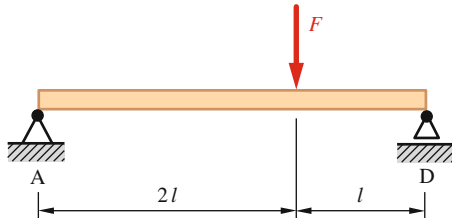


Aus Kapitel 6

Aufgaben

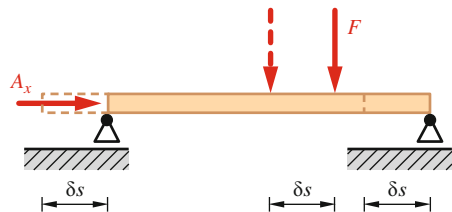
6.1 • Berechnen Sie mithilfe des Arbeitssatzes die Lagerreaktionen des abgebildeten Trägers.



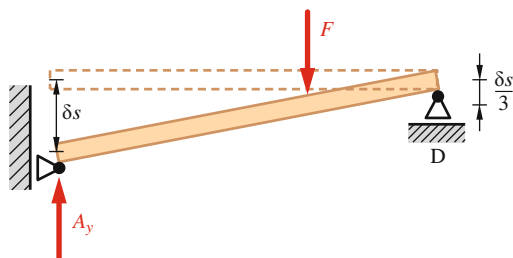
Resultat:

$$A_x = 0, A_y = \frac{F}{3}, B_y = \frac{2}{3}F.$$

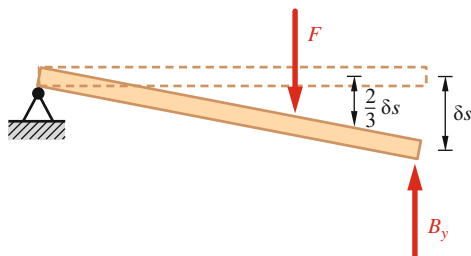
Ausführliche Lösung: Berechnung von A_x :



$$\delta W = A_x \delta s = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0.$$



$$\delta W = -A_y \delta s + F \frac{\delta s}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = \frac{F}{3}.$$



$$\delta W = F \frac{2}{3} \delta s - B_y \delta s = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = \frac{2}{3}F.$$

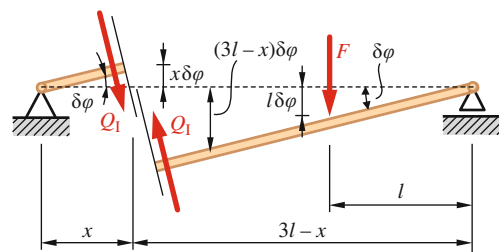
6.2 •• Berechnen Sie mithilfe des Arbeitssatzes die Verläufe von Querkraft und Biegemoment von Aufgabe 6.1.

Resultat:

$$Q_I = \frac{F}{3}, M_I = \frac{1}{3}Fx.$$

$$Q_{II} = -\frac{2}{3}F, M_{II} = \frac{2}{3}F(3l - x).$$

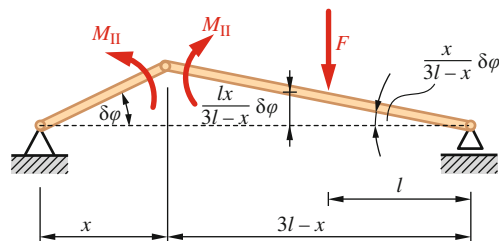
Ausführliche Lösung: Berechnung von Q_I :



$$\delta W = -Q_I x \delta \varphi - Q_I (3l - x) \delta \varphi + F l \delta \varphi = 0$$

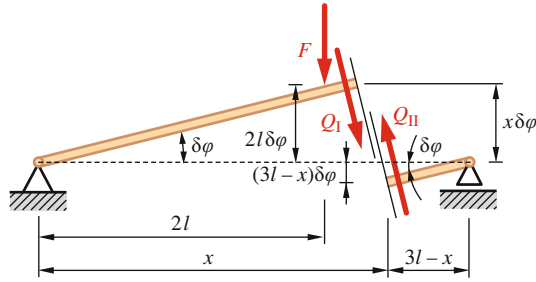
$$\Rightarrow \quad Q_I = \frac{F}{3}.$$

Berechnung von M_I :



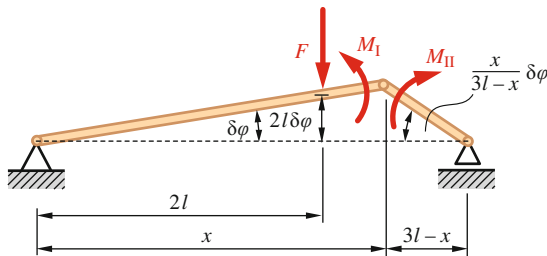
$$\delta W = M_I \delta \varphi + M_I \frac{x}{3l - x} \delta \varphi - F \frac{l x}{3l - x} \delta \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_I = \frac{1}{3}Fx.$$

Berechnung von Q_{II} :

$$\delta W = -F 2l \delta\varphi - Q_{II} x \delta\varphi - Q_{II} (3l - x) \delta\varphi = 0$$

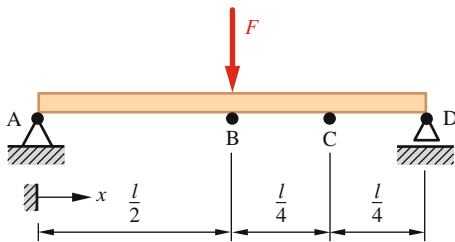
$$\Rightarrow Q_{II} = -\frac{2}{3}F.$$

Berechnung von M_{II} :

$$\delta W = M_{II} \delta\varphi - 2Fl \delta\varphi + M_{II} \frac{x}{3l - x} \delta\varphi = 0$$

$$\Rightarrow M_{II} = \frac{2}{3}F(3l - x).$$

6.3 ••• Für einen 3-Punkt-Biegeträger mit gegebenen Werten für E , I_y und F sind die Durchbiegungen in den Punkten B und C zu berechnen. Der Einfluss der Querkraft kann vernachlässigt werden.

**Resultat:**

$$w_B = \frac{F l^3}{48 E I_y}, \quad w_C = \frac{11 F l^3}{768 E I_y}.$$

Ausführliche Lösung: Zunächst zur Balkenmitte (Punkt B). Hier ist

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_0^l \frac{M}{E I_y} \frac{\partial M}{\partial F} dx$$

$$= \frac{1}{E I_y} \left\{ \int_0^{l/2} \left[\frac{1}{2} F x \cdot \frac{1}{2} x \right] dx + \int_{l/2}^l \left[\frac{1}{2} F (l - x) \cdot \frac{1}{2} (l - x) \right] dx \right\}$$

$$= \frac{1}{E I_y} \left(\left[\frac{1}{12} F x^3 \right]_0^{l/2} - \left[\frac{1}{12} F (l - x)^3 \right]_{l/2}^l \right)$$

$$= \frac{F l^3}{48 E I_y}.$$

Am Punkt C greift keine Kraft an, und wir müssen hier eine Hilfskraft F_H ansetzen. Mit dieser beträgt der Verlauf des Biegemoments im Bereich $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

$$M_I(x) = \left(\frac{F}{2} + \frac{F_H}{4} \right) x,$$

im Bereich $\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}l$

$$M_{II}(x) = \left(\frac{F}{2} + \frac{F_H}{4} \right) x - F \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

und im Bereich $\frac{3}{4}l \leq x \leq l$

$$M_{III}(x) = \left(\frac{F}{2} + \frac{3}{4}F_H \right) (l - x).$$

Die Durchbiegung im Punkt C beträgt

$$w_C = \frac{\partial W}{\partial F_H} = \int_0^l \frac{M}{E I_y} \frac{\partial M}{\partial F_H} dx$$

$$= \frac{1}{E I_y} \left\{ \int_0^{l/2} \left(\frac{F}{2} + \frac{F_H}{4} \right) x \cdot \frac{x}{4} dx \right.$$

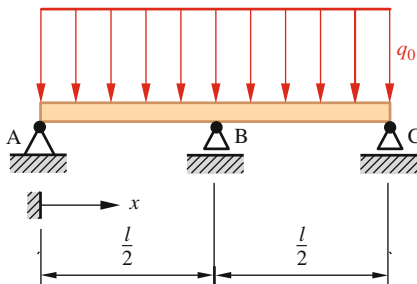
$$+ \int_{l/2}^{3l/4} \left[\left(\frac{F}{2} + \frac{F_H}{4} \right) x - F \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \cdot \frac{x}{4} dx$$

$$\left. + \int_{3l/4}^l \left[\left(\frac{F}{2} + \frac{3}{4}F_H \right) (l - x) \right] \cdot \frac{3}{4} (l - x) dx \right\}.$$

Wir setzen nun $F_H = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} w_C &= \frac{1}{EI_y} \left\{ \int_0^{l/2} \frac{1}{8} + Fx^2 dx + \int_{l/2}^{3l/4} \left[\frac{F}{2}x - F \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \frac{x}{4} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{3l/4}^l \frac{3}{8} F (l-x)^2 dx \right\} \\ &= \frac{1}{EI_y} \left\{ \left[\frac{1}{24} Fx^3 \right]_0^{l/2} + \left[-\frac{F}{24}x^3 + \frac{Fl}{16}x^2 \right]_{l/2}^{3l/4} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{8} F (l-x)^3 \right]_{3l/4}^l \right\} \\ &= \frac{1}{EI_y} \left\{ \frac{1}{24} F \left(\frac{l}{2} \right)^3 - \frac{F}{24} \cdot \frac{27}{64} l^3 + \frac{9Fl^3}{16 \cdot 16} + \frac{Fl^3}{24 \cdot 8} \right. \\ &\quad \left. - \frac{Fl^3}{64} + \frac{Fl^3}{8 \cdot 64} \right\} \\ &= \frac{11}{768} \frac{Fl^3}{EI_y}. \end{aligned}$$

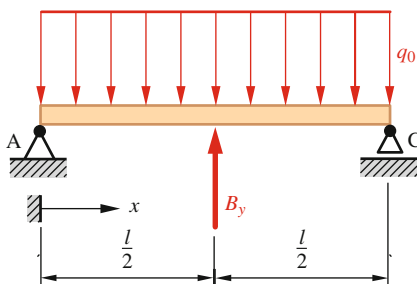
6.4 ••• Ein Biegeträger der Länge l ist auf drei Lagern abgestützt und trägt eine konstante Streckenlast q_0 . Berechnen Sie die Lagerreaktionen.



Resultat:

$$A_y = C_y = \frac{3}{16} q_0 l, \quad B_y = \frac{5}{8} q_0 l.$$

Ausführliche Lösung: Schritt 1: Wir wählen ein Lager aus, hier das Lager B, und ersetzen es durch die äußere Kraft B_y . Damit erhalten wir das folgende statische System:



Schritt 2: Die verbleibenden Lagerreaktionen lauten in Abhängigkeit von der statischen Unbestimmten B_y

$$A_y = C_y = \frac{1}{2} (q_0 l - B_y).$$

Schritt 3: Der Biegemomentenverlauf lautet im Bereich $0 \leq x \leq l/2$

$$M_I = \frac{1}{2} (q_0 l - B_y) x - \frac{1}{2} q_0 x^2$$

und im Bereich $l/2 \leq x \leq l$

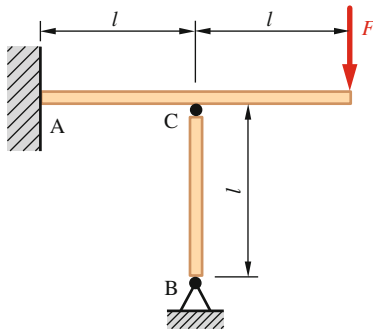
$$M_{II} = \frac{1}{2} (q_0 l - B_y) (l-x) - \frac{1}{2} q_0 (l-x)^2.$$

Schritt 4, Satz von Menabrea:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial B_y} &= \int_{x=0}^{l/2} \frac{M_I}{EI_y} \frac{\partial M_I}{\partial B_y} dx + \int_{x=l/2}^l \frac{M_{II}}{EI_y} \frac{\partial M_{II}}{\partial B_y} dx \\ &= \frac{1}{EI_y} \left\{ \int_{x=0}^{l/2} - \left[\frac{1}{2} (q_0 l - B_y) x - \frac{1}{2} q_0 x^2 \right] \frac{x}{2} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{x=l/2}^l - \left[\frac{1}{2} (q_0 l - B_y) (l-x) - \frac{1}{2} q_0 (l-x)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{l-x}{2} dx \right\} \\ &= \frac{1}{EI_y} \left\{ - \left[\frac{1}{12} (q_0 l - B_y) x^3 - \frac{1}{16} q_0 x^4 \right]_{x=0}^{l/2} \right. \\ &\quad \left. - \left[-\frac{1}{12} (q_0 l - B_y) (l-x)^3 + \frac{1}{16} q_0 (l-x)^4 \right]_{x=l/2}^l \right\} \\ &= \frac{1}{EI_y} \left\{ -\frac{1}{96} (q_0 l - B_y) l^3 + \frac{1}{256} q_0 l^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{96} (q_0 l - B_y) l^3 + \frac{1}{256} q_0 l^4 \right\} = 0 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{3} (q_0 l - B_y) + \frac{1}{8} q_0 l = 0 \Rightarrow B_y = \frac{5}{8} q_0 l. \end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis für B_y folgen dann mit den Gleichgewichtsbedingungen der ebenen Statik $A_y = C_y = \frac{3}{16} q_0 l$.

6.5 ••• Der skizzierte Träger ist im Punkt A fest eingespannt und im Punkt B von der Pendelstütze B-C abgestützt. An seinem freien Ende greift die Vertikalkraft F an. Die Werte von Biegesteifigkeit EI_y im horizontalen Trägerteil und Dehnsteifigkeit EA in der Pendelstütze seien gegeben. Berechnen Sie mit dem Satz von Menabrea die Kraft in der Pendelstütze.

**Resultat:**

$$\frac{\frac{5}{6} \frac{l^2}{I_y}}{\frac{l^2}{3I_y} + \frac{1}{A}} \cdot F.$$

Ausführliche Lösung: Zunächst zur Berechnung der relevanten Schnittgrößen.

Biegemoment im horizontalen Trägerteil:

Im Bereich $0 \leq x \leq l$ ist

$$M_I = C(l - x) - F(2l - x).$$

Im Bereich $l \leq x \leq 2l$ ist

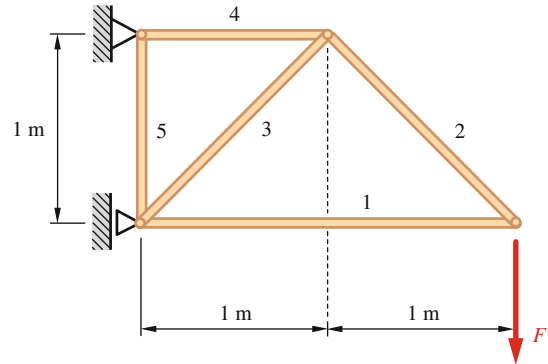
$$M_{II} = -F(2l - x).$$

Normalkraft in der Pendelstütze: $N = -C$

Satz von Menabrea:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial C} &= \int_{x=0}^l \frac{M_I}{EI_y} \frac{\partial M_I}{\partial C} dx + \int_{x=l}^{2l} \frac{M_{II}}{EI_y} \frac{\partial M_{II}}{\partial C} dx + \int_{x=0}^l \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial C} dx \\ &= \frac{1}{EI_y} \int_{x=0}^l [C(l - x) - F(2l - x)(l - x)] dx \\ &\quad + \frac{1}{EA} \int_{x=0}^l C dx \\ &= \frac{1}{EI_y} \int_{x=0}^l [C(x^2 - 2lx + l^2) - F(x^2 - 3lx + 2l^2)] dx + \frac{Cl}{EA} \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(C \cdot \frac{1}{3} l^3 - F \cdot \frac{5}{6} l^3 \right) + \frac{Cl}{EA} = 0 \\ \Rightarrow C &= \frac{\frac{5}{6} \frac{l^2}{I_y}}{\frac{l^2}{3I_y} + \frac{1}{A}}. \end{aligned}$$

6.6 • Ein Kran soll als ebenes Fachwerk mit Vierkantrohren des Querschnitts $50 \text{ mm} \times 50 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$ (Höhe \times Breite \times Wandstärke) aus Stahl ($E = 205.000 \text{ MPa}$, $R_e = 300 \text{ MPa}$) gebaut werden. Zu berechnen ist diejenige äußere Kraft F , bei der eine 4-fache Sicherheit gegen Knicken von Stab 1 gewährleistet ist.



- Bestimmen Sie die Stabkraft in Stab 1.
- Berechnen Sie die für den Kran maximal zulässige Kraft F_{zul} , bei der in Stab 1 gerade 4-fache Sicherheit gegen Knicken vorliegt.

Resultat:

$$S_1 = -F, F_{zul} = 33 \text{ kN}.$$

Ausführliche Lösung: Per Ritterschnitt durch die Stäbe 1, 3 und 4 ermitteln wir als Stabkräfte $S_1 = -F$, $S_3 = -\sqrt{3}F$ und $S_4 = 2F$.Zur Knickberechnung für Stab 1: Eulerfall 2 liegt vor, d. h., $l_K = 2000 \text{ mm}$.

$$A = (50 \text{ mm})^2 - (42 \text{ mm})^2 = 736 \text{ mm}^2.$$

$$I_y = \frac{1}{12} (50 \text{ mm})^4 - (42 \text{ mm})^4 = 262.000 \text{ mm}^4.$$

$$\lambda = l_K \sqrt{\frac{A}{I_y}} = 2000 \text{ mm} \sqrt{\frac{(736 \text{ mm})^2}{262.000 \text{ mm}^4}} = 106.$$

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{0,8 R_e}} = \pi \sqrt{\frac{205.000}{0,8 \cdot 300}} = 92 < \lambda.$$

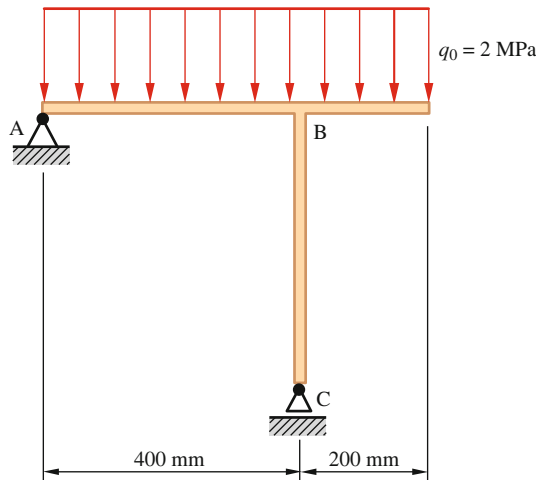
Also Knicken vor plastischer Verformung.

$$F_K = \frac{\pi^2 E I_y}{l_K^2} = 133 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow F_{zul} = \frac{133 \text{ kN}}{4} = 33 \text{ kN}.$$

6.7 • Die abgebildete, in den Punkten A und C gelagerte Struktur wird durch die Streckenlast $q_0 = 2 \text{ N/mm}$ belastet. Zu untersuchen ist die Knickgefährdung des Stützbalkens zwischen den Punkten B und

C. Der Stützbalken habe den quadratischen Querschnitt $15 \text{ mm} \times 15 \text{ mm}$. An Materialparametern seien gegeben: $E = 205.000 \text{ MPa}$, $R_e = 355 \text{ MPa}$



1. Berechnen Sie die Lagerreaktionen. Wie groß ist die Druckkraft im Stützbalken B-C?
2. Berechnen Sie die vorliegende Sicherheit S gegen Knicken des Stützbalkens.

Resultat:

1. $A_y = 300 \text{ N}$, $C_y = 900 \text{ N}$. Der Stützbalken wird mit der Druckkraft 900 N beansprucht.
2. $S = 12$.

Ausführliche Lösung: Knickberechnung: Eulerfall 1 liegt vor, d. h. $l_K = 2l = 900 \text{ mm}$.

$$\lambda = l_K \sqrt{\frac{A}{I_y}} = 900 \text{ mm} \sqrt{\frac{(15 \text{ mm})^2}{\frac{(15 \text{ mm})^4}{12}}} = 208$$

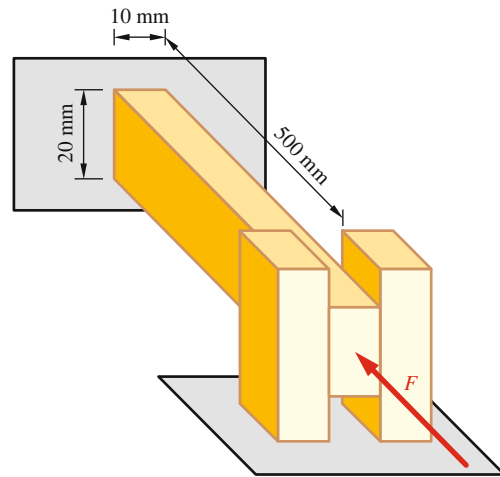
$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{0,8 R_e}} = \pi \sqrt{\frac{205.000}{0,8 \cdot 355}} = 84 < \lambda.$$

Also Knicken vor plastischer Verformung.

$$F_K = \frac{\pi^2 E I_y}{l_K^2} = \frac{\pi^2 205.000 \text{ N/mm}^2 \frac{(15 \text{ mm})^4}{12}}{(900 \text{ mm})^2} = 10,5 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow S = \frac{10,5}{0,9} = 12.$$

6.8 •• Ein rechteckiger Balken (Länge 500 mm , Querschnitt $10 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$) aus Stahl ($E = 205.000 \text{ MPa}$, $R_e = 355 \text{ MPa}$) ist an einem Ende fest eingespannt. Am anderen Ende steckt er in einer eng anliegenden Führung. Diese ermöglicht es dem Balken, in vertikale Richtung frei auszuweichen, während ein Ausweichen in horizontale Richtung sowie die entsprechende Winkelbeweglichkeit unterbunden werden. Der Balken wird durch eine Druckkraft F belastet.



1. Welche Eulerfälle liegen vor?
2. Bei welcher Kraft F knickt der Balken aus?

Resultat:

1. Eulerfall 1 für vertikales Ausknicken, Eulerfall 4 für horizontales Ausknicken.
2. $13,5 \text{ kN}$.

Ausführliche Lösung: Vertikales Ausknicken: Eulerfall 1: $l_K = 2l = 1000 \text{ mm}$.

$$\lambda = l_K \sqrt{\frac{A}{I_y}} = 1000 \text{ mm} \sqrt{\frac{(200 \text{ mm})^2}{\frac{10 \text{ mm} \cdot (20 \text{ mm})^3}{12}}} = 173.$$

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{0,8 R_e}} = \pi \sqrt{\frac{205.000}{0,8 \cdot 355}} = 84 < \lambda.$$

Also Knicken vor plastischer Verformung.

$$F_K = \frac{\pi^2 E I_y}{l_K^2} = \frac{\pi^2 205.000 \text{ N/mm}^2 \frac{10 \text{ mm} \cdot (20 \text{ mm})^3}{12}}{(1000 \text{ mm})^2} = 13,5 \text{ kN}.$$

Horizontales Ausknicken: Eulerfall 4: $l_K = \frac{l}{2} = 250 \text{ mm}$.

$$\lambda = l_K \sqrt{\frac{A}{I_y}} = 250 \text{ mm} \sqrt{\frac{(200 \text{ mm})^2}{\frac{20 \text{ mm} \cdot (10 \text{ mm})^3}{12}}} = 87 > \lambda_0.$$

Also Knicken vor plastischer Verformung.

$$F_K = \frac{\pi^2 E I_y}{l_K^2} = \frac{\pi^2 205.000 \text{ N/mm}^2 \frac{20 \text{ mm} \cdot (10 \text{ mm})^3}{12}}{(250 \text{ mm})^2} = 54 \text{ kN}.$$

Der Pfosten knickt bei der kleineren der zwei errechneten Knicklasten, 54 kN .