

Aus Kapitel 38

Aufgaben

38.1 • Zeichnen Sie das Blockschaltbild einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung. Erläutern Sie, welchem Zweck die Steuerungseinrichtung dient und welchem Zweck der Regler.

Resultat: Das Blockschaltbild ist in Abb. 38.8 zu sehen. Bei der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung überlagern sich die Ausgangssignale des Reglers und der Steuereinrichtung additiv zur Stellgröße u .

Regler: Der Regler erzeugt aus der Regelabweichung e (Führungsgröße w – Regelgröße y) einen Korrekturwert für die Stellgröße, mit dem Ziel, den Einfluss von Störungen z auf die Regelgröße y zu mindern.

Steuereinrichtung: Sie erzeugt aus der Führungsgröße w einen Stellgrößenanteil derart, dass y der Führungsgröße w (auch ohne Zutun des Reglers) möglichst gut folgt.

Ausführliche Lösung: Das Blockschaltbild ist in Abb. 38.8 zu sehen. Bei der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung überlagern sich die Ausgangssignale des Reglers und der Steuereinrichtung additiv zur Stellgröße u .

Regler: Der Regler erzeugt aus der Regelabweichung e (Führungsgröße w – Regelgröße y) einen Korrekturwert für die Stellgröße, mit dem Ziel, den Einfluss von Störungen z auf die Regelgröße y zu mindern.

Steuereinrichtung: Sie erzeugt aus der Führungsgröße w einen Stellgrößenanteil derart, dass y der Führungsgröße w (auch ohne Zutun des Reglers) möglichst gut folgt.

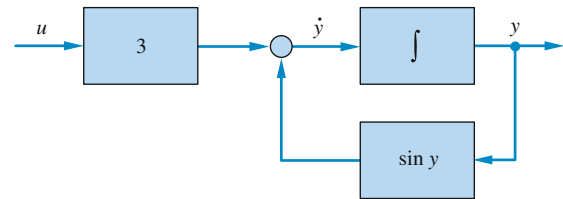
38.2 •• Die Differenzialgleichung

$$-\sin y(t) = -\dot{y}(t) + 3u_1(t)$$

soll als Blockschaltbild dargestellt werden. Bilden Sie dazu den Zusammenhang zwischen der Ausgangsgröße $y(t)$ und der Eingangsgröße $u(t)$ mithilfe der Elementarglieder nach Abb. 38.23 ab, allerdings ohne ein Differenzier-Glied zu verwenden.

Hinweis: Wenn eine Differenzialgleichung ein reales (technisches) System beschreibt, so sind die Variablen und Konstanten mit *physikalischen Einheiten* behaftet. Gelegentlich werden diese Einheiten weggelassen, um die Darstellung übersichtlich zu halten, oder wenn – wie hier und in der nächsten Aufgabe – reine Zahlenbeispiele ohne physikalischen Hintergrund betrachtet werden.

Resultat:



38.3 •• Ein Kennlinienglied sei beschrieben durch $y(t) = 3\sqrt{u(t)}$, und es sei bekannt, dass das Eingangssignal $u(t)$ von seinem Arbeitspunktwert $u^* = 4$ im Betrieb nur wenig abweicht. Approximieren Sie das Kennlinienglied durch ein P-Glied, indem Sie eine Linearisierung im Arbeitspunkt durchführen.

Hinweis: Sie können sich dabei am Kasten *Linearisierung im Arbeitspunkt* in Abschn. 1.4 orientieren.

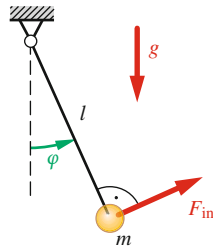
Resultat:

$$\Delta y \approx \frac{3}{4} \Delta u.$$

Ausführliche Lösung: Der Übergang zu den Abweichungen vom Arbeitspunkt liefert $\Delta y = y - y^* = 3\sqrt{u} - 3\sqrt{u^*}$, sodann wird $\sqrt{u(t)}$ in eine Taylorreihe um u^* entwickelt, und es resultiert mit $u^* = 4$ das P-Glied:

$$\Delta y = 3\sqrt{u^*} + \frac{3}{2\sqrt{u^*}} \Delta u + \text{Rest} - 3\sqrt{u^*} \approx \frac{3}{4} \Delta u.$$

38.4 •• Stellen Sie die Differenzialgleichung für das mathematische Pendel (d. h. mit masselos angenommenem Stab) in der Abbildung auf. Eingangsgröße sei die Kraft F_{in} , Ausgang der Winkel φ . $M_R = -d\dot{\varphi}$ ist das viskose Reibmoment. Bestimmen Sie zunächst alle angreifenden Drehmomente. Linearisieren Sie anschließend das Modell um die Ruhelage $\varphi = 0$, indem sie die Kleinwinkelnäherung auf die trigonometrischen Ausdrücke anwenden. Geben Sie schließlich die Kenngrößen des daraus resultierenden PT2-Gliedes an.



Mathematisches Pendel

Hinweis: Drehimpulssatz: $J\ddot{\varphi} = \sum M_i$.

Resultat: Zur Bewegungsdifferentialgleichung:

Trägheitsmoment des Pendels: $J = ml^2$,

Tangentiale Kraft F_t an der Masse: $F_t = mg \sin \varphi$,

Rückstellmoment: $M_g = -mg \sin(\varphi)l$,

Dämpfungmoment: $M_R = -d_R \dot{\varphi}$,

Stellmoment: $M_{in} = lF_{in}$.

Daraus folgt mithilfe des Drehimpulssatzes:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi - d_R \dot{\varphi} + lF_{in}.$$

Linearisierung:

$$ml^2 \Delta \ddot{\varphi} + mgl \Delta \varphi + d_R \Delta \dot{\varphi} = l \Delta F_{in}.$$

Kenngrößen des PT2-Gliedes: Durch Vergleich mit dem allgemeinen PT2-Glied liest man ab:

$$T^2 = \frac{l}{g}, \quad 2dT = \frac{d_R}{mgl}, \quad \text{also} \\ d = \frac{d_R}{2ml\sqrt{gl}} \quad \text{und} \quad K = \frac{1}{mg}.$$

Ausführliche Lösung: Zur Bewegungsdifferentialgleichung:

Trägheitsmoment des Pendels: $J = ml^2$

Tangentiale Kraft F_t an der Masse: $F_t = mg \sin \varphi$

Rückstellmoment: $M_g = -mg \sin(\varphi)l$

Dämpfungmoment: $M_R = -d_R \dot{\varphi}$

Stellmoment: $M_{in} = lF_{in}$

Daraus folgt mit Hilfe des Drehimpulssatzes:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi - d_R \dot{\varphi} + lF_{in}$$

Linearisierung: In der Ruhelage gilt $\ddot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(t) = 0$, folglich $0 = -mgl \sin(\varphi^*) + lF_{in}^*$. Damit $\varphi^* = 0$ wie gefordert eine Ruhelage ist, muss die stationäre Kraft $F_{in}^* = 0$ sein. Nun gehen wir zu den Abweichungen vom Arbeitspunkt über, $\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi^*$, $\Delta F_{in}(t) = F_{in}(t) - F_{in}^*$ und

nähern den trigonometrischen Ausdruck $\sin \varphi$ für kleine Winkel durch $\sin \varphi \approx \varphi$ an. Die Bewegungsgleichung geht dadurch über in:

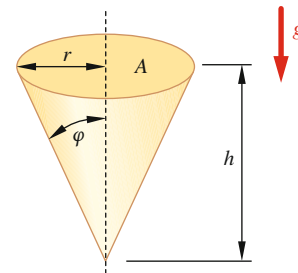
$$ml^2 \Delta \ddot{\varphi} + mgl \Delta \varphi + d_R \Delta \dot{\varphi} = l \Delta F_{in}$$

(Das gleiche Ergebnis erhält man durch ein Vorgehen wie im Kasten *Linearisierung im Arbeitspunkt*.)

Kenngrößen des PT2-Gliedes: Durch Vergleich mit dem allgemeinen PT2-Glied liest man ab:

$$T^2 = \frac{l}{g}, \quad 2dT = \frac{d_R}{mgl}, \quad \text{also} \quad d = \frac{d_R}{2ml\sqrt{gl}} \quad \text{und} \quad K = \frac{1}{mg}$$

38.5 ••• Gegeben sei ein kegelförmiger Tank, der von oben mit Flüssigkeit befüllt werden kann und aus dem die Flüssigkeit unten (aus der Kegelspitze) durch eine kleine Öffnung mit Querschnittsfläche a aufgrund der Schwerkraft abfließt. Der Flüssigkeitsvolumenzufluss q_e fungiere als Eingangsgröße und der Volumenabfluss q_a als Ausgangsgröße. Die Abbildung zeigt den Flüssigkeitsanteil im kegelförmigen Gefäß. Dabei sind $h(t)$ die aktuelle Füllhöhe und A die zugehörige kreisförmige Flüssigkeitsoberfläche mit Radius r . Ermitteln Sie für das System ein mathematisches Modell in Zustandsdarstellung. Zeichnen Sie dann das Blockschaltbild zu dem ermittelten mathematischen Modell.



Flüssigkeit im kegelförmigen Tank

Hinweis: Für den Volumenabfluss kann angenommen werden $q_a(t) = a\sqrt{2gh(t)}$,

mit a : Abflussquerschnittsfläche

und g : Erdbeschleunigung.

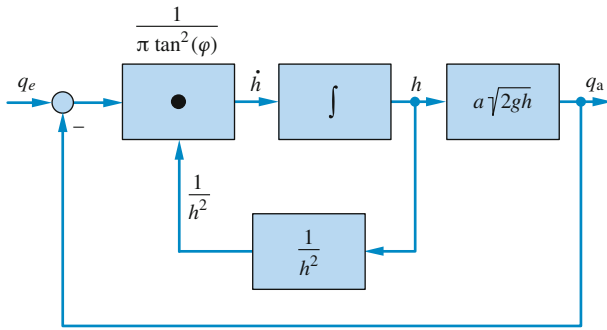
Für das Kegelvolumen gilt allgemein $V = \frac{1}{3}Ah$.

Tipp: Drücken Sie V allein durch h und φ aus und betrachten Sie \dot{V} .

Resultat:

$$\dot{h} = \frac{1}{\pi \tan^2(\varphi) h^2} (q_e - a\sqrt{2gh}) \quad \text{Zustands-DGL}$$

$$q_a = a\sqrt{2gh} \quad \text{Ausgangsgleichung}$$



Blockschaltbild des Tanksystems

Ausführliche Lösung: Das Kegelvolumen ist

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

$$\downarrow A = r^2\pi = (h \tan \varphi)^2\pi = h^2 \tan^2(\varphi)\pi$$

$$V = \frac{\pi}{3} \tan^2(\varphi)h^3$$

folglich

$$\left. \begin{aligned} \dot{V} &= \pi \tan^2(\varphi)h^2\dot{h} \\ \dot{V} &= q_e - q_a \end{aligned} \right\} \pi \tan^2(\varphi)h^2\dot{h} = q_e - q_a$$

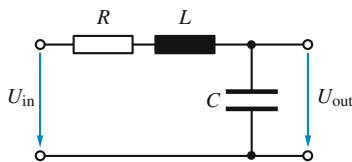
Daraus folgt:

$$\dot{h} = \frac{1}{\pi \tan^2(\varphi)h^2}(q_e - a\sqrt{2gh}) \quad \text{Zustands-DGL}$$

$$q_a = a\sqrt{2gh} \quad \text{Ausgangsgleichung}$$

Das Blockschaltbild kann unter Verwendung eines Kennliniengliedes $1/h^2$ und eines Multipliziergliedes gezeichnet werden (Alternativ kann auch ein Divisionsglied verwendet werden).

38.6 • Stellen Sie die Differenzialgleichung für das RLC-Glied in der Abbildung auf.



RLC-Glied: Filter 2. Ordnung

Resultat: $LC\ddot{U}_{\text{out}} + RC\dot{U}_{\text{out}} + U_{\text{out}} = U_{\text{in}}$.

Ausführliche Lösung: Für die Spannungen an den drei Bauelementen gilt $U_R = RI$, $U_L = L\dot{I}$, $\dot{U}_C = \frac{1}{C}I$ bzw. $I = C\dot{U}_C$. Die Kirchhoffsche Maschengleichung lautet dann

$$U_{\text{in}} = U_R + U_L + U_C = RI + L\dot{I} + U_C$$

$$= RC\dot{U}_C + LC\ddot{U}_C + U_C$$

Wegen $U_C = U_{\text{out}}$ resultiert eine Differenzialgleichung vom PT2-Typ,

$$LC\ddot{U}_{\text{out}} + RC\dot{U}_{\text{out}} + U_{\text{out}} = U_{\text{in}}.$$

38.7 •• Leiten Sie aus der Differenzialgleichung des RLC-Glieds der Aufgabe 38.6 erstens eine Zustandsdarstellung in Regelungsnormform ab sowie zweitens eine Zustandsdarstellung, bei der Sie als Zustandsvariablen U_C und I wählen.

Resultat: Zustandsdarstellung in Regelungsnormform nach (38.44), (38.45):

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}U_{\text{in}},$$

$$U_{\text{out}} = x_1$$

bzw. in der Darstellung nach (38.66), (38.67):

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + U_{\text{in}},$$

$$U_{\text{out}} = \frac{1}{LC}x_1.$$

Beide Darstellungen sind äquivalent (Der Faktor $1/LC$ wird beim Übergang von der ersten zur zweiten Variante vom Eingang an den Ausgang „verschoben“). Die Zustandsdarstellung mit den Zustandsvariablen U_C und I lautet:

$$\dot{U}_C = \frac{1}{C}I,$$

$$\dot{I} = -\frac{1}{L}U_C - \frac{R}{L}I + \frac{1}{L}U_{\text{in}},$$

$$U_{\text{out}} = U_C.$$

Die drei Zustandsdarstellungen unterscheiden sich in der physikalischen Bedeutung der Zustandsvariablen, sie beschreiben aber dasselbe Ein-/Ausgangsverhalten des betrachteten Übertragungsgliedes.

Ausführliche Lösung: Die Regelungsnormform erhält man, indem man die in der vorigen Aufgabe erhaltene Differenzialgleichung durch LC dividiert und dann (38.66), (38.67) anschreibt:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + U_{\text{in}}$$

$$U_{\text{out}} = \frac{1}{LC}x_1$$

Um eine Zustandsdarstellung mit den Zustandsvariablen U_C und I zu erhalten, verwenden wir die Kondensatorgleichung $\dot{U}_C = \frac{1}{C}I$ sowie die Kirchhoff'sche Gleichung $U_{\text{in}} = U_R + U_L + U_C = RI + L\dot{I} + U_C$, die wir nach \dot{I} auflösen:

$$\begin{aligned}\dot{U}_C &= \frac{1}{C}I \\ \dot{I} &= -\frac{1}{L}U_C - \frac{R}{L}I + \frac{1}{L}U_{\text{in}} \\ U_{\text{out}} &= U_C.\end{aligned}$$

38.8 •• Geben Sie die Zustandsdarstellung des elastischen Lagers nach Abb. 38.30 mit dem Eingang F_P und der von der Feder und dem Dämpfer in der Summe an den Boden übertragenen Kraft F_B als Ausgang an. Wählen Sie als Zustandsvariablen die Auslenkung x und die zugehörige Geschwindigkeit \dot{x} .

Resultat:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{C}{m}x_1 - \frac{D}{m}x_2 + \frac{1}{m}F_P, \\ F_B &= Cx_1 + Dx_2.\end{aligned}$$

Ausführliche Lösung: Die Zustandsvariablen lauten $x_1 = x$ und $x_2 = \dot{x}$; zwischen ihnen besteht also die Beziehung $\dot{x}_1 = x_2$, die wir als erste Zustandsdifferenzialgleichung nutzen. Die zweite erhalten wir durch Auflösen von (38.34) nach $\ddot{x} = \dot{x}_2$,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{C}{m}x_1 - \frac{D}{m}x_2 + \frac{1}{m}F_m.\end{aligned}$$

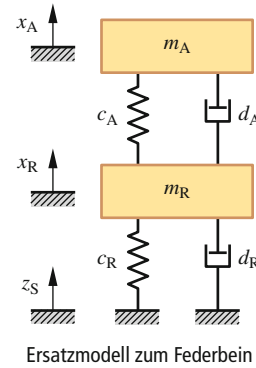
Die Ausgangsgröße F_B setzt sich aus Cx und $D\dot{x}$ zusammen, also

$$F_B = Cx_1 + Dx_2.$$

38.9 ••• Um das Federungsverhaltens eines Pkw zu untersuchen, soll ein einzelnes Federbein (Abbildung) im Zusammenwirken mit einem Viertel der Fahrzeugmasse als Zustandsraummodell dargestellt werden.



KFZ-Federbein



In der zweiten Abbildung sind die wesentlichen Elemente schematisch dargestellt: Das (unebene) Straßenprofil $z_S(t)$ wirkt über die Reifensteifigkeit c_R und die Reifendämpfung d_R beschleunigend auf das Rad der Masse m_R . Dessen Bewegungen ihrerseits wirken über c_A und d_A beschleunigend auf die (Viertel-)Aufbaumasse m_A . Geben Sie ein Zustandsraummodell an, wobei Sie als Zustandsvariablen wählen

$x_1 = x_A - x_R,$	Einfederung,
$x_2 = \dot{x}_A,$	Aufbaugeschwindigkeit,
$x_3 = x_R - z_S,$	Reifenauslenkung,
$x_4 = \dot{x}_R,$	Radgeschwindigkeit.

Da bei diesem System das Verhalten mehrerer Variablen von Interesse ist, wählen Sie als Ausgangsgrößen:

$y_1 = \ddot{x}_A,$	Aufbaubeschleunigung,
$y_2 = F_{\text{dyn}},$	dynamische Radlast,
$y_3 = x_A - x_R,$	Einfederung.

Das Modell erhält also eine vektorielle Ausgangsgröße y und folglich eine Ausgangsgleichung der Gestalt $y = Cx + du$. Die dynamische Radlast F_{dyn} bezeichnet dabei die Kraft, die von der Straße auf das Rad wirkt, also die Summe der Feder- und Dämpferkräfte des Reifens.

Hinweis: Betrachten Sie nur Abweichungen aus der (nicht weiter interessierenden) Ruhelage; die Federn seien also entspannt für $x_A - x_R = 0$ bzw. $x_R - z_S = 0$. Mit der vorgeschlagenen Wahl der Zustandsgrößen ergibt sich als einzige Eingangsgröße des Systems die Störgröße Straßenprofilgeschwindigkeit $\dot{z}_S = z$, und die Zustandsdifferenzialgleichung hat die Gestalt $\dot{x} = Ax + ez$.

Resultat: Mit den Bilanzgleichungen

$$\begin{aligned}m_A \ddot{x}_A &= -c_A(x_A - x_R) - d_A(\dot{x}_A - \dot{x}_R), \\ m_R \ddot{x}_R &= c_A(x_A - x_R) + d_A(\dot{x}_A - \dot{x}_R) \\ &\quad - c_R(x_R - z_S) - d_R(\dot{x}_R - \dot{z}_S)\end{aligned}$$

und der Definition der vier Zustandsvariablen folgt sofort:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_A - \dot{x}_R \\ \ddot{x}_A \\ \dot{x}_R - \dot{z}_S \\ \ddot{x}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-c_A}{m_A} & \frac{-d_A}{m_A} & 0 & \frac{d_A}{m_A} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_A}{m_R} & \frac{d_A}{m_R} & \frac{-c_R}{m_R} & \frac{-d_A - d_R}{m_R} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_A - x_R \\ \dot{x}_A \\ x_R - z_S \\ \dot{x}_R \end{pmatrix}}_x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{d_R}{m_R} \end{pmatrix} \dot{z}_S,$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-c_A}{m_A} & \frac{-d_A}{m_A} & 0 & \frac{d_A}{m_A} \\ 0 & 0 & -c_R & -d_R \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ d_R \\ 0 \end{pmatrix} \dot{z}_S.$$

Ausführliche Lösung: Zunächst stellen wir die Kräftebilanzgleichungen für beide Massen auf,

$$\begin{aligned} m_A \ddot{x}_A &= -c_A(x_A - x_R) - d_A(\dot{x}_A - \dot{x}_R), \\ m_R \ddot{x}_R &= c_A(x_A - x_R) + d_A(\dot{x}_A - \dot{x}_R) \\ &\quad - c_R(x_R - z_S) - d_R(\dot{x}_R - \dot{z}_S). \end{aligned}$$

Nun bilden wir die Zeitableitungen der vier Zustandsvariablen und erhalten unter Verwendung der beiden Bilanzgleichungen das Zustandsraummodell

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_A - \dot{x}_R \\ \ddot{x}_A \\ \dot{x}_R - \dot{z}_S \\ \ddot{x}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-c_A}{m_A} & \frac{-d_A}{m_A} & 0 & \frac{d_A}{m_A} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_A}{m_R} & \frac{d_A}{m_R} & \frac{-c_R}{m_R} & \frac{-d_A - d_R}{m_R} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_A - x_R \\ \dot{x}_A \\ x_R - z_S \\ \dot{x}_R \end{pmatrix}}_x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{d_R}{m_R} \end{pmatrix} \dot{z}_S,$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-c_A}{m_A} & \frac{-d_A}{m_A} & 0 & \frac{d_A}{m_A} \\ 0 & 0 & -c_R & -d_R \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ d_R \\ 0 \end{pmatrix} \dot{z}_S.$$