenbezugssysteme eingeführt, so gilt:

$$\begin{aligned} e'_1 &= i_1, \\ e'_2 &= \cos \alpha i_2 + \sin \alpha i_3, \\ e'_3 &= -\sin \alpha i_2 + \cos \alpha i_3, \\ e''_1 &= -\cos \beta e'_1 - \sin \beta e'_3, \\ e''_2 &= e'_2, \\ e''_3 &= \sin \beta e'_1 + \cos \beta e'_3, \\ k_1 &= \cos \gamma e''_1 + \sin \gamma e''_3, \\ k_2 &= -\sin \gamma e''_1 + \cos \gamma e''_3, \\ k_3 &= e''_2. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise kann dies ausgedrückt werden in der Form

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e''_1 \\ e''_2 \\ e''_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e''_1 \\ e''_2 \\ e''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}.$$

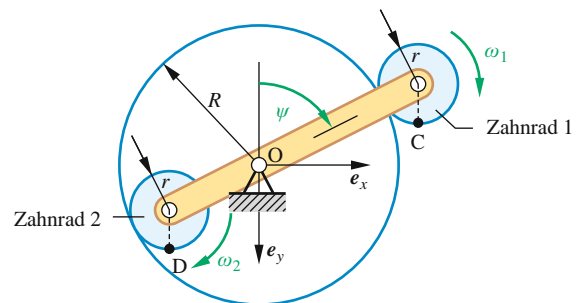
Durch Matrizenmultiplikation ergibt sich das Endergebnis

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = m^K \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} m_{11}^K &= \cos \beta \cos \gamma, \\ m_{12}^K &= \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma, \\ m_{13}^K &= -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma, \\ m_{21}^K &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ m_{22}^K &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ m_{23}^K &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ m_{31}^K &= \sin \beta, \\ m_{32}^K &= -\sin \alpha \cos \beta, \\ m_{33}^K &= \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

9.6 •• Zwei Zahnräder sind auf einer Stange drehbar in den Punkten A und B gelagert. Die Stange selbst kann sich um den Punkt O drehen. Zahnrad 1 ist im Einsatz mit einer außenverzahnten Scheibe, Zahnrad 2 mit einem Hohlrad. Die Mittelpunkte von Scheibe und Hohlrad sind ebenfalls in O. Die Radien der Zahnräder sind r , der Radius von Scheibe und Hohlrad R .



Zunächst sind die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Zahnräder gesucht, wenn die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ gegeben ist. Mithilfe der Winkelgeschwindigkeiten sind die Vektoren der Geschwindigkeiten der Punkte C und D zu ermitteln.

Resultat:

$$v_C = (R + r)(\cos \psi - 1)\dot{\psi}e_x + (R + r)\dot{\psi} \sin \psi e_y,$$

$$v_D = (R - r)(1 - \cos \psi)\dot{\psi}e_x - (R - r)\dot{\psi} \sin \psi e_y.$$

Ausführliche Lösung: Die Geschwindigkeit v_{M_1} des Mittelpunktes von Zahnrad 1 kann über die Drehung der Stange zu

$$v_{M_1} = (R + r)\dot{\psi}$$

und über den Kontakt mit dem Außenzahnrad und der Drehung von Zahnrad 1 zu

$$v_{M_1} = r\omega_1$$

bestimmt werden. Daraus folgt

$$\omega_1 = \frac{R + r}{r}\dot{\psi}.$$

Vektoriell gilt für den Punkt C:

$$\begin{aligned} v_C &= v_{M_1} + \omega_1 e_z \times r e_y \\ &= (R + r)\dot{\psi} \cos \psi e_x + (R + r)\dot{\psi} \sin \psi e_y - \omega_1 r e_x \\ &= [(R + r)\dot{\psi} \cos \psi - (R + r)\dot{\psi}]e_x + (R + r)\dot{\psi} \sin \psi e_y \\ &= (R + r)(\cos \psi - 1)\dot{\psi}e_x + (R + r)\dot{\psi} \sin \psi e_y. \end{aligned}$$

Analog gilt für das Zahnrad 2:

$$v_{M_2} = (R - r)\dot{\psi}$$

und

$$v_{M_2} = -r\omega_2$$

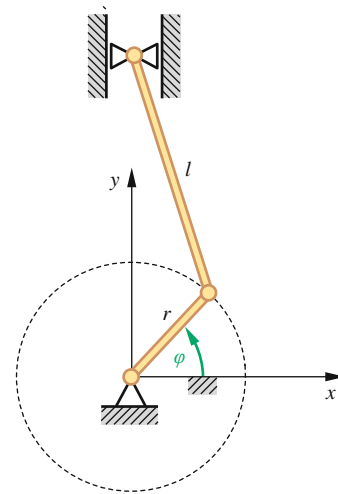
und damit

$$\omega_2 = -\frac{R - r}{r}\dot{\psi}.$$

Vektoriell ergibt dies für den Punkt D:

$$\begin{aligned} v_D &= v_{M_2} + \omega_2 e_z \times r e_y \\ &= -(R - r)\dot{\psi} \cos \psi e_x - (R - r)\dot{\psi} \sin \psi e_y - \omega_2 r e_x \\ &= (R - r)(1 - \cos \psi)\dot{\psi}e_x - (R - r)\dot{\psi} \sin \psi e_y. \end{aligned}$$

9.7 •• Die Kurbel des abgebildeten Schubkurbelmechanismus dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.



Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeit der Koppelstange und die Geschwindigkeit ihres Schwerpunktes für $\varphi = 30^\circ$ beziehungsweise für $\varphi = 60^\circ$? Wie groß sind in diesen Stellungen Winkelbeschleunigung und Schwerpunktsbeschleunigung? Es gilt $l = 3r$.

Resultat: Ergebnisse für die Stellung $\varphi = 30^\circ$:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Koppel}} &= -\frac{1}{\sqrt{33}}\dot{\varphi}, \\ v_S &= (-0,25e_x + 0,791e_y)r\dot{\varphi}, \\ \alpha_{\text{Koppel}} &= -0,2924\dot{\varphi}^2, \\ a_S &= (-0,433e_x - 0,417e_y)r\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Ergebnisse für die Stellung $\varphi = 60^\circ$:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Koppel}} &= -\sqrt{\frac{3}{35}}\dot{\varphi}, \\ v_S &= (-0,433e_x + 0,427e_y)r\dot{\varphi}, \\ \alpha_{\text{Koppel}} &= -0,155\dot{\varphi}^2, \\ a_S &= (-0,25e_x - 0,954e_y)r\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Ausführliche Lösung: Wenn der Winkel ψ zwischen der Koppelstange und der y -Achse eingeführt wird, so gilt

$$r \cos \varphi = l \sin \psi$$

und damit

$$\sin \psi = \frac{r}{l} \cos \varphi = \frac{1}{3} \cos \varphi$$

sowie

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \cos \varphi\right)^2}.$$

Der Gelenkpunkt hat die Geschwindigkeit ($\omega_{\text{Kurbel}} = \dot{\varphi}$)

$$v_G = r\omega_{\text{Kurbel}}(-\sin \varphi e_x + \cos \varphi e_y).$$

Damit hat der Lagerpunkt als Punkt der Koppelstange die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_G + \omega_{\text{Koppel}} \mathbf{e}_z \times (-l \sin \psi \mathbf{e}_x + l \cos \psi \mathbf{e}_y)$$

oder

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_L &= r\omega_{\text{Kurbel}}(-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) \\ &\quad + \omega_{\text{Koppel}} l(-\cos \psi \mathbf{e}_x - l \sin \psi \mathbf{e}_y) \\ &= -(r\omega_{\text{Kurbel}} \sin \varphi + l\omega_{\text{Koppel}} \cos \psi) \mathbf{e}_x \\ &\quad + (r\omega_{\text{Kurbel}} \cos \varphi - \omega_{\text{Koppel}} l \sin \psi) \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Die x -Komponente der Lagergeschwindigkeit muss null sein:

$$-(r\omega_{\text{Kurbel}} \sin \varphi + l\omega_{\text{Koppel}} \cos \psi) = 0.$$

Daraus kann die Winkelgeschwindigkeit der Koppel bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Koppel}} &= -\frac{r}{l} \omega_{\text{Kurbel}} \frac{\sin \varphi}{\cos \psi} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - (\frac{1}{3} \cos \varphi)^2}} \omega_{\text{Kurbel}} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Koppelstange berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_S &= \mathbf{v}_G + \omega_{\text{Koppel}} \mathbf{e}_z \times \left(\frac{l}{2}\right)(-\sin \psi \mathbf{e}_x + \cos \psi \mathbf{e}_y) \\ &= r\omega_{\text{Kurbel}}(-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) \\ &\quad + \omega_{\text{Koppel}} \frac{l}{2}(-\cos \psi \mathbf{e}_x - \sin \psi \mathbf{e}_y) \\ &= r\omega_{\text{Kurbel}}(-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{3} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - (\frac{1}{3} \cos \varphi)^2}} \omega_{\text{Kurbel}}\right) \\ &\quad \cdot \frac{l}{2} \left[-\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \cos \varphi\right)^2} \mathbf{e}_x - \frac{1}{3} \cos \varphi \mathbf{e}_y\right]. \end{aligned}$$

Da die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel konstant ist, beträgt die Beschleunigung des Gelenkpunktes

$$\mathbf{a}_G = -r\dot{\varphi}^2(\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y).$$

Für das Lager folgt daraus:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_L &= \mathbf{a}_G + \alpha_{\text{Koppel}} \times \mathbf{r}_{G/L} + \omega_{\text{Koppel}} \times (\omega_{\text{Koppel}} \times \mathbf{r}_{G/L}) \\ &= -r\dot{\varphi}^2(\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) \\ &\quad + \alpha_{\text{Koppel}} l(-\cos \psi \mathbf{e}_x - \sin \psi \mathbf{e}_y) \\ &\quad + \omega_{\text{Koppel}}^2 l(\sin \psi \mathbf{e}_x - \cos \psi \mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

Die x -Koordinate der Beschleunigung muss null sein. Dies führt auf:

$$-r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \alpha_{\text{Koppel}} l \cos \psi + \omega_{\text{Koppel}}^2 l \sin \psi = 0.$$

Nach Einsetzen von $\sin \psi$ und $\cos \psi$ folgt:

$$\begin{aligned} -r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \alpha_{\text{Koppel}} l \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \cos \varphi\right)^2} \\ + \omega_{\text{Koppel}}^2 l \frac{1}{3} \cos \varphi = 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\alpha_{\text{Koppel}} = \frac{\omega_{\text{Koppel}}^2 \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi}{3\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \cos \varphi\right)^2}}.$$

Auf das Einsetzen von ω_{Koppel} wird an dieser Stelle verzichtet. Die Beschleunigung des Schwerpunktes ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_S &= r\dot{\varphi}^2(-\cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y) \\ &\quad + \alpha_{\text{Koppel}} \times \frac{l}{2}(-\sin \psi \mathbf{e}_x + \cos \psi \mathbf{e}_y) \\ &\quad + \omega_{\text{Koppel}}^2 \frac{l}{2}(\sin \psi \mathbf{e}_x - \cos \psi \mathbf{e}_y) \\ &= r\dot{\varphi}^2(-\cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y) \\ &\quad + \alpha_{\text{Koppel}} \frac{l}{2}(-\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \cos \varphi\right)^2} \mathbf{e}_x - \frac{1}{3} \cos \varphi \mathbf{e}_y) \\ &\quad + \omega_{\text{Koppel}}^2 \frac{l}{2}(\frac{1}{3} \cos \varphi \mathbf{e}_x - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \cos \varphi\right)^2} \mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

Auch an dieser Stelle wird darauf verzichtet, die zuvor berechneten Ergebnisse einzusetzen.

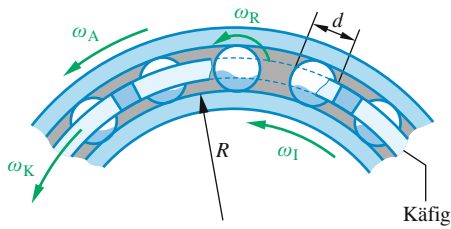
Ergebnisse für die Stellung $\varphi = 30^\circ$:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Koppel}} &= -\frac{1}{\sqrt{33}} \dot{\varphi}, \\ \mathbf{v}_S &= (-0,25\mathbf{e}_x + 0,791\mathbf{e}_y)r\dot{\varphi}, \\ \alpha_{\text{Koppel}} &= -0,2924\dot{\varphi}^2, \\ \mathbf{a}_S &= (-0,433\mathbf{e}_x - 0,417\mathbf{e}_y)r\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Ergebnisse für die Stellung $\varphi = 60^\circ$:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Koppel}} &= -\sqrt{\frac{3}{35}} \dot{\varphi}, \\ \mathbf{v}_S &= (-0,433\mathbf{e}_x + 0,427\mathbf{e}_y)r\dot{\varphi}, \\ \alpha_{\text{Koppel}} &= -0,155\dot{\varphi}^2, \\ \mathbf{a}_S &= (-0,25\mathbf{e}_x - 0,954\mathbf{e}_y)r\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

9.8 •• Bei einem Zylinderrollenlager dreht sich der Außenring mit der Winkelgeschwindigkeit ω_A , der Innenring mit der Winkelgeschwindigkeit ω_I . Der Außenradius des Innenrings ist R , der Durchmesser der Rollen d .



Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeit ω_R der Wälzkörper und die Winkelgeschwindigkeit ω_K des Käfigs?

Resultat:

$$\omega_K = \frac{R\omega_I + (R+d)\omega_A}{2R+d}.$$

Ausführliche Lösung: Geschwindigkeit des Innenringes:

$$v_I = R\omega_I$$

Geschwindigkeit des Außenringes:

$$v_A = (R+d)\omega_A$$

Gleichzeitig gilt:

$$v_A = v_I + d\omega_R = R\omega_I + d\omega_R$$

Daraus folgt:

$$(R+d)\omega_A = R\omega_I + d\omega_R$$

und damit:

$$\omega_R = \frac{(R+d)\omega_A - R\omega_I}{d}$$

Für die Käfiggeschwindigkeit gilt:

$$v_K = R\omega_I + \frac{d}{2}\omega_R$$

und wir erhalten:

$$v_K = \frac{R\omega_I + (R+d)\omega_A}{2}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Käfigs berechnet sich aus

$$\omega_K = \frac{v_K}{R+d/2} = \frac{R\omega_I + (R+d)\omega_A}{2R+d}.$$

9.9 •• Ein Betonlaster fährt mit konstanter Geschwindigkeit v eine Kurve mit Radius R . Die Betontrommel dreht sich dabei mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_T bezüglich des Fahrzeugs um eine Achse, die parallel zur Längsachse des Fahrzeugs verläuft. Wie lautet der Winkelgeschwindigkeitsvektor der Trommel bezüglich der Umgebung? Welchen Betrag hat er? Wie groß ist die Winkelbeschleunigung α der Trommel?

Wie lautet der Winkelgeschwindigkeitsvektor der Trommel bezüglich der Umgebung? Welchen Betrag hat er? Wie groß ist die Winkelbeschleunigung α der Trommel?

Resultat:

$$\alpha_{\text{Trommel}} = \frac{v}{R}\omega_T e_r$$

Ausführliche Lösung: Die Winkelgeschwindigkeit des Lasters beträgt

$$\omega_{\text{Laster}} = \frac{v}{R}e_z,$$

die Winkelgeschwindigkeit der Trommel bezüglich des Lasters

$$\omega_{\text{Laster}} \omega_{\text{Trommel}} = \omega_T e_t,$$

wobei e_t der Einheitsvektor in Tangentenrichtung ist. Die Winkelgeschwindigkeit der Trommel ist also

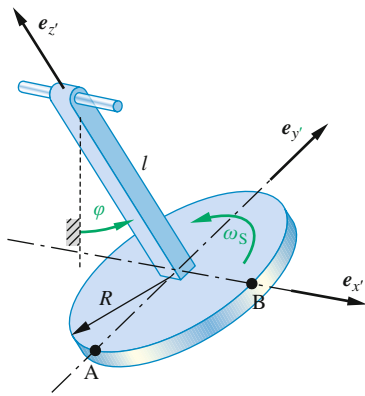
$$\omega_{\text{Trommel}} = \frac{v}{R}e_z + \omega_T e_t.$$

Die Winkelbeschleunigung ergibt sich durch zeitliche Ableitung der Winkelgeschwindigkeit, wobei zunächst im lastwagenfesten Bezugssystem abgeleitet wird:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Trommel}} &= \frac{d\omega_{\text{Trommel}}}{dt} + \omega_{\text{Laster}} \times \omega_{\text{Trommel}} \\ &= 0 + \frac{v}{R}e_z \times \left(\frac{v}{R}e_z + \omega_T e_t \right) \\ &= -\frac{v}{R}\omega_T e_r, \end{aligned}$$

wobei e_r der Einheitsvektor in Richtung vom Kurvenmittelpunkt zum Laster ist.

9.10 ••• Ein Frisbee ist eine Jahrmarktattraktion, bei der sich eine Stange der Länge l ähnlich einem Pendel um eine horizontale Achse dreht. Der Winkel zwischen der Pendelstange und der Vertikalen beträgt φ . Am Ende der Stange ist eine Scheibe mit Radius R angebracht, die sich bezüglich der Stange um deren Längsachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_S dreht. Der Drehwinkel φ der Stange ist wie bei einem Pendel von der Zeit abhängig.



Wie groß ist der Vektor ω_F der Winkelgeschwindigkeit des Frisbees? Wie groß ist dessen Winkelbeschleunigung, wenn $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$ gegeben sind? Wie groß sind die Geschwindigkeiten der Punkte A und B, wie groß deren Beschleunigung?

Resultat:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= (l\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi}^2 + R\omega_S^2)\mathbf{e}_{y'} + (l\dot{\varphi}^2 - R\ddot{\varphi})\mathbf{e}_{z'}, \\ \mathbf{a}_B &= (-R\omega_S^2)\mathbf{e}_{x'} + l\ddot{\varphi}\mathbf{e}_{y'} + (l\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\omega_S)\mathbf{e}_{z'}. \end{aligned}$$

Ausführliche Lösung: Die Winkelgeschwindigkeit des Frisbees setzt sich aus zwei Drehungen zusammen:

$$\omega_F = \dot{\varphi}\mathbf{e}_{x'} + \omega_S\mathbf{e}_{z'}.$$

Die Winkelbeschleunigung ergibt sich durch Zeitableitung, wobei zu beachten ist, dass das gestrichene Bezugssystem nicht das Bezugssystem des Frisbees ist:

system nicht das Bezugssystem des Frisbees ist:

$$\begin{aligned} \alpha_F &= \ddot{\varphi}\mathbf{e}_{x'} + \dot{\varphi}\mathbf{e}_{x'} \times (\dot{\varphi}\mathbf{e}_{x'} + \omega_S\mathbf{e}_{z'}) \\ &= \ddot{\varphi}\mathbf{e}_{x'} - \dot{\varphi}\omega_S\mathbf{e}_{y'}. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des Punktes A folgt aus der Geschwindigkeit des Mittelpunktes des Frisbees und einem Anteil aufgrund der Drehung des Frisbees

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= l\dot{\varphi}\mathbf{e}_{y'} + \omega_F \times (-R\mathbf{e}_{y'}) \\ &= R\omega_S\mathbf{e}_{x'} + l\dot{\varphi}\mathbf{e}_{y'} - R\dot{\varphi}\mathbf{e}_{z'}. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für Punkt B

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= l\dot{\varphi}\mathbf{e}_{y'} + \omega_F \times (R\mathbf{e}_{x'}) \\ &= l\dot{\varphi}\mathbf{e}_{y'} + R\dot{\varphi}\mathbf{e}_{y'} \\ &= (l\dot{\varphi} + R\dot{\varphi})\mathbf{e}_{y'}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Beschleunigungen können nicht einfach die Geschwindigkeiten der Punkte abgeleitet werden, da diese Punkte sich im gestrichenen Bezugssystem bewegen. Deshalb verwenden wir die Formel für die Beschleunigung eines Punktes des Körpers, wenn wir die Beschleunigung eines anderen Punktes des Körpers (hier der Mittelpunkt der Scheibe) kennen. Für den Scheibenmittelpunkt gilt aufgrund der Kreisbahn:

$$\mathbf{a}_M = l\ddot{\varphi}\mathbf{e}_{y'} + l\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_{z'}.$$

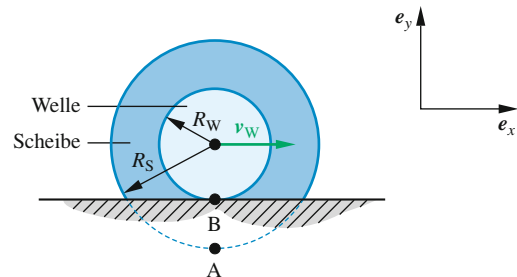
Für Punkt A folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_M + \alpha_M \times (-R\mathbf{e}_{y'}) + \omega_F \times [\omega_F \times (-R\mathbf{e}_{y'})] \\ &= (l\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi}^2 + R\omega_S^2)\mathbf{e}_{y'} + (l\dot{\varphi}^2 - R\ddot{\varphi})\mathbf{e}_{z'}, \end{aligned}$$

und analog für Punkt B:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_M + \alpha_M \times (R\mathbf{e}_{x'}) + \omega_F \times [\omega_F \times (R\mathbf{e}_{x'})] \\ &= (-R\omega_S^2)\mathbf{e}_{x'} + l\ddot{\varphi}\mathbf{e}_{y'} + (l\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\omega_S)\mathbf{e}_{z'}. \end{aligned}$$

9.11 •• Eine Welle mit Radius R_W rollt auf dem Untergrund ab. An ihr ist eine Scheibe mit dem Radius R_S angebracht, die sich in einer Nut des Untergrundes bewegen kann. Der Mittelpunkt der Welle bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_W entlang des Untergrundes.



Wie groß sind die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen der Punkte A und B?

Resultat:

$$a_A = \frac{R_S v_W^2}{R_W^2} e_y, \quad a_B = \frac{v_W^2}{R_W} e_y.$$

Ausführliche Lösung: Die Geschwindigkeit des Punktes B ist so groß wie die Geschwindigkeit der Unterlage und damit $v_B = 0$. Die Winkelgeschwindigkeit der Welle beträgt

$$\omega_W = -\frac{v_W}{R_W} e_z.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes A ergibt sich zu:

$$v_A = v_W e_x + \omega_W \times (-R_S e_y) = \left(v_W - \frac{R_S}{R_W}\right) e_x.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeit des Wellenmittelpunktes konstant ist, verschwinden die Beschleunigung des Wellenmittelpunktes und die Winkelbeschleunigung der Welle:

$$a_W = 0$$

$$\alpha_W = 0.$$

Die Beschleunigungen der Punkte A und B sind damit:

$$a_B = a_W + \alpha_W \times (-R_W) e_y + \omega_W \times [\omega_W \times (-R_W) e_y]$$

$$= -\frac{v_W}{R_W} e_z \times \left[-\frac{v_W}{R_W} e_z \times (-R_W) e_y\right]$$

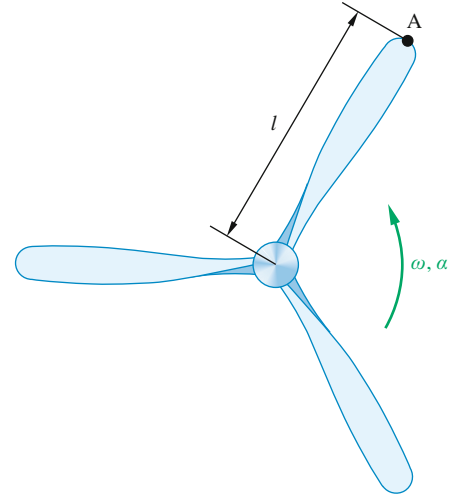
$$= \frac{v_W^2}{R_W} e_y,$$

$$a_A = a_W + \alpha_W \times (-R_S) e_y + \omega_W \times [\omega_W \times (-R_S) e_y]$$

$$= -\frac{v_W}{R_W} e_z \times \left[-\frac{v_W}{R_W} e_z \times (-R_S) e_y\right]$$

$$= \frac{R_S v_W^2}{R_W^2} e_y,$$

9.12 • Ein Propeller besteht aus drei Flügeln und wird beim Hochlaufen des Motors mit der Winkelbeschleunigung α beschleunigt. Dabei beträgt die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω . Wie groß ist die Beschleunigung des Punktes A?



Resultat:

$$a_A = \alpha l e_\varphi - \omega^2 l e_r$$

Ausführliche Lösung: Wir legen ein Zylinderkoordinatensystem fest in den Nabenmittelpunkt. Der Nabenmittelpunkt bewegt sich nicht. Deshalb beträgt die Beschleunigung des Punktes A

$$a_A = \alpha e_z \times l e_r + \omega e_z \times (\omega e_z \times l e_r)$$

$$= \alpha l e_\varphi - \omega^2 l e_r$$