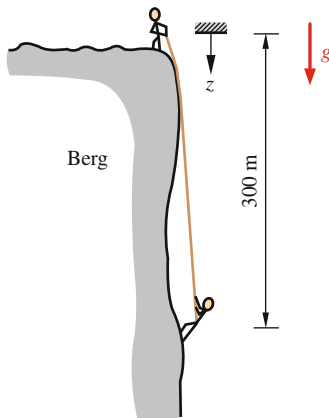


## Aus Kapitel 5

### Aufgaben

**5.1** • Ein Bergsteiger wird an einem 300 m langen Seil in die Tiefe abgesenkt. Das Gewicht des Bergsteigers betrage 800 N. Das Seil habe ein spezifisches Gewicht von  $\gamma = 0,7 \text{ N/m}$  (Kraft pro laufende Seillänge). Zur Ermittlung der Struktursteifigkeit  $EA$  wurde zuvor im Labor ein Zugversuch durchgeführt. Bei einer Belastung von 1000 N dehnte sich dabei das Seil um 2 %.

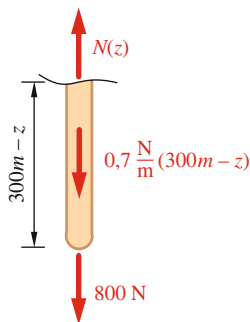


1. Bestimmen Sie den Verlauf der Normalkraft  $N(z)$  im Seil.
2. Bestimmen Sie aus dem Ergebnis des Laborversuchs die Struktursteifigkeit  $EA$  des Seils.
3. Bestimmen Sie die Längenänderung des den Bergsteiger haltenden Seils.

#### Resultat:

1.  $N(z) = 800 \text{ N} + 0,7 \frac{\text{N}}{\text{m}} (300 \text{ m} - z)$ .
2.  $EA = 50 \text{ kN}$ .
3.  $\Delta l = 5,43 \text{ m}$ .

**Ausführliche Lösung:** Freikörperbild zur Bestimmung des Schnittgrößenverlaufs:



$$\uparrow \sum F_{iz} = N(z) - 800 \text{ N} - 0,7 \frac{\text{N}}{\text{m}} (300 \text{ m} - z) = 0$$

$$\Rightarrow N(z) = 800 \text{ N} + 0,7 \frac{\text{N}}{\text{m}} (300 \text{ m} - z)$$

Bestimmung der Struktursteifigkeit des Seils:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{EA}$$

$$\Rightarrow EA = \frac{F}{\epsilon} = \frac{1000 \text{ N}}{0,02} = 50 \text{ kN}$$

Bestimmung der Längenänderung des Seils: Da die Normalkraft entlang des Seils veränderlich ist, muss die Berechnung per Integration erfolgen.

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z)}{EA} dz$$

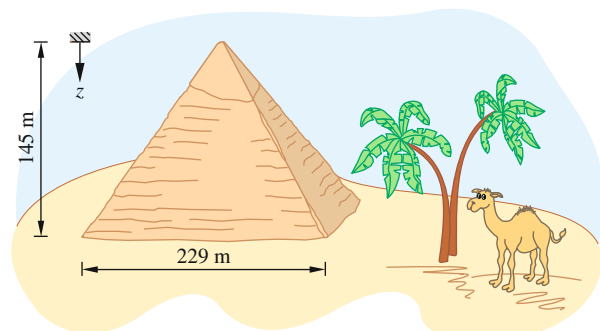
$$= \frac{1}{EA} \int_0^{300 \text{ m}} \left( 800 \text{ N} + 0,7 \frac{\text{N}}{\text{m}} (300 \text{ m} - z) \right) dz$$

$$= \frac{1}{50 \text{ kN}} \left[ 800 \text{ N} \cdot z - \frac{1}{2} \cdot 0,7 \frac{\text{N}}{\text{m}} (300 \text{ m} - z)^2 \right]_0^{300 \text{ m}}$$

$$= 5,43 \text{ m}$$

**5.2** •• Die Cheops-Pyramide in Gizeh ist mit einer Höhe von 145 m und einer quadratischen Grundfläche der Abmessungen  $229 \text{ m} \times 229 \text{ m}$  die höchste Pyramide der Welt. Betrachten Sie die Pyramide in dieser Aufgabe bitte sehr grob vereinfachend als einen homogenen Druckstab mit veränderlichem Querschnitt, der durch sein Eigengewicht belastet wird.

Materialparameter: Elastizitätsmodul  $E = 20.000 \text{ MPa}$ , spezifisches Gewicht  $\gamma = 22.000 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ .

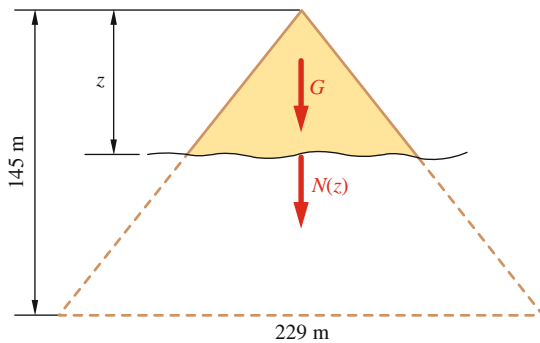


1. Berechnen Sie den Verlauf der Normalkraft  $N(z)$  in der Pyramide.
2. Berechnen Sie den Verlauf der Normalspannung  $\sigma(z)$  in der Pyramide. An welcher Stelle ist  $\sigma(z)$  maximal? Wie groß ist der Maximalwert?
3. Um wie viele Millimeter wird die Pyramide allein durch ihr Eigengewicht gestaucht?

**Resultat:**

1.  $N(z) = -18.291 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot z^3$ .
2.  $\sigma(z) = -7333 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot z$ .  
 $\sigma(z)$  wird an der Basis maximal,  $\sigma(z)_{\max} = -1 \text{ MPa}$ .
3.  $\Delta l = -3,85 \text{ mm}$ .

**Ausführliche Lösung:** Freikörperbild zur Berechnung des Normalkraftverlaufs:



$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_{iz} &= -N(z) - G = -N(z) - \gamma \cdot V, \\ &= -N(z) - \gamma \cdot \frac{1}{3} \cdot z \cdot \left( \frac{229}{145} z \right)^2 = 0 \\ \Rightarrow N(z) &= -18.291 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot z^3 \end{aligned}$$

Berechnung der Spannung:

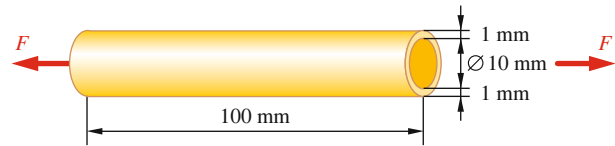
$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{A(z)} = \frac{-18.291 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot z^3}{\left( \frac{229}{145} z \right)^2} = -7333 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot z$$

An der Basis ist  $\sigma$  maximal mit  $\sigma(z)_{\max} = -1 \text{ MPa}$ .

Berechnung der Stauchung:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \int_0^l \frac{N(z)}{EA(z)} dz \\ &= \frac{1}{E} \int_0^{145 \text{ m}} \sigma(z) dz \\ &= -\frac{1}{E} \left[ \frac{1}{2} \cdot 7333 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot z^2 \right]_0^{145 \text{ m}} = -3,85 \text{ mm} \end{aligned}$$

**5.3 ••** Eine Zugprobe bestehe aus einem zylindrischen Kern aus Stahl des Durchmessers 10 mm und einer 1 mm starken Beschichtung aus Emaille. Die Länge der Probe betrage 100 mm.



Berechnen Sie

1. die Spannungen in Stahlkern und Emailleschicht sowie
2. die Verformung  $\Delta l$  der Probe,

wenn die Zugkraft auf die Probe  $F = 15 \text{ kN}$  beträgt.

Materialparameter:

$$E_{\text{Stahl}} = 205.000 \text{ MPa}, E_{\text{Emaille}} = 70.000 \text{ MPa}.$$

**Resultat:**  $\sigma_{\text{Stahl}} = 166 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{\text{Emaille}} = 57 \text{ MPa}$ ,  
 $\Delta l = 81 \mu\text{m}$ .

**Ausführliche Lösung:** Aufgabenteil 1: Die Nachgiebigkeiten von Stahlsubstrat und Emailleschicht betragen

$$\delta_{\text{Stahl}} = \frac{1}{E_{\text{Stahl}} A_{\text{Stahl}}} = 6,21 \cdot 10^{-8} \text{ N}^{-1}$$

und

$$\delta_{\text{Emaille}} = \frac{1}{E_{\text{Emaille}} A_{\text{Emaille}}} = 4,13 \cdot 10^{-7} \text{ N}^{-1}$$

Daraus ergibt sich für die Kräfte in Stahlsubstrat und Emailleschicht

$$F_{\text{Stahl}} = \frac{\delta_{\text{Emaille}}}{\delta_{\text{Stahl}} + \delta_{\text{Emaille}}} F_A = 13,04 \text{ kN}$$

und

$$F_{\text{Emaille}} = \frac{\delta_{\text{Stahl}}}{\delta_{\text{Stahl}} + \delta_{\text{Emaille}}} F_A = 1,96 \text{ kN}$$

Durch die jeweiligen Querschnittsfläche geteilt, ergeben sich die Spannungen als

$$\sigma_{\text{Stahl}} = 166 \text{ MPa}$$

und

$$\sigma_{\text{Emaille}} = 57 \text{ MPa}$$

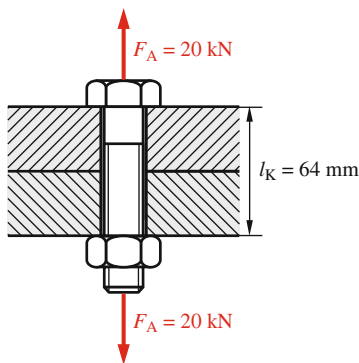
Aufgabenteil 2:

$$\Delta l = \frac{F_{\text{Stahl}} l}{E_{\text{Stahl}} A_{\text{Stahl}}} = \frac{13,04 \text{ kN} \cdot 100 \text{ mm}}{205.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \pi (5 \text{ mm})^2} = 81 \mu\text{m}$$

bzw. mit den Werten von Emaille:

$$\Delta l = \frac{F_{\text{Emaille}} l}{E_{\text{Emaille}} A_{\text{Emaille}}} = \dots = 81 \mu\text{m}$$

**5.4** • Die abgebildete Schraube soll die Betriebskraft  $F_A = 20 \text{ kN}$  aufnehmen. Betrachten Sie die Schraube als einen zylindrischen Stab des Durchmessers 16 mm mit einer Klemmlänge von 64 mm und die Platten als Hohlzylinder mit dem Innendurchmesser 18 mm und dem effektiven Außendurchmesser 32 mm. Schrauben und Platten bestehen aus Stahl (Elastizitätsmodul  $E_P = 205.000 \text{ MPa}$ ).



1. Berechnen Sie die auf die Schraube wirkende Kraft  $F_{SA}$ .
2. Zeichnen Sie für eine Vorspannkraft von  $F_V = 35 \text{ kN}$  das Verspannungsdiagramm.

**Resultat:**  $F_{SA} = 10,34 \text{ kN}$ .

**Ausführliche Lösung:** Die Nachgiebigkeiten von Schraube und verspannten Platten betragen

$$\begin{aligned} \delta_S &= \frac{1}{E_S A_S} = \frac{1}{205.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \pi \cdot (8 \text{ mm})^2} \\ &= \frac{1}{2,43 \cdot 10^{-8} \text{ N}^{-1}} \quad \text{und} \\ \delta_P &= \frac{1}{E_P A_P} = \frac{1}{205.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \pi \cdot [(16 \text{ mm})^2 - (9 \text{ mm})^2]} \\ &= \frac{1}{8,87 \cdot 10^{-9} \text{ N}^{-1}}. \end{aligned}$$

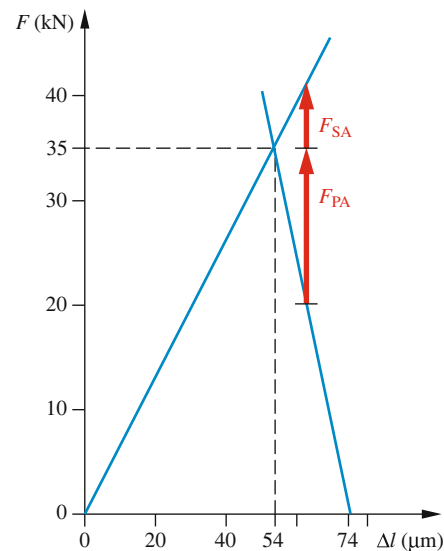
Daraus ermitteln wir für  $F_{SA}$ :

$$\begin{aligned} F_{SA} &= \frac{8,87 \cdot 10^{-9} \text{ N}^{-1}}{2,43 \cdot 10^{-8} \text{ N}^{-1} + 8,87 \cdot 10^{-9} \text{ N}^{-1}} \cdot 20 \text{ kN} \\ &= 5,35 \text{ kN} \end{aligned}$$

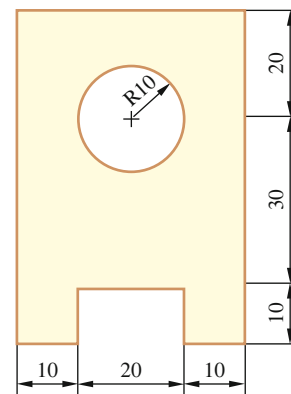
Zum Zeichnen des Verspannungsdiagramms sind nun noch  $\Delta l_S$  und  $\Delta l_P$  zu berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta l_S &= \frac{F_V l_K}{E_S A_S} = l_K \delta_S F_V \\ &= 64 \text{ mm} \cdot 2,43 \cdot 10^{-8} \text{ N}^{-1} \cdot 35.000 \text{ N} = 54 \mu\text{m} \quad \text{und} \\ x \Delta l_P &= \frac{F_V l_K}{E_P A_P} = l_K \delta_P F_V \\ &= 64 \text{ mm} \cdot 8,87 \cdot 10^{-9} \text{ N}^{-1} \cdot 35.000 \text{ N} = 20 \mu\text{m}. \end{aligned}$$

Aus diesen Werten ergibt sich das folgende Verspannungsdiagramm:



**5.5** • Gegeben ist der folgende spiegelsymmetrische Flächenquerschnitt (alle Abmessungen in mm):

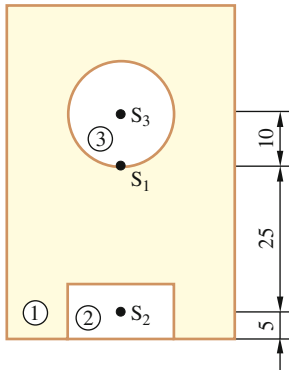


1. Bestimmen Sie die Koordinaten des Flächenschwerpunktes.
2. Die  $y$ -Achse sei nun diejenige horizontale Achse, die durch den soeben berechneten Flächenschwerpunkt verläuft. Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment  $I_y$ .

**Resultat:**

1. Der Flächenschwerpunkt liegt 31 mm oberhalb der Profilunterkante.
2.  $I_y = 552.245 \text{ mm}^4$ .

**Ausführliche Lösung:** Wir zerlegen die Fläche in die folgenden drei Teilflächen (1: großes Rechteck, 2: kleine rechteckige Aussparung, 3: Kreisloch).



Mit der linken unteren Ecke als Bezugspunkt (Koordinatensprung) ergibt sich:

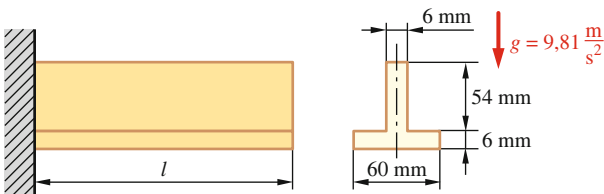
$$y_S = \frac{1}{1886 \text{ mm}^2} (30 \cdot 2400 - 5 \cdot 200 - 40 \cdot 314) \text{ mm}^3 = 31 \text{ mm}$$

$$x_S = 20 \text{ mm} \quad \text{aus Symmetriegründen}$$

Damit zur Steiner'schen Ergänzung:

$$I_{y, \text{ges}} = \frac{40 \text{ mm} \cdot (60 \text{ mm})^3}{12} + 2400 \text{ mm}^2 \cdot (1 \text{ mm})^2 - \frac{20 \text{ mm} \cdot (10 \text{ mm})^3}{12} - 200 \text{ mm}^2 \cdot (26 \text{ mm})^2 - \frac{\pi}{4} (10 \text{ mm})^4 - 314 \text{ mm}^2 \cdot (9 \text{ mm})^2 = 552.245 \text{ mm}^4$$

**5.6** • Ein Kragträger aus Stahl ( $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ ) der Länge  $l$  des abgebildeten T-förmigen Querschnitts wird durch sein Eigengewicht belastet.



Bei der zu ermittelnden maximal zulässigen Länge des Trägers  $l_{\text{max}}$  wird an der Einspannstelle gerade die zulässige Spannung  $\sigma_{\text{zul}} = 200 \text{ MPa}$  erreicht.

1. Bestimmen Sie das für die Durchbiegung des Trägers maßgebliche Flächenträgheitsmoment  $I_y$  des T-Profils.
2. Wie groß ist die sich aus Dichte, Querschnitt und Erdbeschleunigung ergebende Streckenlast  $q_0$ , die den Träger belastet? Setzen Sie für die Erdbeschleunigung  $9,81 \text{ m/s}^2$  an.
3. Wie groß ist  $l_{\text{max}}$ ?

**Resultat:**

1.  $I_y = 233.286 \text{ mm}^4$ .
2.  $q_0 = A \rho g = 53,68 \text{ N/m}$ .
3.  $l_{\text{max}} = 6,37 \text{ m}$ .

**Ausführliche Lösung:**

1. Schwerpunktlage oberhalb Trägerunterkante:

$$y_S = \frac{1}{54 \text{ mm} \cdot 6 \text{ mm} + 60 \text{ mm} \cdot 6 \text{ mm} \cdot (3 \text{ mm} \cdot 60 \text{ mm} \cdot 6 \text{ mm} + 33 \text{ mm} \cdot 54 \text{ mm} \cdot 6 \text{ mm})} = 17,2 \text{ mm}$$

$$I_y = \frac{60 \text{ mm} \cdot (6 \text{ mm})^3}{12} + (14,2 \text{ mm})^2 \cdot 360 \text{ mm}^2 + \frac{6 \text{ mm} \cdot (54 \text{ mm})^3}{12} + (15,8 \text{ mm})^2 \cdot 324 \text{ mm}^2 = 233.286 \text{ mm}^4$$

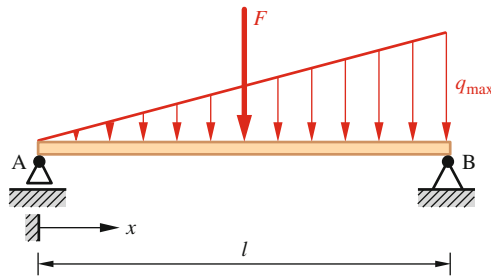
2. Ein laufender Meter des Trägers wiegt  $A \rho g \cdot 1 \text{ m}$ . Folglich beträgt die Streckenlast (=Gewichtskraft pro laufendem Meter)  $q_0 = A \rho g = 53,68 \text{ N/m}$ .
3. Wir berechnen diejenige Trägerlänge, bei der am kritischen Punkt (Oberkante der Einspannstelle) die zulässige Spannung  $\sigma_{\text{zul}} = 200 \text{ MPa}$  erreicht wird:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}} |z|_{\text{max}}}{I_y}$$

$$\text{mit } M_{\text{max}} = \frac{1}{2} q_0 l_{\text{max}}^2 \text{ und } |z|_{\text{max}} = 60 \text{ mm} - 17,2 \text{ mm} = 42,8 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow l_{\text{max}} &= \sqrt{\frac{2 M_{\text{max}}}{q_0}} = \sqrt{\frac{2 \sigma_{\text{zul}} I_y}{q_0 |z|_{\text{max}}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 233.286 \text{ mm}^4}{53,68 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 42,8 \text{ mm}}} \\ &= 6,37 \text{ m} \end{aligned}$$

**5.7** •• Ein im Punkt A los- und im Punkt B festgelegter Träger der Länge  $l$  wird durch eine dreieckförmige Streckenlast sowie in Trägermitte durch eine Punktlast belastet.



1. Berechnen Sie den Verlauf der Schnittgrößen  $N(x)$ ,  $Q(x)$  und  $M(x)$ .
2. Bestimmen Sie den Verlauf der Durchbiegung  $w(x)$ .
3. Es gelten nun für Geometrie und Belastung die unten aufgeführten konkreten Werte. Wie groß ist die Randfaserspannung in Trägermitte?

Zahlenwerte: Länge  $l = 1 \text{ m}$ , Trägerquerschnitt: 30 mm Höhe und 20 mm Breite,  $F = 500 \text{ N}$ ,  $q_{\max} = 600 \text{ N/m}$ .

### Resultat:

1.  $N_I(x) = N_{II}(x) = 0$ .  
 $Q_I(x) = \frac{F}{2} + \frac{q_{\max} l}{6} - \frac{q_{\max} x^2}{2l}$ .  
 $Q_{II}(x) = -\frac{F}{2} + \frac{q_{\max} l}{6} - \frac{q_{\max} x^2}{2l}$ .  
 $M_I(x) = \left(\frac{F}{2} + \frac{q_{\max} l}{6}\right)x - \frac{q_{\max} x^3}{6l}$ .  
 $M_{II}(x) = \left(\frac{F}{2} + \frac{q_{\max} l}{6}\right)x - F\left(x - \frac{l}{2}\right) - \frac{q_{\max} x^3}{6l}$ .
2.  $w(x) = \frac{F l^3}{48 E I_y} \left[ 3 \frac{x}{l} - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] + \frac{q_{\max} l^4}{360 E I_y} \left[ 7 \frac{x}{l} - 10 \left( \frac{x}{l} \right)^3 + 3 \left( \frac{x}{l} \right)^5 \right]$ .

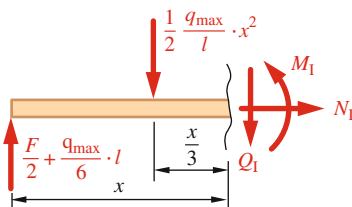
3.  $\sigma\left(\frac{l}{2}\right) = 54 \text{ MPa}$ .

### Ausführliche Lösung:

1. Lagerreaktionen:

$$A_y = \frac{F}{2} + \frac{q_{\max} l}{6}, B_y = \frac{F}{2} + \frac{q_{\max} l}{3}$$

Schnittgrößen im Bereich I (links der Punktlast):

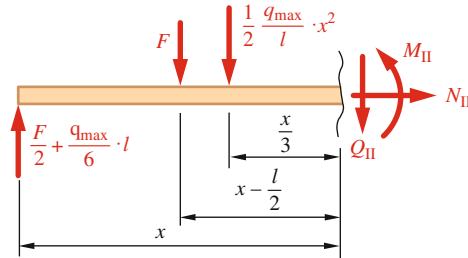


$$N_I(x) = 0$$

$$Q_I(x) = \frac{F}{2} + \frac{q_{\max} l}{6} - \frac{q_{\max} x^2}{2l}$$

$$M_I(x) = \left(\frac{F}{2} + \frac{q_{\max} l}{6}\right)x - \frac{q_{\max} x^3}{6l}$$

Schnittgrößen im Bereich II (rechts der Punktlast):



$$N_{II}(x) = 0$$

$$Q_{II}(x) = -\frac{F}{2} + \frac{q_{\max} l}{6} - \frac{q_{\max} x^2}{2l}$$

$$M_{II}(x) = \left(\frac{F}{2} + \frac{q_{\max} l}{6}\right)x - F\left(x - \frac{l}{2}\right) - \frac{q_{\max} x^3}{6l}$$

2. Die Lösung für die Durchbiegung entnehmen wir der Tabelle aus Abschn. 5.2 (additive Überlagerung der Lastfälle 1 und 3).

$$w(x) = \frac{F l^3}{48 E I_y} \left[ 3 \frac{x}{l} - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] + \frac{q_{\max} l^4}{360 E I_y} \left[ 7 \frac{x}{l} - 10 \left( \frac{x}{l} \right)^3 + 3 \left( \frac{x}{l} \right)^5 \right]$$

3. Das Biegemoment in Trägermitte beträgt

$$M_I\left(\frac{l}{2}\right) = \left(\frac{F}{2} + \frac{q_{\max} l}{6}\right) \frac{l}{2} - \frac{q_{\max} l^2}{48} = (250 \text{ N} + 100 \text{ N}) \cdot 0,5 \text{ m} - \frac{600 \text{ Nm}}{48} = 162,5 \text{ Nm},$$

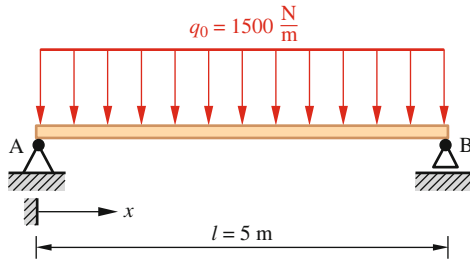
woraus sich für die Spannung

$$\sigma_{\max}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M_{\max} |z|_{\max}}{I_y} = \pm \frac{162,500 \text{ Nmm} \cdot 15 \text{ mm}}{\frac{20 \text{ mm} \cdot (30 \text{ mm})^2}{12}} = \pm 54 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

ergibt. Das  $\pm$ -Zeichen zeigt an, dass es sich bei den Spannungen an einer Seite – der Unterseite – um Zugspannungen und an der anderen Seite um Druckspannungen handelt.

- 5.8** • Für den skizzierten Träger sollen die Spannungen und die Durchbiegung berechnet werden.

Zahlenangaben: Elastizitätsmodul  $E = 12.000 \text{ MPa}$  (Holz), Querschnitt  $b \times h = 200 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$ .



Zahlenangaben: Elastizitätsmodul  $E = 12.000 \text{ MPa}$  (Holz), Querschnitt  $b \times h = 200 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$ .

1. Berechnen Sie den Verlauf des Biegemoments  $M(x)$  im Träger. An welcher Stelle nimmt  $M(x)$  seinen Maximalwert ein, und wie groß ist dieser?
2. Wie groß ist die Randfaserspannung in der Balkenmitte?
3. Berechnen Sie durch zweifache Integration der Differenzialgleichung der elastischen Linie die Durchbiegung  $w(x)$  des Trägers. Wie groß ist die Durchbiegung in der Balkenmitte?

#### Resultat:

1.  $M(x) = \frac{1}{2} q_0 l x - \frac{1}{2} q_0 x^2$ .  
Maximales Biegemoment in Balkenmitte mit  $M_{\max} = 4687,5 \text{ Nm}$ .
2.  $\sigma = 6,25 \text{ MPa}$ .
3.  $w(x) = \frac{q_0 l^4}{24 E I_y} \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left( \frac{x}{l} \right)^3 + \frac{x}{l} \right]$ .  
In Balkenmitte ist  $w = 18,1 \text{ mm}$ .

#### Ausführliche Lösung:

1. Die Lagerreaktionen in A und B betragen jeweils  $3750 \text{ N}$ .

$$M(x) = \frac{1}{2} q_0 l x - \frac{1}{2} q_0 x^2 = 3750 \text{ N} \cdot x - 750 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x^2$$

Das maximale Biegemoment tritt in Balkenmitte auf und beträgt  $M(2,5 \text{ m}) = 4687,5 \text{ Nm}$

2. 
$$\sigma_{\max} = \frac{M|z|_{\max}}{I_y} = \frac{M}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot \frac{h}{2}$$
$$= \frac{6 \cdot 4.687,500 \text{ Nmm}}{200 \text{ mm} \cdot (150 \text{ mm})^2} = 6,25 \text{ MPa}$$

3. Berechnung der Durchbiegung

1. Integration:

$$w'(x) = - \int \frac{M(x)}{E I_y} dx = - \frac{1}{E I_y} \int \left( \frac{1}{2} q_0 l x - \frac{1}{2} q_0 x^2 \right) dx$$
$$= - \frac{q_0}{2 E I_y} \left( \frac{1}{2} l x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) + C_1$$

2. Integration:

$$w(x) = - \int \left[ \frac{q_0}{2 E I_y} \left( \frac{1}{2} l x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) + C_1 \right] dx$$
$$= - \frac{q_0}{2 E I_y} \left( \frac{1}{12} l x^4 - \frac{1}{6} l x^3 \right) + C_1 x + C_2$$

Randbedingungen:

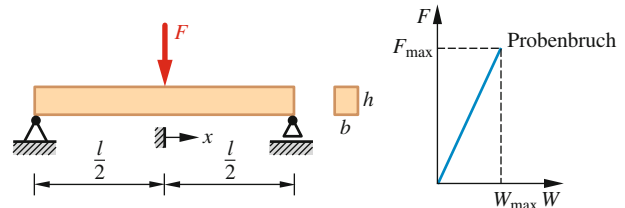
$$w(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$w(l) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{q_0 l^3}{24 E I_y}$$

$$\rightarrow w(x) = \frac{q_0 l^4}{24 E I_y} \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left( \frac{x}{l} \right)^3 + \frac{x}{l} \right]$$

$$\rightarrow w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q_0 l^4}{24 E I_y} \left[ \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right]$$
$$= \frac{5 q_0 l^4}{384 E I_y} = \dots = 18,1 \text{ mm}$$

**5.9 ••** Zur Ermittlung von Festigkeit und Elastizitätsmodul eines spröden Werkstoffs wird eine Probe rechteckigen Querschnitts in einem 3-Punkt-Biegeversuch bis zum Bruch belastet. Eine Skizze des Versuchs und das im Versuch gemessene Kraft-Verformungs-Diagramm ( $F$ : Belastung der Probe;  $w$ : Durchbiegung in der Probenmitte) sind Ihnen wie folgt gegeben:



1. Berechnen Sie den Verlauf des Biegemoments  $M(x)$  in der Probe. Wie groß ist das Biegemoment in der Probenmitte?
2. Wie lautet der Zusammenhang zwischen der maximalen Kraft  $F_{\max}$  und der Festigkeit  $\sigma_{\max}$  des Werkstoffs?
3. Berechnen Sie durch zweifache Integration der Differenzialgleichung der elastischen Linie die Durchbiegung  $w(x)$  des Trägers.
4. Wie lautet der Zusammenhang zwischen der maximalen Kraft  $F_{\max}$  und der Durchbiegung  $w_{\max}$  in der Probenmitte?
5. Es seien nun  $l = 60 \text{ mm}$ ,  $b = 5 \text{ mm}$ ,  $h = 10 \text{ mm}$ ,  $F_{\max} = 2,2 \text{ kN}$  und  $w_{\max} = 0,085 \text{ mm}$ . Wie groß sind Festigkeit  $\sigma_{\max}$  und Elastizitätsmodul  $E$  des Werkstoffs?

**Resultat:**

- linke Probenhälfte:  $M_I(x) = \frac{F}{2} \left( \frac{l}{2} + x \right)$   
rechte Probenhälfte:  $M_{II}(x) = \frac{F}{2} \left( \frac{l}{2} - x \right)$ ,  
 $M(x=0) = \frac{1}{4} Fl$
- $\sigma_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F_{\max} l}{bh^2}$
- $w(x) = -\frac{F}{12EI_y} \left( \frac{l}{2} - x \right)^3 - \frac{Fl^2 x}{16EI_y} + \frac{Fl^3}{32EI_y}$
- $E = \frac{F_{\max} l^3}{48 w_{\max} I_y}$
- $\sigma_{\max} = 396 \frac{N}{mm^2}$ ,  $E = 280.000 \text{ MPa}$

**Ausführliche Lösung:**

- linke Probenhälfte:  $M_I(x) = \frac{F}{2} \left( \frac{l}{2} + x \right)$ , rechte Probenhälfte:  $M_{II}(x) = \frac{F}{2} \left( \frac{l}{2} - x \right)$ ,  
 $\rightarrow M(x=0) = \frac{1}{4} Fl$ .

$$2. \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{I_y} |z|_{\max} = \frac{\frac{1}{4} F_{\max} l h}{\frac{bh^3}{12} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3 F_{\max} l}{2 b h^2}.$$

- Wir betrachten aus Symmetriegründen nur die rechte Probenhälfte. Die Randbedingungen lauten  $w(l/2) = 0$  und  $w'(0) = 0$  (horizontale Tangente in Probenmitte). Es ist also

$$w(x) = -\frac{F}{12EI_y} \left( \frac{l}{2} - x \right)^3 - \frac{Fl^2 x}{16EI_y} + \frac{Fl^3}{32EI_y}.$$

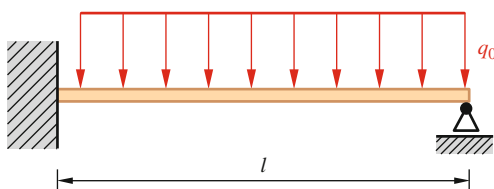
$$4. \quad w(0) = -\frac{F}{12EI_y} \left( \frac{l}{2} \right)^3 + \frac{Fl^3}{32EI_y} = \frac{Fl^3}{48EI_y}$$

$$\rightarrow E = \frac{Fl^3}{48 w(x=0) \cdot I_y}.$$

- Zahlenwerte einsetzen:

$$\sigma_{\max} = 396 \text{ MPa}, E = 280.000 \text{ MPa}.$$

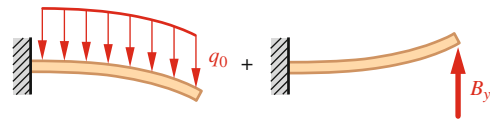
**5.10 ••** Ein statisch überbestimmt gelagerter Träger wird durch eine konstante Streckenlast  $q_0$  belastet. Gegeben seien  $q_0$  und  $l$ .



Berechnen Sie die Lagerreaktionen.

**Resultat:**  $A_x = 0$ ,  $A_y = \frac{5}{8} q_0 l$ ,  $M_A = \frac{1}{8} q_0 l^2$ ,  $B_y = \frac{3}{8} q_0 l$ .

**Ausführliche Lösung:** Wir ersetzen das Lager B durch seine Reaktionskraft und erhalten somit die folgenden beiden überlagerten Lastfälle:



Die Durchbiegungen für diese Lastfälle entnehmen wir der Durchbiegungstabelle:

$$\text{Lastfall Streckenlast: } w_{\max} = \frac{q_0 l^4}{8EI_y}$$

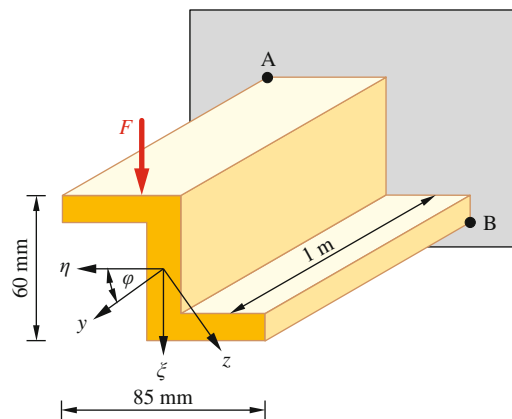
$$\text{Lastfall Punktlast: } w_{\max} = -\frac{Fl^3}{3EI_y} \text{ mit } F = B_y.$$

Am Lager B muss die Durchbiegung beider Lastfälle in Summe null ergeben:

$$\frac{q_0 l^4}{8EI_y} - \frac{B_y l^3}{3EI_y} = 0 \rightarrow B_y = \frac{3}{8} q_0 l$$

Die verbleibenden Lagerreaktionen berechnen wir aus den drei Gleichgewichtsbedingungen der ebenen Statik. Es ergibt sich  $A_x = 0$ ,  $A_y = \frac{5}{8} q_0 l$  und  $M_A = \frac{1}{8} q_0 l^2$ .

**5.11 •••** Ein 1 m langer Kragträger des Normprofils Z60 (Höhe 60 mm, Breite 85 mm) wird an seinem freien Ende durch die lotrechte Kraft  $F = 1 \text{ kN}$  belastet.



Der DIN 1027 kann man die folgenden Flächenträgheitsmomente entnehmen:

$$I_y = 44,7 \text{ cm}^4, I_z = 30,1 \text{ cm}^4 \text{ und } I_{y\zeta} = 28,8 \text{ cm}^4.$$

- Bestimmen Sie mit dem Mohr'schen Trägheitskreis die Hauptträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  und die Lage der Hauptträgheitsachsen.
- Bestimmen Sie die Spannungen in den Punkten A und B.

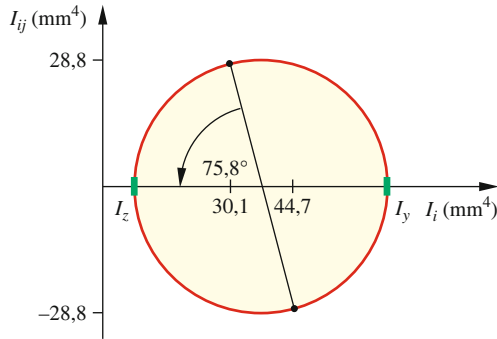


**Resultat:**

1.  $I_y = 67,1 \text{ cm}^4$ ,  $I_z = 7,7 \text{ cm}^4$ ,  $\varphi = 37,9^\circ$ .
2.  $\sigma_A = -62 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_B = 62 \text{ MPa}$ .

**Ausführliche Lösung:**

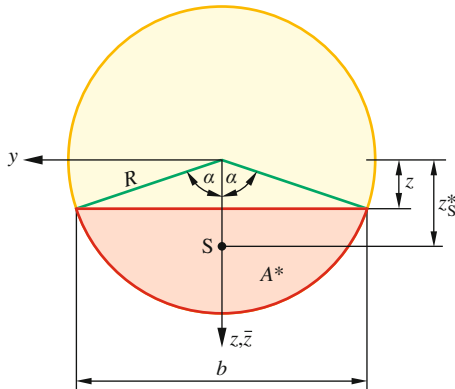
1. Die Hauptträgheitsmomente und den Drehwinkel zur Vertikalen bzw. Horizontalen, in dem diese auftreten entnehmen wir dem Mohr'schen Trägheitskreis. Wir erhalten  $I_y = 67,1 \text{ cm}^4$ ,  $I_z = 7,7 \text{ cm}^4$  und  $\varphi = 37,9^\circ$ .



2. Wir zerlegen  $F$  in die Komponenten entlang der Hauptträgheitsachsen,  $F_y = F \sin \varphi$  und  $F_z = F \cos \varphi$ . Damit betragen die Schnittmomente in der Einspannung  $M_y = -Fl \cos \varphi$  und  $M_z = -Fl \sin \varphi$ . Die Abstände des Punktes A zu den Hauptträgheitsachsen betragen  $z_A = -30 \text{ mm} \cos 37,9^\circ - 42,5 \text{ mm} \sin 37,9^\circ = -49,8 \text{ mm}$  und  $y_A = -30 \text{ mm} \sin 37,9^\circ + 42,5 \text{ mm} \cos 37,9^\circ = 15,1 \text{ mm}$ . Beim Punkt B ändern sich aus Symmetriegründen die Vorzeichen; die Beträge bleiben gleich.

$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma &= \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = -\frac{Fl \cos \varphi}{I_y} z - \frac{Fl \sin \varphi}{I_z} y \\ &= \frac{1 \text{ kN} \cdot 1000 \text{ mm} \cdot \cos 37,9^\circ}{67,1 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} \cdot 49,8 \text{ mm} \\ &\quad - \frac{1 \text{ kN} \cdot 1000 \text{ mm} \cdot \sin 37,9^\circ}{7,7 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} \cdot 15,1 \text{ mm} \\ &= -62 \text{ MPa} \end{aligned}$$

- 5.12** ●●● Berechnen Sie die durch eine Querkraft hervorgerufene Schubspannungsverteilung in einem Vollkreisquerschnitt des Radius  $R$ .

**Resultat:**

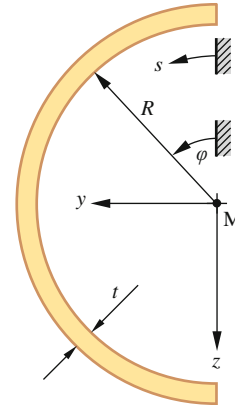
$$\tau(\alpha) = \frac{4}{3} \frac{Q(x)}{\pi R^2} \sin^2 \alpha.$$

**Ausführliche Lösung:** Für  $I_y$  und  $b(z)$  gilt  $I_y = \frac{\pi}{4} R^4$  und  $b(z) = 2R \sin \alpha$ . Aus  $A^*$  und  $z_s^*$  berechnen wir  $S_y$  als  $S_y = A^* \cdot z_s^* = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha$ .

$$\begin{aligned} \rightarrow \tau &= \frac{Q(x) S_y(z)}{I_y b(z)} = \frac{Q(x) \cdot \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha}{\frac{\pi}{4} R^4 \cdot 2R \sin \alpha} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{Q(x)}{\pi R^2} \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Schubspannungen in Querschnittmitte ( $\alpha = 90^\circ$ ) maximal werden und dort  $\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{A}$  betragen.

- 5.13** ●●● Gegeben ist das skizzierte dünnwandige Hohlprofil (Radius  $R$ , Wandstärke  $t$ ,  $t \ll R$ ).



1. Berechnen Sie die durch eine Querkraft hervorgerufene Schubspannungsverteilung.
2. Berechnen Sie die Lage des Schubmittelpunktes.

**Resultat:**

1.  $\tau(\varphi) = \frac{2Q(x)}{\pi R t} \sin \varphi$ .
2.  $y_M$  bzgl. Kreismittelpunkt  $= \frac{4R}{\pi}$ .

**Ausführliche Lösung:**

- 1.

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA \text{ mit } z = -R \cos \varphi \text{ und } dA = t \cdot R d\varphi. \\ \rightarrow I_y &= \int_{\varphi=0}^{\pi} (-R \cos \varphi)^2 t R d\varphi \\ &= R^3 t \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} R^3 t \\ S_y &= \int_s \bar{z} dA \end{aligned}$$



mit  $\tilde{z}(s) = -R \cos \tilde{\varphi}$ ,  $t = \text{konstant}$ ,  $d\tilde{s} = R d\tilde{\varphi}$  und  $l^* = \pi R$

$$\begin{aligned} \rightarrow S_y &= \int_{A^*} \tilde{z} dA = \int_{\varphi}^{\pi} -(R \cos \tilde{\varphi}) t R d\tilde{\varphi} \\ &= R^2 t \sin \varphi \\ \rightarrow \tau &= \frac{Q(x) S_y(s)}{I_y t(s)} = \frac{Q(x)}{t \frac{\pi}{2} R^3 t} R^2 t \sin \varphi \\ &= \frac{2 Q(x)}{\pi R t} \sin \varphi \end{aligned}$$

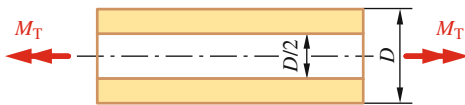
2. Wir bestimmen die Lage des Schubmittelpunkts mit Bezug zum Kreismittelpunkt M, da für diesen  $r^* = R$  = konstant ist.

$$y_{M, \text{ bzgl. M}} = \frac{1}{I_y} = \int_0^{l^*} S_y r^* ds$$

mit  $ds = R d\varphi$ .

$$\begin{aligned} \rightarrow y_{M, \text{ bzgl. M}} &= \frac{2}{\pi R^3 t} \int_0^{\pi} R^4 t \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{2 R}{\pi} [-\cos \varphi]_0^{\pi} = \frac{4 R}{\pi} \end{aligned}$$

- 5.14 •** Eine zylindrische Vollwelle des Durchmessers  $D$  soll mit einem Bohrungsdurchmesser von  $D/2$  hohl gebohrt werden.



- Um wie viele Prozent verringert sich das Wellengewicht?
- Um wie viele Prozent erhöhen sich die Torsionsspannungen?
- Um wie viele Prozent erhöht sich der Verdrehwinkel?

**Resultat:** 1: 25%, 2 und 3: 7%.

**Ausführliche Lösung:**

1.

$$\frac{m_H}{m_V} = \frac{D^2 - (\frac{D}{2})^2}{D^2} = \frac{3}{4},$$

also 25% Gewichtsersparnis (Index V für Vollwelle, H für Hohlwelle)

2.

$$\frac{\tau_H}{\tau_V} = \frac{W_{T,V}}{W_{T,H}} = \frac{D^4}{D^4 - (\frac{D}{2})^4} = 1,07,$$

also 7% höhere Spannungen.

$$\frac{\vartheta_H}{\vartheta_V} = \frac{I_{T,V}}{I_{T,H}} = \frac{D^4}{D^4 - (\frac{D}{2})^4} = 1,07,$$

also 7% größerer Verdrehwinkel.

- 5.15 •** Bei gewöhnlichen Garagentoren sorgen zwei bei geschlossenem Tor gespannte Zugfedern dafür, dass sich die Tore trotz hohen Gewichts mit vergleichsweise wenig Kraft öffnen und schließen lassen.

Es bestehe nun die Schraubenfeder eines Garagentors aus 7 mm starkem Stahldraht ( $G = 80.000 \text{ MPa}$ ), der in 67 Windungen mit einem mittleren Windungsdurchmesser von  $D = 52 \text{ mm}$  gewickelt ist. Bei geschlossenem Garagentor verlängern sich die Federn von im entspannten Zustand 500 mm auf 800 mm. Berechnen Sie die Federkonstante  $c$ , die Federkraft  $F$  bei geschlossenem Tor und die in der Feder bei geschlossenem Tor herrschenden Torsionsspannungen.

**Resultat:**  $c = 2,5 \text{ N/mm}$ ,  $F = 765 \text{ N}$ ,  $\tau = 295 \text{ MPa}$ .

**Ausführliche Lösung:** Es seien der mittlere Windungsradius der Feder mit  $R$  und der Radius des Federdrahtes mit  $r$  bezeichnet.

$$C = \frac{F}{f} = \frac{G I_T}{2 \pi R^3 n}$$

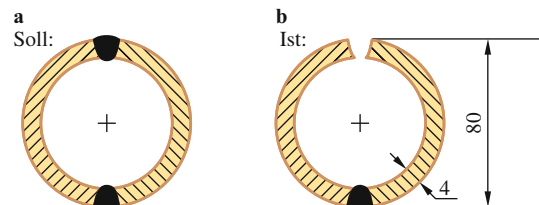
mit  $I_T = \frac{\pi}{2} r^4$

$$\rightarrow C = \frac{G r^4}{4 R^3 n} = \frac{80.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot (3,5 \text{ mm})^4}{4 (26 \text{ mm})^3 \cdot 67} = 2,55 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$F = C \cdot \Delta l = 2,55 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 300 \text{ mm} = 765 \text{ N}$$

$$\tau = \frac{M_T}{W_T} = \frac{F \cdot R}{\frac{\pi}{2} r^3} = \frac{765 \text{ N} \cdot 26 \text{ mm}}{\frac{\pi}{2} (3,5 \text{ mm})^3} = 295 \text{ MPa}$$

- 5.16 •** Eine Hohlwelle soll wie in der folgenden Abbildung links skizziert aus zwei miteinander verschweißten Halbkreisprofilen (Außendurchmesser 80 mm, Wandstärke 4 mm) hergestellt werden, um ein Torsionsmoment  $M_T$  zu übertragen. Berechnen Sie, um welchen Faktor sich die Torsionsspannungen und der Verdrehwinkel erhöhen, falls eine der beiden Schweißnähte fehlerhafter Weise nicht gelegt wird (Abbildung rechts).



**Resultat:**  $\tau$  erhöht sich um den Faktor 27,  $\vartheta$  um den Faktor 272.

**Ausführliche Lösung:** Das Verhältnis der Torsionsspannungen beträgt

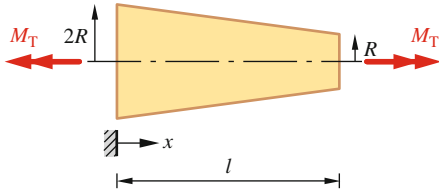
$$\frac{\tau_o}{\tau_g} = \frac{W_g}{W_o} = \frac{\frac{\pi}{2} R_a^4 - R_i^4}{\frac{1}{3} h t^2} = \frac{\frac{\pi}{2} [(40 \text{ mm})^4 - (36 \text{ mm})^4]}{\frac{1}{3} \pi \cdot 76 \text{ mm} \cdot (4 \text{ mm})^2} = 27$$

(Index o für das offene und Index g für das geschlossene Profil.)

Das Verhältnis der Verdrehwinkel beträgt

$$\frac{\vartheta_o}{\vartheta_g} = \frac{I_g}{I_o} = \frac{\frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4)}{\frac{1}{3} h t^3} = \frac{\frac{\pi}{2} [(40 \text{ mm})^4 - (36 \text{ mm})^4]}{\frac{1}{3} \pi \cdot 76 \text{ mm} \cdot (4 \text{ mm})^3} = 272$$

**5.17 ••** Eine konische Welle (Länge  $l$ , Radien an den Enden  $2R$  und  $R$ ) soll ein Torsionsmoment  $M_T$  übertragen. Berechnen Sie den Verdrehwinkel  $\vartheta$ .



**Resultat:**

$$\vartheta = \frac{7}{12} \frac{M_T l}{\pi G R^4}.$$

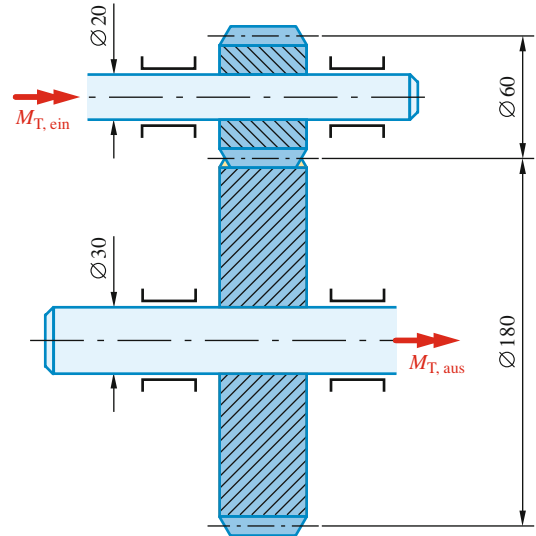
**Ausführliche Lösung:**

$$\vartheta = \int_0^l \frac{M_T}{G I_T} dx$$

mit  $I_T = \frac{\pi}{2} R(x)^4$  und  $R(x) = 2R - \frac{R}{l}x$ .

$$\begin{aligned} \rightarrow \vartheta &= \frac{2 M_T}{\pi G} \int_0^l \left( 2R - \frac{R}{l}x \right)^{-4} dx \\ &= \frac{2 M_T}{\pi G} \left[ \frac{1}{3R} \left( 2R - \frac{R}{l}x \right)^{-3} \right]_0^l \\ &= \frac{2 M_T l}{3 \pi G R} \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{8R^3} \right) = \frac{7}{12} \frac{M_T l}{\pi G R^4} \end{aligned}$$

**5.18 •** Die Eingangswelle eines einstufigen Getriebes (Teilkreisdurchmesser Zahnrad 1: 60 mm, Teilkreisdurchmesser Zahnrad 2: 180 mm) überträgt das Drehmoment  $M_{T,\text{ein}} = 100 \text{ Nm}$ .



1. Berechnen Sie das Drehmoment  $M_{T,\text{aus}}$  in der Ausgangswelle des Getriebes.
2. Berechnen Sie die Torsionsspannungen in Ein- und Ausgangswelle.

**Resultat:**

1.  $M_{T,\text{aus}} = 300 \text{ Nm}$ .
2.  $\tau_{\text{ein}} = 64 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{\text{aus}} = 57 \text{ MPa}$ .

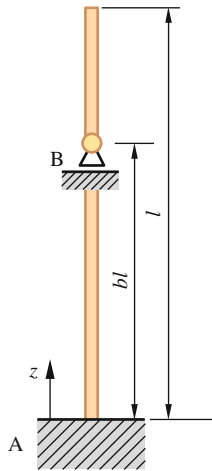
**Ausführliche Lösung:**

1. Die Zahnkräfte sind für beide Zahnräder gleich groß, sodass das Drehmoment in der Ausgangswelle aufgrund des größeren Hebelarms um den Faktor  $90 \text{ mm}/30 \text{ mm}$  größer ist. Es ist also  $M_{T,\text{aus}} = 300 \text{ Nm}$ .
- 2.

$$\tau_{\text{ein}} = \frac{M_{T,\text{ein}}}{W_{T,\text{ein}}} = \frac{100.000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{2} (10 \text{ mm})^3} = 64 \text{ MPa}$$

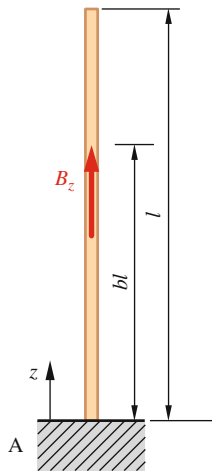
$$\tau_{\text{aus}} = \frac{M_{T,\text{aus}}}{W_{T,\text{aus}}} = \frac{300.000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{2} (15 \text{ mm})^3} = 57 \text{ MPa}$$

**5.19 ••** Ein Stab mit der Länge  $l$  und dem Gewicht  $G$  sei unten (Punkt A) sowie auf der Position  $z = b \cdot l$  (mit  $0 < b < 1$ , Punkt B) jeweils vertikal abgestützt. Berechnen Sie die Lagerreaktionen.



**Resultat:**  $A_z = G(2 - b)$ ,  $B_z = \frac{G}{2}(b - 2)$ .

**Ausführliche Lösung:** Als statische Unbekannte sei  $B_z$  gewählt. Dann erhalten wir das folgende statisch bestimmte System:



und das Kräftegleichgewicht in z-Richtung ergibt  $A_z = G - B_z$ . Allein aus dem Eigengewicht der Säule beträgt der Normalkraftverlauf zwischen A und B:

$$N(z) = -\frac{l-z}{l} \cdot G.$$

Der durch die statische Unbekannte bewirkte Normalkraftverlauf beträgt  $N(z) = B_z$ .

Die Verschiebung am Punkt B allein durch das Eigengewicht beträgt nun:

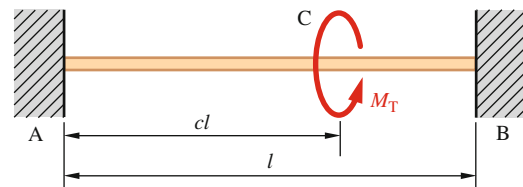
$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{1}{EA} \int_0^l -\frac{l-z}{l} \cdot G dz \\ &= \frac{G}{2EA} \left[ (l-b)^2 - l^2 \right] \\ &= \frac{Gl}{2EA} (b^2 - 2b). \end{aligned}$$

Die Verschiebung am Punkt B allein durch die statische Unbekannte beträgt:

$$\Delta l = \frac{blB_z}{EA}.$$

Die Superposition beider Verschiebungen zu null führt zu  $B_z = \frac{G}{2}(b - 2)$ , woraus sich mit dem Kräftegleichgewicht in z-Richtung  $A_z = G(2 - b)$  ergibt.

**5.20** • Ein Träger der Länge  $l$  sei an beiden Seiten fest eingespannt. Im Punkt C (im Abstand von  $cl$ ,  $0 < c < 1$  vom linken Trägerende) wird er durch das Torsionsmoment  $M_T$  belastet. Berechnen Sie die Lagerreaktionen.



**Resultat:**  $M_{TA} = -M_T(1 - c)$ ,  $M_{TB} = -M_T \cdot c$ .

**Ausführliche Lösung:** Als statische Unbekannte sei  $M_{TB}$  gewählt. Das Torsionsmomentengleichgewicht lautet  $M_{TA} = -M_T - M_{TB}$ .

Im Punkt C betragen die Verdrehungen allein durch das äußere Moment  $M_T$ :

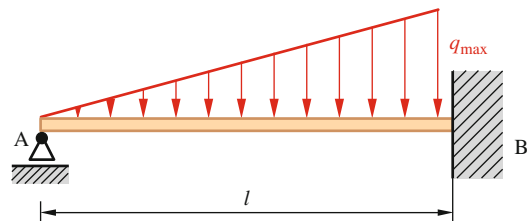
$$\vartheta = \frac{M_T cl}{GI_T},$$

und allein durch die statische Unbekannte  $M_{TB}$ :

$$\vartheta = \frac{M_{TB} l}{GI_T}.$$

Die Superposition beider Verdrehung zu null führt zu  $M_{TB} = -M_T \cdot c$ , woraus sich mit dem Torsionsmomentengleichgewicht  $M_{TA} = -M_T(1 - c)$  ergibt.

**5.21** • Der abgebildete Träger der Länge  $l$  ist im Punkt A durch ein Loslager und im Punkt B durch eine feste Einspannung gelagert. Er wird durch eine dreieckförmige Streckenlast belastet. Berechnen Sie die Lagerreaktionen.



**Resultat:**  $A_y = \frac{1}{10} q_{\max} l$ ,  $B_y = \frac{2}{5} q_{\max} l$ ,  $M_B = -\frac{1}{15} q_{\max} l^2$ .

**Ausführliche Lösung:** Als statische Unbekannte sei  $A_y$  gewählt. Momenten- und vertikales Kräftegleichgewicht lauten:

$$M_B = A_y l - \frac{1}{6} q_{\max} l^2 \quad \text{und}$$

$$B_y = \frac{1}{2} q_{\max} l - A_y.$$

Im Punkt A betragen die Durchbiegungen allein durch die äußere Streckenlast:

$$w_A = \frac{1}{30} \frac{q_{\max} l^4}{EI_y}$$

und allein durch die statische Unbekannte  $A_y$ :

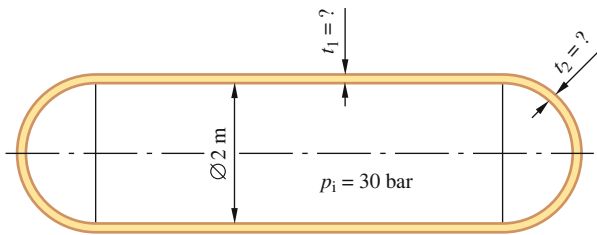
$$w_A = -\frac{A_y l^3}{3EI_y}.$$

Die Superposition beider Durchbiegungen zu null führt zu  $A_y = \frac{1}{10} q_{\max} l$ , woraus sich mit den beiden oben aufgeführten Gleichgewichtsbedingungen  $B_y = \frac{2}{5} q_{\max} l$  und  $M_B = -\frac{1}{15} q_{\max} l^2$  ergibt.

**5.22 •** Ein zylindrischer Druckbehälter des Durchmessers 2 m mit halbkugelförmigen Stirnseiten soll einen Innendruck von 30 bar aufnehmen. Welche Wandstärken sind

1. für den (mittleren) zylindrischen Teil des Druckbehälters und
2. für die halbkugelförmigen Stirnseiten

erforderlich, wenn die größte Hauptspannung jeweils den zulässigen Wert  $\sigma_{\text{zul}} = 200 \text{ MPa}$  nicht überschreiten darf?



**Resultat:**

1. 15 mm.
2. 7,5 mm.

**Ausführliche Lösung:**

1. Die größte Hauptspannung ist die Umfangsspannung.

$$\sigma_{\text{zul}} = \sigma_{\varphi} = \frac{p_i R}{t_{\min}}$$

$$\rightarrow t_{\min} = \frac{p_i R}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1000 \text{ mm}}{200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 15 \text{ mm}$$

2.

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{p_i R}{2t_{\min}} \rightarrow t_{2,\min} = 7,5 \text{ mm}$$

**5.23 ••** In einem in 10.000 m Höhe fliegenden Flugzeug herrscht bei einem Umgebungsdruck von 260 hPa ein Kabinendruck von 750 hPa. Der Rumpf des Flugzeugs lässt sich – ein wenig vereinfacht – als dünnwandiger zylindrischer Druckbehälter auffassen.

Berechnen Sie

1. die Spannungen im Flugzeugrumpf sowie
2. die durch den Druckunterschied hervorgerufene Verformung des Flugzeugrumpfes.

Zahlenwerte: Rumpflänge  $l = 40 \text{ m}$ , Rumpfdurchmesser  $D = 4 \text{ m}$ , Wandstärke  $t = 1,6 \text{ mm}$ , Material Aluminium ( $E = 70.000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ).

**Resultat:**

1.  $\sigma_{\varphi} = 61 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_l = 31 \text{ MPa}$ .
2.  $\Delta l = 7 \text{ mm}$ ,  $\Delta D = 3 \text{ mm}$ .

**Ausführliche Lösung:**

1. Umfangsspannung:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{p_i R}{t} = \frac{(75.000 - 26.000) \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 2000 \text{ mm}}{1,6 \text{ mm}} = 61 \text{ MPa}$$

Längsspannung:

$$\sigma_l = \frac{p_i R}{2t} = 31 \text{ MPa}$$

2. Aus den Spannungen berechnen wir zunächst mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes die Dehnungen:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_{\varphi} + \sigma_l)]$$

$$= \frac{1}{70.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \left[ -0,3 \left( 61 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + 31 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) \right]$$

$$= -3,94 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi} - \nu(\sigma_r + \sigma_l)]$$

$$= \frac{1}{70.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \left( 61 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 0,3 \cdot 31 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)$$

$$= 7,39 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_l = \frac{1}{E} [\sigma_l - \nu(\sigma_r + \sigma_{\varphi})]$$

$$= \frac{1}{70.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \left( 31 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 0,3 \cdot 61 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)$$

$$= 1,81 \cdot 10^{-4}$$

Aus den Dehnungen folgen die Verformungen. Aufgepasst bei der Durchmesseränderung: Diese wird nicht aus der Dehnung in radialer Richtung,  $\varepsilon_r$ , errechnet, da  $\varepsilon_r$  ein Maß für die Verjüngung der Wandstärke durch den Überdruck ist. Ausschlaggebend für die Durchmesseränderung ist die Dehnung in Umfangsrichtung,  $\varepsilon_\varphi$ , da Kreisumfang und Kreisdurchmesser zueinander proportional sind, sodass die relativen Zunahmen von Rumpfumfang und Rumpfdurchmesser gleich groß sind.

$$\Delta l = l \cdot \varepsilon_l = 40 \text{ m} \cdot 1,81 \cdot 10^{-4} = 7 \text{ mm}$$

$$\Delta D = D \cdot \varepsilon_\varphi = 12 \text{ m} \cdot 7,39 \cdot 10^{-4} = 3 \text{ mm}$$

**5.24 •** Eine zylindrische Vollwelle des Radius  $R = 10 \text{ mm}$  wird an beiden Enden durch eine im Abstand  $R/2$  zur Mittellinie angreifende Kraft  $F = 20 \text{ kN}$  belastet. Die zulässige Spannung des Wellenwerkstoffs betrage  $\sigma_{\text{zul}} = 200 \text{ MPa}$ .



1. Welche Spannungen herrschen in der Welle?
2. Liegt die Beanspruchung der Welle im zulässigen Bereich?

#### Resultat:

1.  $\sigma_{\text{Zug}} = 64 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{\text{Biegung}} = 127 \text{ MPa}$ .
2.  $\sigma_{\text{gesamt}} = 191 \text{ MPa}$ , also zulässig.

#### Ausführliche Lösung:

1.
$$\sigma_{\text{Zug}} = \frac{F}{A} = \frac{20.000 \text{ N}}{\pi \cdot (10 \text{ mm})^2} = 64 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{Biegung}} = \frac{F \cdot \frac{R}{2}}{W_y} = \frac{20.000 \text{ N} \cdot 5 \text{ mm}}{\frac{\pi}{4} (10 \text{ mm})^3} = 127 \text{ MPa}$$
2. Zug- und Biegespannung können einfach addiert werden, da beides Spannungen in Wellenrichtung sind. Es ist nicht erforderlich, Festigkeitshypothesen anzuwenden.

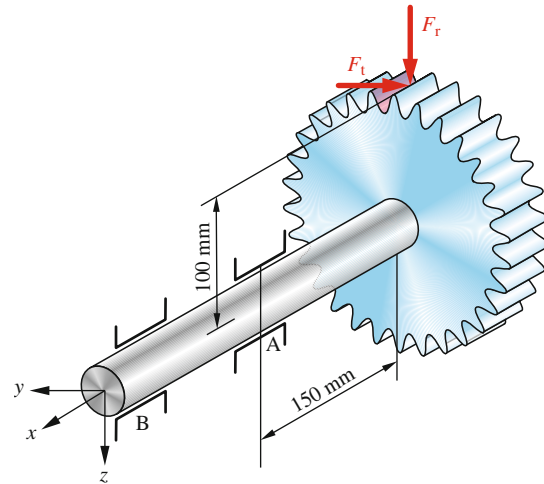
$$\sigma_{\text{gesamt}} = \sigma_{\text{Zug}} + \sigma_{\text{Biegung}}$$

$$= 64 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + 127 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 191 \text{ MPa}$$

Die Beanspruchung der Welle liegt also im zulässigen Bereich.

**5.25 ••** Eine in den Punkten A und B gelagerte Getriebewelle trägt ein geradzahntes Zahnrad des Teil-

kreisradius  $100 \text{ mm}$ , an dem die Kräfte  $F_r = 440 \text{ N}$  (Radialkraft) und  $F_t = 1200 \text{ N}$  (Tangentialkraft) angreifen. Der Radius der Getriebewelle betrage  $20 \text{ mm}$ .



Zu untersuchen sind die Spannungen in der Welle auf Höhe des Lagers A. Schubspannungen durch Querkraft dürfen dabei vernachlässigt werden. Gehen Sie wie folgt vor:

1. Bestimmen Sie die Schnittgrößen auf Höhe des Lagers A.
2. Bestimmen Sie die maximale Biege- und Torsionsspannung auf Höhe des Lagers A.
3. Bestimmen Sie die Vergleichsspannungen nach der N-, S- und GE-Hypothese.

#### Resultat:

1.  $M_y = 66 \text{ N m}$  (für Biegung um die  $y$ -Achse),  
 $M_z = 180 \text{ N m}$  (für Biegung um die  $z$ -Achse),  
 $M_{\text{ges}} = 192 \text{ N m}$  (resultierendes Biegemoment),  
 $M_T = 12 \text{ N m}$  (Torsionsmoment).
2. Biegespannung  $\sigma = 30,6 \text{ MPa}$ ,  
Torsionsspannung  $\tau = 9,5 \text{ MPa}$ .
3. N-Hypothese:  $\sigma_V = 33 \text{ MPa}$ ,  
S-Hypothese:  $\sigma_V = 36 \text{ MPa}$ ,  
GE-Hypothese:  $\sigma_V = 35 \text{ MPa}$ .

#### Ausführliche Lösung:

1. Auf Höhe des Lagers A betragen die Schnittmomente

$$M_y = 440 \text{ N} \cdot 150 \text{ mm} = 66 \text{ N m}$$

(Biegung um die  $y$ -Achse) und

$$M_z = 1200 \text{ N} \cdot 150 \text{ mm} = 180 \text{ N m}$$

(Biegung um die  $z$ -Achse). Den Betrag des resultierenden Schnittmomentes ermitteln wir durch vektorielle Überlagerung (Pythagoras) als

$$M_{\text{ges}} = \sqrt{(66 \text{ N m})^2 + (180 \text{ N m})^2} = 192 \text{ N m}$$

Das Torsionsmoment auf Höhe des Lagers A beträgt

$$M_T = 1200 \text{ N} \cdot 100 \text{ mm} = 120 \text{ Nmm}$$

2. Biegespannung:

$$\sigma = \frac{M}{W_y} = \frac{192.000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{4} (20 \text{ mm})^3} = 30,6 \text{ MPa}$$

3. Torsionsspannung:

$$\tau = \frac{M_T}{W_T} = \frac{120.000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{2} (20 \text{ mm})^3} = 9,5 \text{ MPa}$$

4. Aus  $\sigma$  und  $\tau$  ergeben sich die Vergleichsspannungen nach der N-, S- und GE-Hypothese wie folgt:  
N-Hypothese:

$$\begin{aligned} \sigma_V &= \frac{1}{2} \left( \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ 30,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + \sqrt{\left( 30,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2 + 4 \left( 9,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2} \right] \\ &= 33 \text{ MPa} \end{aligned}$$

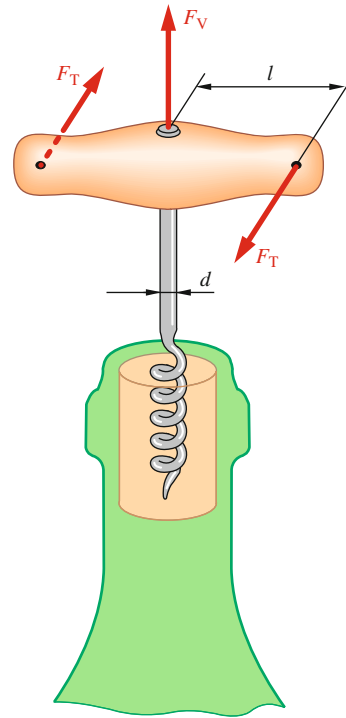
S-Hypothese:

$$\begin{aligned} \sigma_V &= \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \\ &= \sqrt{\left( 30,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2 + 4 \left( 9,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2} \\ &= 36 \text{ MPa} \end{aligned}$$

GE-Hypothese:

$$\begin{aligned} \sigma_V &= \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} \\ &= \sqrt{\left( 30,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2 + 3 \left( 9,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2} \\ &= 35 \text{ MPa} \end{aligned}$$

**5.26 •** Wie dem passionierten Weintrinker bekannt ist, lässt sich eine Weinflasche mit einem gewöhnlichen Korkenzieher einfacher entkorken, wenn der Korken beim Herausziehen etwas gedreht wird. Der Korkenzieher wird dann durch die den Korken herausziehende Kraft  $F_{ax}$  und die beiden den Korken drehenden Kräfte  $F_T$  belastet.



Für  $F_{ax} = 100 \text{ N}$ ,  $F_T = 7 \text{ N}$ ,  $d = 3 \text{ mm}$  (Schaftdurchmesser) und  $l = 30 \text{ mm}$  (Hebelarm der Verdrehkräfte) ist die Beanspruchung im Schaft des Korkenziehers zu ermitteln.

- Bestimmen Sie die Schnittgrößen im Korkenzieherschaft.
- Bestimmen Sie die an einem beliebigen Punkt an der Oberfläche des Korkenzieherschaftes herrschenden Spannungen.
- Berechnen Sie die Vergleichsspannungen in diesem Punkt nach der N-, S- und GE-Hypothese.

**Resultat:**

- $N = 100 \text{ N}$ ,  $|M_T| = 420 \text{ Nmm}$ .
- $\sigma = 14 \text{ MPa}$ ,  $\tau = 79 \text{ MPa}$ .
- N-Hypothese:  $\sigma_V = 86 \text{ MPa}$ ,  
S-Hypothese:  $\sigma_V = 159 \text{ MPa}$ ,  
GE-Hypothese:  $\sigma_V = 138 \text{ MPa}$ .

**Ausführliche Lösung:**

- $N = 100 \text{ N}$ ,  $|M_T| = 2 F_T \cdot l = 420 \text{ Nmm}$
- Normalspannung durch Zugkraft:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{100 \text{ N}}{\pi \cdot (1,5 \text{ mm})^2} = 14 \text{ MPa}$$

Schubspannung durch Torsion:

$$\tau = \frac{M_T}{W_T} = \frac{M_T}{\frac{1}{2} \pi R^3} = \frac{420 \text{ Nmm}}{\frac{1}{2} \pi (1,5 \text{ mm})^3} = 79 \text{ MPa}$$

3. N-Hypothese:

$$\begin{aligned}\sigma_V &= \frac{1}{2} \left( \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ 14 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + \sqrt{\left( 14 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2 + 4 \left( 79 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2} \right] \\ &= 86 \text{ MPa}\end{aligned}$$

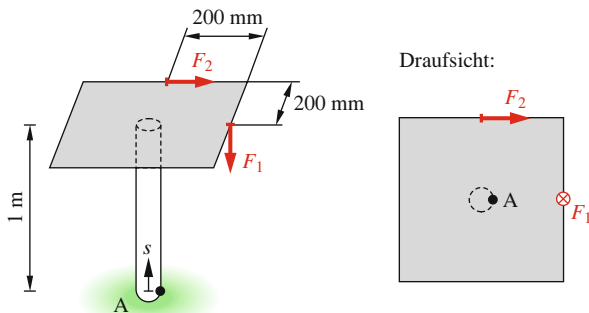
S-Hypothese:

$$\begin{aligned}\sigma_V &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ &= \sqrt{\left( 14 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2 + 4 \left( 79 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2} \\ &= 159 \text{ MPa}\end{aligned}$$

GE-Hypothese:

$$\begin{aligned}\sigma_V &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \\ &= \sqrt{\left( 14 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2 + 3 \left( 79 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2} \\ &= 138 \text{ MPa}\end{aligned}$$

**5.27 ••** Auf einem 1 m hohen Pfosten ist eine quadratische, 400 mm × 400 mm große Platte befestigt. An der Platte greifen die Kräfte  $F_1 = 2700 \text{ N}$  und  $F_2 = 800 \text{ N}$  an. Der Pfosten bestehe aus einem kreisförmigen Rohr des Außendurchmessers  $D_a = 80 \text{ mm}$  und des Innendurchmessers  $D_i = 70 \text{ mm}$ .



1. Berechnen Sie den Verlauf der Schnittgrößen  $N(s)$ ,  $Q(s)$ ,  $M(s)$  und  $M_T(s)$  im Pfosten.
2. Berechnen Sie die im Punkt A an der Einspannung des Pfostens herrschenden Spannungskomponenten. Der durch Querkraft erzeugte Schub ist dabei vernachlässigbar.
3. Wie groß sind die im Punkt A herrschenden Vergleichsspannungen nach der N-, S- und GE-Hypothese?

**Resultat:**

1.  $N(s) = -2700 \text{ N}$ ,  $Q(s) = 800 \text{ N}$ ,  
 $M(s) = 1,34 \cdot 10^6 \text{ N mm} - 800 \text{ N} \cdot s$ ,  
 $M_T(s) = 160.000 \text{ N mm}$ .
2. Zug- / Druckspannung:  $\sigma = -2,3 \text{ MPa}$ ,  
 Biegespannung:  $\sigma = -64,4 \text{ MPa}$ ,  
 Torsionsspannung:  $\tau = 3,8 \text{ MPa}$ .
3. N-Hypothese:  $\sigma_V = 0,2 \text{ MPa}$ ,  
 S-Hypothese:  $\sigma_V = 67,1 \text{ MPa}$ ,  
 GE-Hypothese:  $\sigma_V = 67,0 \text{ MPa}$ .

**Ausführliche Lösung:**

1.

$$\begin{aligned}N(s) &= -2700 \text{ N}, \\ Q(s) &= 800 \text{ N}, \\ M(s) &= F_1 \cdot 200 \text{ mm} + F_2 \cdot (1000 \text{ mm} - s) \\ &= 1,34 \cdot 10^6 \text{ Nmm} - 800 \text{ N} \cdot s, \\ M_T(s) &= 160.000 \text{ Nmm}.\end{aligned}$$

2. Druckspannung durch Normalkraft:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{\pi \cdot (R_a^2 - R_i^2)} = -2,3 \text{ MPa}$$

(Minuszeichen, da Druckspannung),  
 Biegespannung:

$$\sigma = \frac{M}{W_y} = -\frac{M \cdot R_a}{\frac{\pi}{4} (R_a^4 - R_i^4)} = -64,4 \text{ MPa}.$$

Gesamte Normalspannung im Punkt A durch Addition:  $\sigma = -66,7 \text{ MPa}$ .

Torsionsspannung:

$$\tau = \frac{M_T}{W_T} = \frac{M_T \cdot R_a}{\frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4)} = 3,8 \text{ MPa}$$

3. N-Hypothese:

$$\sigma_V = \frac{1}{2} \left( \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) = 0,2 \text{ MPa},$$

S-Hypothese:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 67,1 \text{ MPa},$$

GE-Hypothese:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 67,0 \text{ MPa}.$$