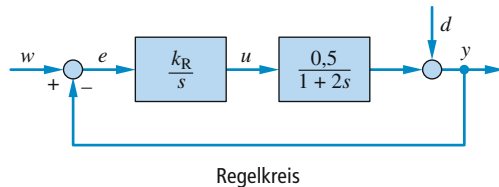


Aus Kapitel 40

Aufgaben

40.1 •• Für welche Werte von k_R ist der dargestellte Regelkreis asymptotisch stabil?



Geben Sie die Störübertragungsfunktion $S(s)$ des Regelkreises an. Was ergibt sich bei Regelkreisstabilität laut dem Bode-Theorem für das Integral

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega$$

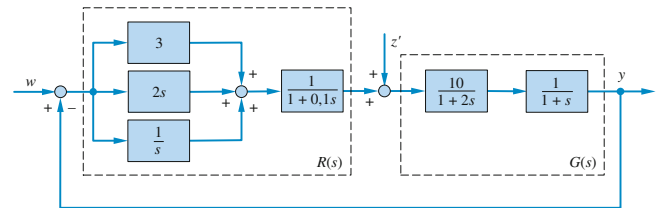
und welche Auswirkung hat dies auf den Regelungsentwurf?

Hinweis: Berechnen Sie für die Stabilitätsuntersuchung die Systempole.

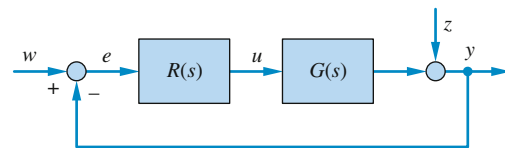
Resultat: Mit $F_0(s) = \frac{0,5k_R}{s(1+2s)}$ folgt die charakteristische Gleichung (40.21) zu $0,5k_R + s + 2s^2 = 0$. Ihre Lösungen (die Systempole) liegen genau dann links, wenn $k_R > 0$. Mit (40.14) ist $S(s) = \frac{1}{1+F_0} = \frac{s(1+2s)}{2s^2+s+0,5k_R}$. Laut Bode-Theorem (40.48) ist das angegebene Integral gleich Null. Jede Verbesserung des Störverhaltens, die durch geeignete Wahl von k_R in einem gewissen Frequenzintervall erreicht werden kann, muss mit einer Verschlechterung in einem anderen Intervall „bezahlt“ werden.

Ausführliche Lösung: Mit $F_0(s) = \frac{0,5k_R}{s(1+2s)}$ folgt die charakteristische Gleichung 40.21 zu $0,5k_R + s + 2s^2 = 0$. Ihre Lösungen (die Systempole) liegen genau dann links, wenn $k_R > 0$, und genau dann ist der Regelkreis asymptotisch stabil. Mit (40.14) ist $S(s) = \frac{1}{1+F_0} = \frac{s(1+2s)}{2s^2+s+0,5k_R}$. Laut Bode-Theorem (40.48) ist das angegebene Integral gleich Null. Jede Verbesserung des Störverhaltens, die durch geeignete Wahl von k_R in einem gewissen Frequenzintervall erreicht werden kann, muss mit einer Verschlechterung in einem anderen Intervall „bezahlt“ werden.

40.2 ••• Gegeben ist das Strukturbild eines Regelkreises, wobei in jeden Block die zugehörige komplexe Übertragungsfunktion eingetragen ist.



Formt man diesen Regelkreis in die Standardstruktur um, so erhält man die zweite Abbildung, worin $Z(s) = F_z(s)Z'(s)$ ist.



- Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen $R(s)$, $G(s)$ und $F_z(s)$.
- Um welchen Reglertyp $R(s)$ handelt es sich?
- Berechnen Sie die Störübertragungsfunktion $S_z(s)$ von z auf y .
- Berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ und anschließend mithilfe des Endwertsatzes die stationäre Verstärkung der Regelung.
- Beurteilen Sie a) anhand des Blockschaltbildes b) anhand der Übertragungsfunktionen, ob stationäre Genauigkeit des Führungsverhaltens und des Störverhaltens vorliegt.

Hinweis: Beachten Sie, dass der Störeingriff verschoben wird, weshalb hier die Übertragungsfunktion $F_z(s)$ ins Spiel kommt.

Resultat:

$$R(s) = \frac{2s^2 + 3s + 1}{s(1 + 0,1s)}, \quad \text{ein realer PID-Regler,}$$

$$G(s) = F_z(s) = \frac{10}{(1 + 2s)(1 + s)},$$

$$S_z(s) = \frac{1}{1 + G(s)R(s)} = \frac{10s(1 + 0,1s)}{s^2 + 10s + 100},$$

$$T(s) = \frac{G(s)R(s)}{1 + G(s)R(s)} = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}.$$

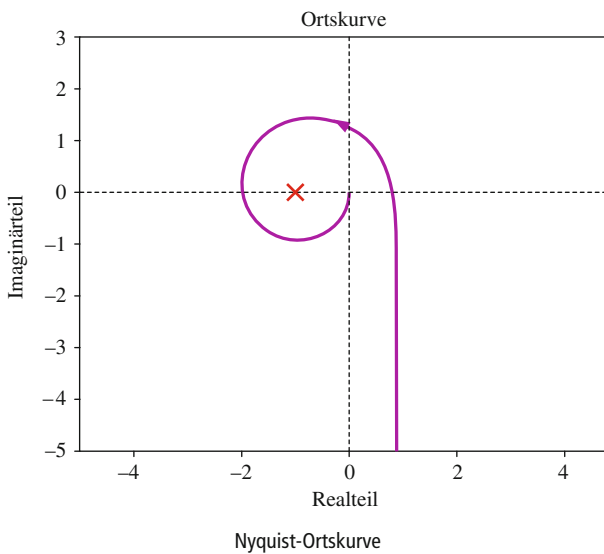
Der Regelkreis ist asymptotisch stabil und stationär genau bezüglich Führungs- und Störverhalten.

Die beiden Übertragungspole (und darüber hinaus auch die beiden kompensierten Streckenpole) liegen in der linken komplexen Halbebene, folglich ist der Regelkreis asymptotisch stabil. Da zudem ein I-Glied zwischen Soll-Istwertvergleich und Störeingriff liegt, ist der Regelkreis stationär genau bezüglich Führungs- und Störverhalten, was auch die beiden stationären Verstärkungen $S_z(0) = 0$ und $T(0) = 1$ bestätigen.

40.3 •• Gegeben ist die Regelstrecke

$$G(s) = 4 \frac{(s+1)^2}{s(s-10)^2}.$$

Die Strecke soll im Standardregelkreis mit einem P -Regler, $R = 10$, geregelt werden. Dabei ergibt sich die abgebildete Nyquist-Ortskurve des offenen Kreises. Untersuchen Sie die Stabilität der Regelung mit dem Nyquist-Kriterium. Für welche Werte der Reglerverstärkung tritt Instabilität auf?



Hinweis: Verwenden Sie das *allgemeine* Nyquist-Kriterium.

Resultat: Mit einem in Null ($q_a = 1$) und zwei rechts gelegenen Polen ($q_r = 2$) ist für Stabilität laut (40.40) eine Winkeländerung von $\Delta = \frac{5}{2}\pi$ nötig. Sie ist in dem vorliegenden Plot gegeben. Halbiert man die Verstärkung oder wählt sie noch kleiner, so tritt Instabilität auf, also für $R \leq 5$.

Ausführliche Lösung: Da die Strecke instabil ist, wird das allgemeine Nyquist-Kriterium benutzt. Mit einem in Null ($q_a = 1$) und zwei rechts gelegenen Polen ($q_r = 2$) ist für

Stabilität laut (40.40) eine Winkeländerung von $\Delta = \frac{5}{2}\pi$ nötig. Sie ist in dem vorliegenden Plot gegeben. Halbiert man die Verstärkung oder wählt sie noch kleiner, so tritt Instabilität auf, also für $R \leq 5$.

40.4 •• Die um einen Arbeitspunkt linearisierte Dynamik der Tauchtiefe $h(t)$ eines U-Bootes wird durch die Differenzialgleichung

$$2\ddot{h} = -10\dot{h} + 2u$$

beschrieben.

- Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(s)$ von der Stellgröße u zur Tauchtiefe h lautet:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+5)}.$$

- Diese Übertragungsfunktion wird mit einem Regler $R(s)$ so ergänzt, dass sich ein offener Regelkreis

$$F_0(s) = \frac{K_R \frac{1}{5}(T_R s + 1)}{s^2(\frac{1}{5}s + 1)} \quad K_R, T_R > 0$$

ergibt. Wie lautet die Übertragungsfunktion $R(s)$ des Reglers und um welchen Reglertyp handelt es sich?

- Bestimmen Sie nun die Reglerparameter K_R und T_R so, dass sich für die Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ des geschlossenen Regelkreises ein einfacher Pol in -1 und ein Doppelpol in -2 ergibt. Geben Sie die dann resultierende Übertragungsfunktion $T(s)$ an.

Hinweis: Lösen Sie die letzte Teilaufgabe mithilfe eines Koeffizientenvergleichs.

Resultat:

$$R(s) = K_R(1 + T_R s), \quad \text{ein (idealer) PD-Regler.}$$

$$K_R = 4, \quad T_R = 2, \quad T(s) = \frac{8s + 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}.$$

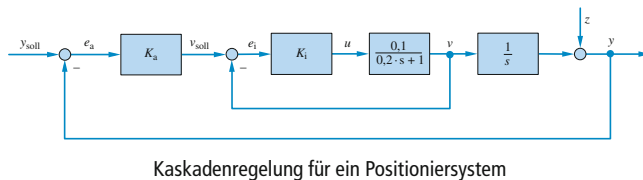
Ausführliche Lösung: Laplace-Transformation der gegebenen Differenzialgleichung und anschließendes Auflösen nach $h(s)$ führt auf:

$$h(s) = \frac{1}{s^2(s+5)}u(s),$$

womit die Übertragungsfunktion $G(s)$ bestätigt ist. Da $F_0(s) = G(s)R(s)$ ist, folgt $R(s) = K_R(1 + T_R s)$, ein (idealer) PD-Regler. Das charakteristische Polynom des Regelkreises ist $K_R T_R s + K_R + s^3 + 5s^2$ und soll dem Polynom $(s+1)(s+2)^2 = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$ der gewünschten Pole gleichen. Durch Koeffizientenvergleich liest man ab: $K_R = 4$, $T_R = 2$. Die Führungsübertragungsfunktion folgt zu:

$$T(s) = \frac{F_0}{1 + F_0} = \frac{8s + 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}.$$

40.5 •• Für ein Positioniersystem, wie wir es in Gestalt eines Wagens schon in Aufgabe 39.4 kennengelernt und in Abb. 40.34 als Standardregelkreis behandelt haben, soll eine *Kaskadenregelung* entworfen werden. Der Ort y und die Geschwindigkeit v des Wagens seien direkt messbar. Dann kann die Kaskadenregelung nach der Abbildung der Kaskadenregelung implementiert werden. Darin setzt sich die Strecke aus einer inneren Übertragungsfunktion $0,1/(0,2 \cdot s + 1)$ und einer äußeren Übertragungsfunktion $1/s$ zusammen, wie schon in (40.68). K_i ist der P-Regler für den inneren Kreis und K_a der P-Regler für den äußeren Kreis.



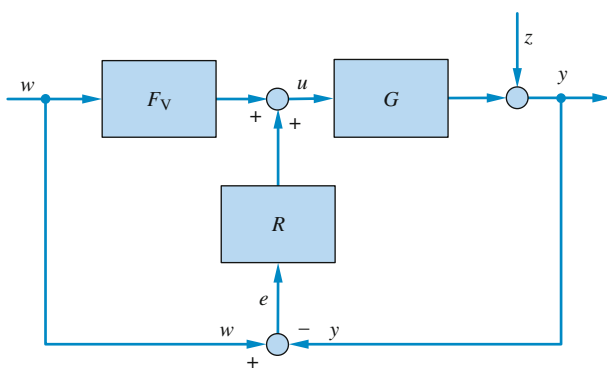
Bestimmen Sie K_i und K_a so, dass die Regelung einen Doppelpol in -5 aufweist.

Resultat: $K_i = 10$, $K_a = 5$.

Ausführliche Lösung: Zunächst erhält man im inneren Kreis $T_i = \frac{0,1K_i}{0,2s+0,1K_i+1}$. Die Übertragungsfunktion des offenen äußeren Kreises folgt dann zu $F_{0a} = \frac{0,1K_iK_a}{s(0,2s+0,1K_i+1)}$. Das charakteristische Polynom des äußeren Kreises ist demnach $0,1K_iK_a + 0,2 \cdot s^2 + (0,1K_i + 1)s$ bzw. $s^2 + 5(0,1K_i + 1)s + 0,5K_iK_a$ und führt durch Vergleich mit dem Polynom der gewünschten Pole, $(s + 5)^2 = s^2 + 10s + 25$, auf $K_i = 10$, $K_a = 5$.

40.6 •• Gegeben ist ein Regelkreis mit Vorsteuerung mit:

$$G = \frac{1}{(s + 0,5)(s + 1)}.$$



Regelkreis mit Vorsteuerung

Geben Sie eine ideale Vorsteuerung $F_V(s)$ für den Regelkreis an. Ist diese realisierbar? Wie können Sie Abhilfe schaffen? Entwerfen Sie außerdem den Regler $R(s)$ als PI-Regler so, dass die langsamere Streckenzeitkonstante kompensiert wird und die Störübertragungsfunktion einen Doppelpol auf der reellen Achse hat.

Hinweis: Überlegen Sie, ob die Störübertragungsfunktion durch $F_V(s)$ beeinflusst wird.

Resultat: $F_V(s) = G^{-1} = (s + 0,5)(s + 1)$ ist nicht realisierbar, da differenzierend. Abhilfe: Man kann vor F_V und vor dem Soll-Istwertvergleich z. B. ein schnelles PT2-Glied einfügen (Abb. 40.48). Die Störübertragungsfunktion ist auch bei der hier vorliegenden Zwei-Freiheitsgrade-Regelung $S(s) = \frac{1}{1+F_0}$, also von $F_V(s)$ unabhängig. Der PI-Regler lautet $R(s) = \frac{K_I}{s}(1 + T_R s)$ mit $T_R = 2$ und $K_I = 1/8$.

Ausführliche Lösung: $F_V(s) = G^{-1} = (s + 0,5)(s + 1)$ ist nicht realisierbar, da differenzierend. Abhilfe: Man kann vor F_V und vor dem Soll-Istwertvergleich z. B. ein schnelles PT2-Glied einfügen (Abb. 40.48 und Erläuterung dort). Die Störübertragungsfunktion ist auch bei der hier vorliegenden Zwei-Freiheitsgrade-Regelung $S(s) = \frac{1}{1+F_0}$, also von $F_V(s)$ unabhängig. Zum Beweis setzen Sie bitte $w = 0$ und berechnen $Y(s)$ analog zu (40.1). Der PI-Regler lautet $R(s) = \frac{K_I}{s}(1 + T_R s)$. Zur Kompensation des langsameren Pols bei $s = -0,5$ setzt man $T_R = 2$ und findet sodann die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises $2K_I + s^2 + s = 0$. Für $K_I = 1/8$ besitzt sie die Lösungen $s_{1/2} = -1/2$.