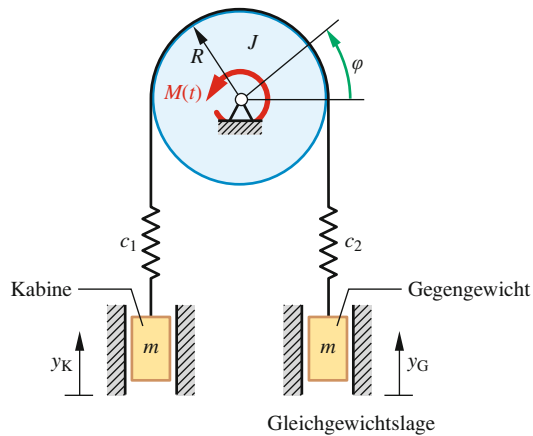


Aus Kapitel 13

Aufgaben

13.1 •• Ein vereinfachtes Aufzugmodell besteht aus der Treibscheibe mit der Trägheit J und dem Radius R , der Kabine, dem Gegengewicht sowie einem Seil. An der Scheibe wirkt das Antriebsmoment $M(t)$. Für geringe Gebäudehöhen mit kurzen, leichten Seilen können die freien Seilstrecken durch zwei masselose Federn modelliert werden, deren Steifigkeiten aber von der jeweiligen Länge und damit von der Fahrposition des Aufzugs abhängen.



Mit der vereinfachenden Annahme, dass Kabine und Gegengewicht die gleiche Masse m besitzen, spielt die Schwerkraft keine Rolle und die Bewegungsgleichung für die Freiheitsgrade φ , y_K und y_G lautet:

$$\begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{y}_K \\ \ddot{y}_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (c_1 + c_2)R^2 & c_1R & -c_2R \\ c_1R & c_1 & 0 \\ -c_2R & 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ y_K \\ y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zu untersuchen ist das Schwingverhalten des stehenden Aufzugs. Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen für den Sonderfall $J = \kappa m R^2$ und $c_1 = c_2 = c$. Stellen Sie die Eigenformen grafisch dar. Bestimmen Sie weiter den Amplitudengang $|\hat{y}_K / \hat{M}|$, der die vertikale Kabinenbeschleunigung, ein wichtiges Komfortmerkmal, als Reaktion auf harmonische Anteile des Antriebsmoments darstellt.

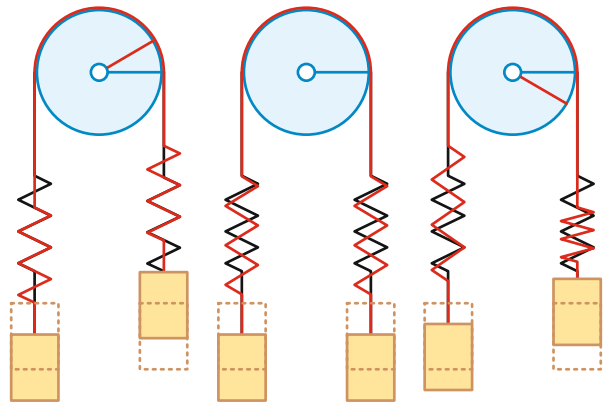
Resultat: Eigenkreisfrequenzen:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{(2 + \kappa)c}{\kappa m}}.$$

Eigenvektoren:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\kappa} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Grafische Darstellung der Eigenvektoren. Schwarz ist die unverformte Konfiguration, rot die Auslenkung der Eigenform.



Amplitudengang:

$$\frac{\hat{y}_K}{\hat{M}} = \frac{1}{Rm} \frac{1 - \eta^2}{\kappa \eta^4 - 2(1 + \kappa)\eta^2 + (2 + \kappa)}.$$

Ausführliche Lösung: Zunächst wird die neue Koordinate $y_T = R\varphi$ eingeführt. Die Beziehung zwischen den neuen und alten Koordinaten lautet:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ y_K \\ y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_T \\ y_K \\ y_G \end{pmatrix}.$$

Wird diese Koordinatentransformation in die Bewegungsgleichung eingesetzt, ergibt sich folgende neue

Gleichung:

$$\begin{pmatrix} \frac{J}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_T \\ \ddot{y}_K \\ \ddot{y}_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (c_1 + c_2) & c_1 & -c_2 \\ c_1 & c_1 & 0 \\ -c_2 & 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_T \\ y_K \\ y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M(t)}{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. in Matrizenform:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}.$$

Das Eigenwertproblem wird mit der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$ gelöst. Hier ergibt sich für den Sonderfall $J = \kappa m R^2$ und $c_1 = c_2 = c$:

$$\det \begin{vmatrix} 2c - \kappa m \omega^2 & c & -c \\ c & c - m \omega^2 & 0 \\ -c & 0 & c - m \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

was auf

$$-c^2(c - m\omega^2) + (c - m\omega^2)[(2c - \kappa m\omega^2)(c - m\omega^2) - c^2] = 0$$

und nach Umsortierung der Terme auf

$$\omega^2(c - m\omega^2) [\kappa m^2 \omega^2 - (2 + \kappa)cm] = 0$$

führt. Daraus ergeben sich die drei Eigenkreisfrequenzen:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{(2 + \kappa)c}{\kappa m}}.$$

Die Berechnung der Eigenvektoren wird am Beispiel von y_2 erklärt. Gleichung (13.3) nimmt für $\omega = \omega_2$ die Form

$$\begin{pmatrix} 2c - \kappa m \frac{c}{m} & c & -c \\ c & c - m \frac{c}{m} & 0 \\ -c & 0 & c - m \frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2T} \\ y_{2K} \\ y_{2G} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

an, was zu

$$\begin{pmatrix} 2c - \kappa c & c & -c \\ c & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2T} \\ y_{2K} \\ y_{2G} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

vereinfacht werden kann. Nur zwei der Zeilen dieser Matrix sind linear unabhängig. Aus der 2. oder 3. Zeile folgt $y_{2T} = 0$. Daher folgt dann aus der 1. Zeile $y_{2K} = y_{2G}$. Der Eigenvektor wird so normiert, dass für die Koordinate des Gegengewichts $y_{2G} = 1$ gilt. Alle drei Eigenvektoren ergeben sich zu:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\kappa} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der erste Eigenwert ω_1 ist null und kennzeichnet die damit verbundene Mode als *Starrkörpermode*. Die Bewegung kann ausgeführt werden, ohne dass eine Feder dafür ausgelenkt werden muss. Im vorliegenden Fall ist es die Sollenbewegung des Aufzugs, bei der sich zum Beispiel die Kabine $y_{1K} = -1$ nach unten, das Gegengewicht $y_{1G} = -1$ nach oben und die Treibscheibe $y_{1T} = R\varphi_1 = 1$ im Gegenurzeigersinn bewegt. Die gegenläufige Bewegung ist ebenso möglich.

Die zweite Mode charakterisiert synchrone vertikale Schwingungen von Kabine und Gegengewicht bei stillstehender Treibscheibe. Diese Schwingungsform tritt in dieser besonderen Form nur deshalb auf, da mit den gewählten Parametern die Massen und Steifigkeiten für Kabine und Gegengewicht identisch sind.

Die dritte Mode ist durch gegensinnige Bewegung von Kabine und Gegengewicht und eine Drehschwingung der Treibscheibe gekennzeichnet.

Um den Amplitudengang zu bestimmen, muss die Übertragungsmatrix $\underline{G}(\Omega)$ gemäß (13.13) bestimmt werden. Für das ungedämpfte System gilt:

$$\mathbf{G}(\Omega) = (-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}.$$

Die Übertragungsfunktion zwischen $M(t)$ und y_K lautet $G_{21}(\Omega)/R$:

$$G_{y_K M}(\Omega) = \frac{1}{R} (-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})_{21}^{-1}.$$

Der Amplitudengang $|\frac{\hat{y}_K}{\hat{M}}|$ lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{y}_K}{\hat{M}} &= \frac{1}{R} \frac{c^2 - cm\Omega^2}{\kappa m^3 \Omega^6 - 2(1 + \kappa)cm^2 \Omega^4 + (2 + \kappa)c^2 m \Omega^2} \\ &= \frac{1}{Rc} \frac{\omega_0^4 (\omega_0^2 - \Omega^2)}{\Omega^2 [\kappa \Omega^4 - 2(1 + \kappa)\omega_0^2 \Omega^2 + (2 + \kappa)\omega_0^4]} \\ &= \frac{1}{Rc} \frac{1 - \eta^2}{\eta^2 [\kappa \eta^4 - 2(1 + \kappa)\eta^2 + (2 + \kappa)]}, \end{aligned}$$

wobei die Abkürzungen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}.$$

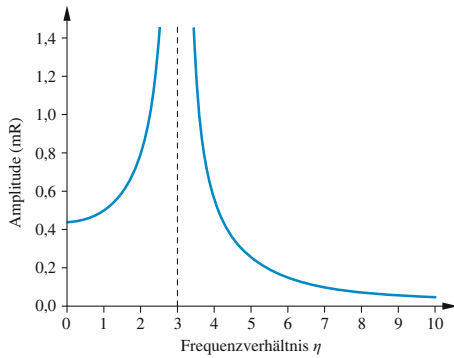
verwendet wurden. Daraus kann der Beschleunigungsamplitudengang der vertikalen Kabinenbewegung

$$\frac{\hat{\ddot{y}}_K}{\hat{M}} = \Omega^2 \frac{\hat{y}_K}{\hat{M}} = \frac{1}{Rm} \frac{1 - \eta^2}{\kappa \eta^4 - 2(1 + \kappa)\eta^2 + (2 + \kappa)}$$

bestimmt werden. Für $\kappa = 0,25$ kann der Amplitudengang grafisch dargestellt werden. In diesem Fall ist die Eigenfrequenz:

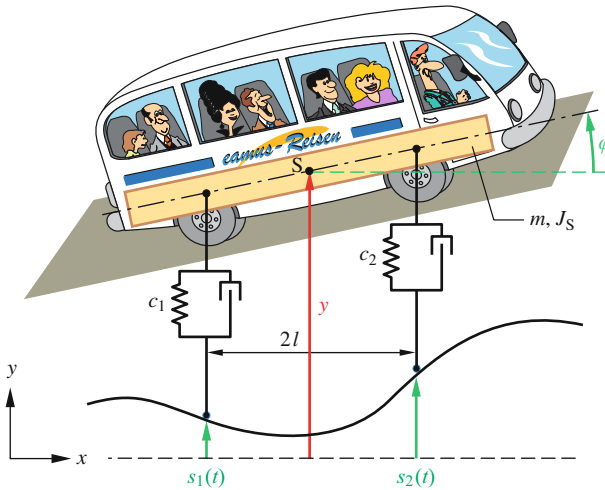
$$\omega_3 = \sqrt{\frac{(2 + \kappa)c}{\kappa m}} = \sqrt{\frac{(2 + \kappa)}{\kappa}} \omega_0 = 3\omega_0.$$

Im Bild ist zu erkennen, dass eine Resonanz bei $\eta = 3$ auftritt.



Auffällig am Amplitudengang ist, dass bei $\Omega = \omega_2 = \omega_0$, was $\eta = 1$ entspricht, keine Resonanz zu erkennen ist, obwohl es sich bei ω_2 um eine Eigenfrequenz des Systems handelt. Die zweite Eigenform y_2 hat bei den hier gewählten Parametern an der Treibscheibe einen Schwingungsknoten. Sie ist deswegen durch ein Moment an der Scheibe nicht anregbar.

13.2 ••• Hub- und Nickschwingungen eines Kfz auf welliger Fahrbahn können mit einem Halbfahrzeug-Modell untersucht werden.



Der Wagenkasten ist ein starrer Körper mit den zwei Freiheitsgraden Vertikalhub y und Nickwinkel φ . In x -Richtung bewegt sich das Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit $x = vt$. Der Radstand beträgt $2l$, der Schwerpunkt liegt in der Mitte zwischen den Rädern. Das Fahrzeug hat die Masse m und das Trägheitsmoment $J_S = ml^2$. Die Steifigkeiten der Radaufhängungen betragen c_1 und c_2 . Das Fahrzeug soll hier vereinfacht ohne Dämpfung und mit linearisierter Kinematik bei kleinen Verdrehungen von φ untersucht werden.

Der Koordinatenvektor $q = (y, \varphi)^T$ fasst die Vertikalauslenkung des Schwerpunktes und die Verdrehung zusammen.

Die Massen- und Steifigkeitsmatrix der Bewegungsgleichung $M\ddot{q} + Kq = F$ lauten:

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & l(c_2 - c_1) \\ l(c_2 - c_1) & l^2(c_2 + c_1) \end{pmatrix}.$$

Der Lastvektor folgt aus der Fußpunkterregung zu:

$$F(t) = \begin{pmatrix} c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t) \\ -l[c_2 s_2(t) - c_1 s_1(t)] \end{pmatrix}.$$

Für die Fahrbahn soll analog zum Beispiel des Fahrzeugs auf Schlechtwegstrecke im Kap. 12 eine Strecke in Sinusform der Wellenlänge λ angenommen werden.

Berechnen Sie für die zwei Fälle der Wellenlängen der Straße $\lambda_a = 4l$ und $\lambda_b = 2l$ jeweils jene Fahrgeschwindigkeiten v_y und v_φ , bei denen vom Fahrzeug ausschließlich Hub- bzw. Nickbewegungen ausgeführt werden.

Resultat: Für Fall a, $\lambda_a = 4l$:

$$v_{ay} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{2m(c_1 + c_2)}},$$

$$v_{a\varphi} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{2m}}.$$

Für Fall b, $\lambda_b = 2l$:

$$v_{by} = v_{a\varphi} \quad \text{und} \quad v_{b\varphi} = v_{ay}$$

Ausführliche Lösung: Die Hub- oder Nickschwingung verschwinden, wenn im Vektor \hat{q} der Systemantwort in (13.13) die entsprechende Komponente gleich null ist. Um dies zu berechnen, sind die Frequenzgangmatrix $\underline{G}(\Omega)$ sowie der Gewichtsvektor \hat{f} erforderlich.

Die beiden Anregungs-Wegfunktionen $s_1(t)$ und $s_2(t)$ lauten bei einer Fahrgeschwindigkeit v über einer harmonischen Fahrbahnwelle mit der Amplitude \hat{s} und der Wellenlänge λ :

$$s_1(t) = \hat{s} \sin(\Omega t) \quad \text{und} \quad s_2(t) = \hat{s} \sin(\Omega t + \psi) \quad \text{mit}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} v \quad \text{und} \quad \psi = \frac{2\pi}{\lambda} l.$$

Für beide Fälle gilt $\psi_a = \pi$ und $\psi_b = 2\pi$. Wird die Anregungsfunktion mithilfe eines komplexen Zeigers $F(t) = \text{Im}(\hat{f} e^{j\Omega t})$ dargestellt, lautet der Gewichtsvektor:

$$\hat{f} = \hat{s} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^{j\psi} \\ l(c_1 - c_2 e^{j\psi}) \end{pmatrix}.$$

Für die beiden gesuchten Fälle gilt $e^{j\psi_a} = -1$ und $e^{j\psi_b} = 1$, somit lassen sich zwei reelle Gewichtsvektoren

$$\hat{f}_a = \hat{s} \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ l(c_1 + c_2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{f}_b = \hat{s} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ l(c_1 - c_2) \end{pmatrix}$$

bilden.

Die Frequenzgangmatrix $G(\Omega) = (K - \Omega^2 M)^{-1}$ ist hier reell, da M , K sowie Ω reell sind. Somit kann die komplette Berechnung im Reellen durchgeführt werden. Um die Matrix G analytisch bilden zu können, wird zunächst

$$A = (K - \Omega^2 M) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - m\Omega^2 & L(c_2 - c_1) \\ L(c_2 - c_1) & L^2(c_2 + c_1) - mL^2\Omega^2 \end{pmatrix}$$

gebildet. Mit $\det(A) = 0$ und Auflösung nach Ω lassen sich die Eigenwerte des Fahrzeugs

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2c_1}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2c_2}{m}}$$

bestimmen, was aber für die Lösung der Aufgabe nicht erforderlich ist.

$G(\Omega)$ selbst lässt sich jetzt mithilfe der Adjunkten-Determinanten-Regel zur Bildung von Inversen berechnen:

$$G(\Omega) = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} l^2(c_1 + c_2 - \Omega^2 m) & l(c_1 - c_2) \\ l(c_1 - c_2) & c_1 + c_2 - \Omega^2 m \end{pmatrix}$$

Die beiden Antwort-Amplitudenvektoren lauten nun:

$$\hat{q}_a = G\hat{f}_a = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} l^2 [2(c_1^2 + c_2^2) - m\Omega^2(c_1 + c_2)] \\ l [2(c_1^2 - c_2^2) - m\Omega^2(c_1 - c_2)] \end{pmatrix}$$

$$\hat{q}_b = G\hat{f}_b = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} l^2 [2(c_1^2 - c_2^2) - m\Omega^2(c_1 - c_2)] \\ l [2(c_1^2 + c_2^2) - m\Omega^2(c_1 + c_2)] \end{pmatrix}$$

Da, abgesehen vom Fall, dass Ω eine Eigenfrequenz trifft, $\det(A) \neq 0$ gilt, können die Nullstellen der Komponenten von \hat{q} durch Nullsetzen der Ausdrücke in den eckigen Klammern gewonnen werden. Somit ergibt sich:

$$\hat{q}_{ay} = 0 \rightarrow \Omega_{ay}^2 = \frac{2(c_1^2 + c_2^2)}{m(c_1 + c_2)},$$

$$\hat{q}_{a\varphi} = 0 \rightarrow \Omega_{a\varphi}^2 = \frac{2(c_1 + c_2)}{m}$$

sowie $\Omega_{by}^2 = \Omega_{a\varphi}^2$ und $\Omega_{b\varphi}^2 = \Omega_{ay}^2$. Mithilfe von

$$v = \frac{\lambda}{2\pi} \Omega$$

lassen sich die oben genannten Geschwindigkeiten berechnen.

13.3 • Die schwingende Länge der Saiten (Mensur) einer typischen E-Gitarre misst $l = 0,628 \text{ m}$. Die tiefe A-Saite hat eine Längendichte von $\rho_1 = 5,12 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}$. Welche Zugkraft F_0 muss in der Saite wirken, damit der Grundton die Frequenz $f = 110 \text{ Hz}$ hat? Wie groß ist die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c in der Saite?

Resultat: Für die notwendige Zugkraft und die zugehörige die Ausbreitungsgeschwindigkeit ergibt sich

$$F_0 = 97,73 \text{ N} \quad \text{und} \quad c = 138,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ausführliche Lösung: Ausgehend von (13.29) gilt für die Zugkraft F_0 der Saite und für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle:

$$F_0 = \left(\frac{\omega_i l}{i\pi} \right)^2 \rho_1 = \left(\frac{2f_i l}{i} \right)^2 \rho_1 \quad \text{und}$$

$$c = \frac{\omega_i l}{i\pi} = \frac{2f_i l}{i}.$$

Für den Grundton ist $i = 1$ zu setzen. Es gilt demnach:

$$F_0 = (2f_1 l)^2 \rho_1$$

$$= (2 \cdot 110 \text{ Hz} \cdot 0,628 \text{ m})^2 \cdot 5,12 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$= 97,73 \text{ N}$$

und

$$c = (2f_1 l) = (2 \cdot 110 \text{ Hz} \cdot 0,628 \text{ m}) = 138,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

13.4 •• Die Saite eines Musikinstruments mit der Länge l und der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c wird in der Mitte angezupft und losgelassen. Die Saite hat unmittelbar vor dem Loslassen eine symmetrische „Dachform“ mit der Maximalauslenkung h in der Mitte. Welche Moden werden durch diese Anfangsbedingungen angeregt und welche Amplitude haben sie jeweils?

Resultat: Für die geraden Koeffizienten gilt $A_2 = A_4 = A_6 = \dots = 0$. Für die ungeraden Koeffizienten gilt:

$$A_i = \pm \frac{8h}{(i\pi)^2} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} + & \text{für } i = 1, 5, 9, \dots \\ - & \text{für } i = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

Ausführliche Lösung: Die Funktion $w_0(x)$ der Anfangsauslenkung lautet abschnittsweise definiert:

$$w_0(x) = \begin{cases} 2h \frac{x}{l} & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 2h \frac{l-x}{l} & \text{für } \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases},$$

womit sich das Integral gemäß (13.31) in der Form

$$A_i = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} 2h \frac{x}{l} \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) dx + \int_{\frac{l}{2}}^l 2h \frac{l-x}{l} \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) dx \right]$$

schreiben lässt. Mit der Substitution $\xi = \frac{x}{l}$ lautet die Gleichung:

$$A_i = 4h \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \xi \sin(i\pi \xi) d\xi + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-\xi) \sin(i\pi \xi) d\xi \right].$$

Die Teilintegrale sind nun in Standardform und können mithilfe von Tabellen oder einem Computeralgebrasystem gelöst werden.