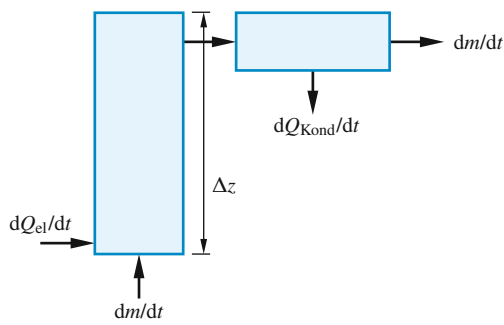


Aus Kapitel 18

Aufgaben

18.1 • Eine Kaffeemaschine nimmt im stationären Betrieb eine elektrische Heizleistung von $\dot{Q}_{el} = 2 \text{ kW}$ auf. Diese Leistung wird dazu verwendet, kontinuierlich einen Wassermassenstrom \dot{m} zunächst von der Temperatur $T_1 = 283,15 \text{ K}$ auf seine Siedetemperatur bei Umgebungsdruck, nämlich $T_2 = 373,15 \text{ K}$, zu erhitzen und ihn dann zu verdampfen, sodass gerade gesättigter Dampf bei $T_2 = 373,15 \text{ K}$ entsteht. Dieser Dampf steigt dann von der Eintrittshöhe $z_{ein} = 0$ auf die Höhe $z_{aus} = 0,15 \text{ m}$ an. Bevor er die Kaffeemaschine in der Höhe z_{aus} verlässt, kondensiert der Dampf und gibt seine Kondensationswärme \dot{Q}_{Kond} an die Umgebung ab, sodass am Austritt der Kaffeemaschine Wasser im siedenden Zustand mit $T_2 = 373,15 \text{ K}$ vorliegt. Ein- und Austrittsgeschwindigkeit des Wassers sind zu vernachlässigen.



Schematische Darstellung einer Kaffeemaschine

Die spezifische isobare Wärmekapazität c_p des flüssigen Wassers sei über den gesamten Temperaturbereich konstant.

Stoffdaten des Wassers:

- Spezifische isobare Wärmekapazität: $c_p = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$.
- Spezifische Verdampfungsenthalpie bei $373,15 \text{ K}$ und 1013 mbar : $r = 2250 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.
- Erdbeschleunigung: $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

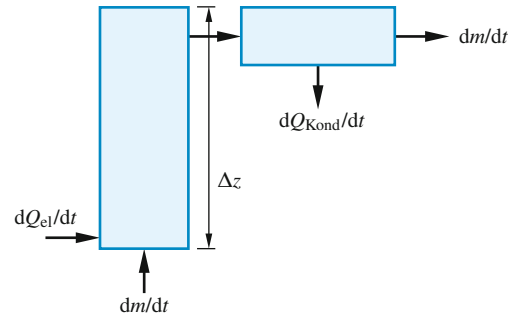
- a) Skizzieren Sie die Anordnung schematisch. Zeichnen Sie auch die ausgetauschten Wärmen in Ihre Skizze mit ein.
- b) Stellen Sie den ersten Hauptsatz für das vorliegende Problem auf.
- c) Welchen Massenstrom \dot{m} fördert die Kaffeemaschine.
- d) Welcher Teil der zugeführten elektrischen Leistung wird zur Erwärmung des Kaffeewassers verwendet?

Resultat:

- b) $0 = \dot{m}[(h_{ein} - h_{aus}) + g(z_{ein} - z_{aus})] + \dot{Q}_{el} - \dot{Q}_{Kond}$.
- c) $\dot{m} = 0,761 \frac{\text{g}}{\text{s}}$.
- d) $\eta = 0,1438 = 14,38 \%$.

Ausführliche Lösung:

a) Problemskizze:



b) Das vorliegende Problem kann mithilfe des ersten Hauptsatzes (18.3) gelöst werden:

$$\frac{d}{dt} \left[m \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right) \right] = \sum_i \left(h_i + \frac{c_i^2}{2} + gz_i \right) + \sum_j \dot{Q}_j + \sum_k \dot{W}_{t,k} - p \frac{dV}{dt}.$$

Da das Problem stationär ist, sind die linke Seite und die Volumenänderungsarbeit pro Zeit $-p \frac{dV}{dt}$ gleich null. Ferner spielen die Änderung der kinetischen Energie $\frac{c^2}{2}$ und die technische Arbeit \dot{W}_t keine Rolle. Somit verbleibt:

$$0 = \dot{m}(h_{ein} - h_{aus}) + g(z_{ein} - z_{aus}) + \dot{Q}_{el} - \dot{Q}_{Kond}.$$

c) Es werden im aufgestellten ersten Hauptsatz aus Aufgabenteil b) die beiden Terme Enthalpiedifferenz $h_{ein} - h_{aus}$ und der Kondensationswärmestrom \dot{Q}_{Kond} umgeformt. Für die Enthalpiedifferenz gilt:

$$h_{ein} - h_{aus} = c_p(T_{ein} - T_{aus}).$$

Da das Wasser in beiden Fällen im flüssigen Zustand ist, muss die Verdampfungsenthalpie hier nicht berücksichtigt werden.

Mit Kenntnis von (19.9) gilt:

$$\dot{Q}_{Kond} = \dot{m}r.$$

Somit folgt für den unter b) aufgestellten ersten Hauptsatz:

$$0 = \dot{m}(c_p(T_{\text{ein}} - T_{\text{aus}}) + g(z_{\text{ein}} - z_{\text{aus}})) + \dot{Q}_{\text{el}} - \dot{m}r.$$

Es ergibt sich für den Massenstrom:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{-\dot{Q}_{\text{el}}}{c_p(T_{\text{ein}} - T_{\text{aus}}) + g(z_{\text{ein}} - z_{\text{aus}}) - r} \\ &= \frac{-2000}{-378.000 - 1.475 - 2.250.000} \frac{\text{W}}{\frac{\text{J}}{\text{kg}}} \\ &= 7,61 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 0,761 \frac{\text{g}}{\text{s}}\end{aligned}$$

- d) Der Anteil der zur Erwärmung des Wassers verwendeten elektrischen Leistung berechnet sich zu:

$$\eta = \frac{\dot{m}c_p|T_{\text{ein}} - T_{\text{aus}}|}{2000 \text{ W}} = 0,1438 = 14,38 \%$$

18.2 •• In einem Raumfahrzeug arbeitet eine Wärmekraftmaschine reversibel mit dem Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{th}} = \frac{\dot{W}_{\text{trev}}}{\dot{Q}_{\text{H}}} = \eta_{\text{max}} = \eta_{\text{C}} = \frac{T_{\text{H}} - T_{\text{K}}}{T_{\text{H}}}.$$

Der zugeführte Wärmestrom \dot{Q}_{H} wird bei der Temperatur $T_{\text{H}} = 300 \text{ K}$ aufgenommen, die Anlage gibt im stationären Betrieb die Leistung $\dot{W}_{\text{trev}} = 1 \text{ kW}$ ab. Der Abwärmestrom \dot{Q}_{K} kann im Weltraum nur durch Strahlung abgegeben werden, sodass gilt:

$$\dot{Q}_{\text{K}} = \sigma \epsilon A T_{\text{K}}^4,$$

mit der Strahlungskonstanten $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$ und dem Emissionskoeffizienten $\epsilon = 1$. Die wärmeabgebende Fläche A soll aus Gewichtsgründen möglichst klein sein.

- Wie hängt die wärmeabgebende Fläche A von der Temperatur T_{K} ab?
- Wie groß ist die Temperatur T_{K} , bei der die wärmeabgebende Fläche A minimal wird?
- Wie groß ist diese wärmeabgebende Fläche A ?
- Wie groß ist der durch die Strahlung abgegebene Wärmestrom \dot{Q}_{K} ? Sind die Ergebnisse (T_{K} , \dot{Q}_{K}) und die Vorgaben (T_{H} , \dot{W}_{trev} , η_{max}) miteinander verträglich?

Resultat:

- $A = \frac{\dot{W}_{\text{trev}}}{\sigma \epsilon} \frac{1}{(T_{\text{H}} - T_{\text{K}}) T_{\text{K}}^3} = \frac{\dot{W}_{\text{trev}}}{\sigma \epsilon} \frac{1}{T_{\text{H}} T_{\text{K}}^3 - T_{\text{K}}^4}.$
- $T_{\text{K}} = 225 \text{ K}.$
- $A = 20,6 \text{ m}^2.$
- $\dot{Q}_{\text{K}} = 3 \text{ kW}.$

Ausführliche Lösung:

- a) Der erste Hauptsatz (18.3) lautet allgemein:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[m \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right) \right] &= \sum_i \left(h_i + \frac{c_i^2}{2} + gz_i \right) \\ &\quad + \sum_j \dot{Q}_j + \sum_k \dot{W}_{t,k} - p \frac{dV}{dt}.\end{aligned}$$

Im vorliegenden Fall handelt es sich um einen stationären Zustand, weshalb die linke Seite und die Volumenänderungsarbeit pro Zeit $-p \frac{dV}{dt}$ null sind. Die Einflüsse von kinetischer und potenzieller Energie können vernachlässigt werden. Es treten in der Energiebilanz nur zwei Wärmeströme und eine technische Arbeit auf. Der erste Hauptsatz so angewendet und umgeformt ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{\text{K}} &= \dot{Q}_{\text{H}} - \dot{W}_{\text{trev}} \\ &= \frac{\dot{W}_{\text{trev}}}{\eta_{\text{max}}} - \dot{W}_{\text{trev}} \\ &= \dot{W}_{\text{trev}} \left(\frac{T_{\text{H}}}{T_{\text{H}} - T_{\text{K}}} - 1 \right) \\ &= \dot{W}_{\text{trev}} \frac{T_{\text{K}}}{T_{\text{H}} - T_{\text{K}}} \stackrel{!}{=} \sigma \epsilon A T_{\text{K}}^4 \\ \Rightarrow A &= \frac{\dot{W}_{\text{trev}}}{\sigma \epsilon} \frac{1}{(T_{\text{H}} - T_{\text{K}}) T_{\text{K}}^3} = \frac{\dot{W}_{\text{trev}}}{\sigma \epsilon} \frac{1}{T_{\text{H}} T_{\text{K}}^3 - T_{\text{K}}^4}\end{aligned}$$

- b) Nullsetzen der Ableitung $\left(\frac{dA}{dT_{\text{K}}} \right) = 0$ liefert die minimale wärmeabgebende Fläche A_{min} :

$$\left(\frac{dA}{dT_{\text{K}}} \right) = \frac{\dot{W}_{\text{trev}}}{\sigma \epsilon} \left(\frac{-(3T_{\text{H}}T_{\text{K}}^2 - 4T_{\text{K}}^3)}{(T_{\text{H}}T_{\text{K}}^3 - T_{\text{K}}^4)^2} \right) = 0$$

Daraus folgt:

$$3T_{\text{H}}T_{\text{K}}^2 - 4T_{\text{K}}^3 = 0$$

Mit der Lösung $T_{\text{K}} = \frac{3}{4}T_{\text{H}} = 225 \text{ K}.$

- c) Mit der unter a) aufgestellten Gleichung und der in b) ermittelten Temperatur T_{K} ergibt sich eine Fläche A von:

$$A = \frac{1000 \text{ W m}^2 \text{K}^4}{5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}} \cdot \frac{1}{(300 \cdot 225^3 - 225^4) \text{ K}^4} = 20,6 \text{ m}^2$$

- d) Der abgegebene Wärmestrom \dot{Q}_{K} wird über die in der Aufgabenstellung gegebene Gleichung und den in b) bis c) ermittelten Größen berechnet:

$$\dot{Q}_{\text{K}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot 1 \cdot 20,6 \text{ m}^2 \cdot 225^4 \text{ K}^4 = 3 \text{ kW}$$

Kontrolle der Verträglichkeit:

$$\eta_{\max} = \frac{T_H - T_K}{T_H} = \frac{300 \text{ K} - 225 \text{ K}}{300 \text{ K}} = 0,25$$

$$\dot{Q}_H = \frac{\dot{W}_{t,\text{rev}}}{\eta_{\max}} = \frac{1 \text{ kW}}{0,25} = 4 \text{ kW}$$

$$\dot{Q}_K = \dot{Q}_H - \dot{W}_{t,\text{rev}} = 4 \text{ kW} - 1 \text{ kW} = 3 \text{ kW}.$$

Die Ergebnisse sind mit den Vorgaben verträglich.

18.3 ••• Ein chemischer Reaktor ist mit einer Löschanlage für kritische Notfallsituationen ausgestattet. Dazu ist eine Stickstoffflasche neben dem Reaktor montiert. Im Notfall kann der Stickstoff über ein Ventil sehr schnell in den Reaktor eingeblasen werden. Es soll angenommen werden, dass sich Druck und Temperatur im Reaktor durch das Einblasen des Stickstoffes nicht ändern.

Im Folgenden soll eine Beziehung für die Endtemperatur T_2 in der Stickstoffflasche als Funktion von Anfangstemperatur T_1 , Anfangsdruck p_1 und Enddruck p_0 sowie Stoffdaten hergeleitet werden.

Stickstoffflasche: p_1, T_1, V
Reaktor: p_0

Resultat:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{R}{R+c_v}}$$

Ausführliche Lösung: Für die Stickstoffflasche wird der erste Hauptsatz (18.3) ausgehend von der allgemeinen Form aufgestellt, wobei die kinetische Energie $\frac{c^2}{2}$ und die potenzielle Energie gz sowohl im System als auch für die überströmende Masse vernachlässigt werden können. Des Weiteren liegen keine Wärmeströme \dot{Q} oder technische Arbeiten \dot{W}_t vor. Da sich das Volumen der Flasche nicht ändert, ist die Volumenänderungsarbeit pro Zeit $-p \frac{dV}{dt}$ ebenfalls null. Ausgehend von der allgemeinen Form erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right) \right] &= \sum_i \left(h_i + \frac{c_i^2}{2} + gz_i \right) \\ &\quad + \sum_j \dot{Q}_j + \sum_k \dot{W}_{t,k} - p \frac{dV}{dt}, \\ \frac{d(mu)}{dt} &= -h \dot{m}_{ab}, \\ d(mu) &= -h dm_{ab}, \\ u dm + m du &= -h dm_{ab}. \end{aligned}$$

Es liegt allein ein austretender Massenstrom aus der Stickstoffflasche vor, weshalb der Zusammenhang zwischen der Masse des Kontrollvolumens m und der austretenden

Massen $m_{ab} \quad dm = -dm_{ab}$ gilt. Unter Berücksichtigung der Beziehung $u - h = -pv$ aus Tab. 18.1 und des idealen Gasgesetzes (19.25) $pV = mRT$ lassen sich weitere Umformungen durchführen:

$$\begin{aligned} u dm + m du &= h dm, \\ (u - h) dm + m du &= 0, \\ -pv dm + m du &= 0, \\ -RT dm + m du &= 0. \end{aligned}$$

Nach dem idealen Gasgesetz ist die Masse m eines Stoffes eine Funktion von p, V, T ($m = \frac{pV}{RT} = m(p, V, T)$). Eine Ableitung von m erfordert daher die partielle Ableitung nach p, V und T . Da das Volumen der Stickstoffflasche konstant ist, gilt für dm :

$$\begin{aligned} dm &= \left(\frac{\partial m}{\partial p} \right)_{V,T} dp + \underbrace{\left(\frac{\partial m}{\partial V} \right)_{p,T} dV}_{=0} + \left(\frac{\partial m}{\partial T} \right)_{V,p} dT \\ &= -\frac{pV}{RT^2} dT + \frac{V}{RT} dp. \end{aligned}$$

Zudem wird die kalorische Zustandsgleichung für ein ideales Gas nach (19.28) benötigt:

$$du = c_v dT.$$

Einsetzen dieser Zwischenergebnisse in den ersten Hauptsatz liefert:

$$\begin{aligned} -RT \left(-\frac{pV}{RT^2} dT + \frac{V}{RT} dp \right) + mc_v dT &= 0, \\ pV \frac{1}{T} dT - V dp + mc_v dT &= 0, \\ pV \frac{1}{T} dT - V dp + \frac{pV}{RT} c_v dT &= 0, \\ \frac{1}{T} dT - \frac{1}{p} dp + \frac{c_v}{RT} dT &= 0, \\ \frac{R+c_v}{R} \frac{1}{T} dT &= \frac{1}{p} dp. \end{aligned}$$

Die Integration von T_1 bis T_2 und von p_1 bis p_2 führt zu:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{R+c_v}{R} \frac{1}{T} dT &= \int_1^0 \frac{1}{p} dp, \\ \left[\frac{R+c_v}{R} \ln(T) \right]_1^2 &= \left[\ln(p) \right]_1^0, \\ \frac{R+c_v}{R} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) &= \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right), \\ T_2 &= T_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{R}{R+c_v}}. \end{aligned}$$

18.4 • Gegeben sei die Fundamentalgleichung der spezifischen freien Energie eines Stoffes i mit der speziellen Gaskonstanten R sowie den positiven Konstanten a , $c_{v,0}$, s_0 , f_0 , v_0 und T_0 .

$$f(T, v) = -c_{v,0} \left[T \ln \frac{T}{T_0} - (T - T_0) \right] - a v_0 (T - T_0)^2 - s_0 (T - T_0) - R T \ln \frac{v}{v_0} - a T^2 (v - v_0) + f_0.$$

a) Beweisen Sie die Maxwell-Relation:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v.$$

b) Bestimmen Sie die thermische Zustandsgleichung, $p = p(T, v)$.

c) Bestimmen Sie die spezifische Entropie $s(T, v)$.

d) Geben Sie die Gleichung zur Berechnung der spez. inneren Energie in Abhängigkeit von Temperatur T und spezifischem Volumen v an, $u = u(T, v)$.

Resultat:

a) $-\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v.$

b) $p = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T = \frac{RT}{v} + aT^2.$

c) $s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v = c_{v,0} \ln \frac{T}{T_0} + 2a(Tv - T_0v_0) + R \ln \frac{v}{v_0} + s_0.$

d) $u = c_{v,0}(T - T_0) + a(vT^2 - v_0T_0^2) + \underbrace{f_0 + T_0s_0}_{=u_0}.$

Ausführliche Lösung:

a) Es gelten für die freie Energie folgende Zusammenhänge:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_T dv, \\ df = du - d(Ts) = -s dT - p dv.$$

Es folgt somit:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_v = -s \quad \text{sowie} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_T = -p.$$

Somit gilt unter der Beachtung des Schwarz'schen Satzes folgende Gleichungskette:

$$-\left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_v}{\partial v} \right)_T = \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_T}{\partial T} \right)_v = -\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v.$$

b) Der Druck ergibt sich, wie man unter a) sehen kann, zu:

$$p = -\left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_T = \frac{RT}{v} + aT^2.$$

c) Die spezifische Entropie ergibt sich, siehe Teil a):

$$s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_v \\ = c_{v,0} \ln \frac{T}{T_0} + 2a(Tv - T_0v_0) + R \ln \frac{v}{v_0} + s_0.$$

d) Die spezifische innere Energie in Abhängigkeit von Temperatur und spez. Volumen berechnet sich zu:

$$u = f + Ts.$$

Nach Einsetzen der Terme für f und s erhält man:

$$u = c_{v,0}(T - T_0) + a(vT^2 - v_0T_0^2) + \underbrace{f_0 + T_0s_0}_{=u_0}.$$

18.5 •• Ein Dampferzeuger soll kontinuierlich flüssiges Wasser vom Zustand u mit $T_u = 293,15 \text{ K}$; $p_u = 1 \text{ bar}$ in Dampf vom Zustand 5 mit $T_5 = 423,15 \text{ K}$; $p_5 = 4 \text{ bar}$ umwandeln. Der Wasserdampf verhalte sich wie ein ideales Gas, und die Änderungen von kinetischer und potentieller Energie sowie die Kompressionsarbeit der Pumpe seien vernachlässigbar klein.

Zustandspunkt	p	T	h	s
1, festes Wasser	1 bar	273,15 K	$h_1 = 100,0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$	$s_1 = 0,0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$
2, flüssiges Wasser	1 bar	273,15 K	$h_2 = ?$	$s_2 = ?$
u, flüssiges Wasser	1 bar	293,15 K	$h_u = 517,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$	$s_u = 1,5177 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$
3, flüssiges Wasser	1 bar	373,15 K	$h_3 = ?$	$s_3 = ?$
4, Wasserdampf	1 bar	373,15 K	$h_4 = ?$	$s_4 = ?$
5, Wasserdampf	4 bar	423,15 K	$h_5 = ?$	$s_5 = ?$

a) Vervollständigen Sie zunächst die vorstehend aufgeführte Tabelle mithilfe der Definitionen von r (bzw. r_E) nach (19.9) sowie der Enthalpie-Relation nach Tab. 18.1.

b) Welche Wärme q_{u5} muss dem Wasser im Dampferzeuger zugeführt werden, um es von dem Umgebungszustand u in den Zustand 5 zu überführen? (Vergleichen Sie hierzu das obere Bild der Abbildung)

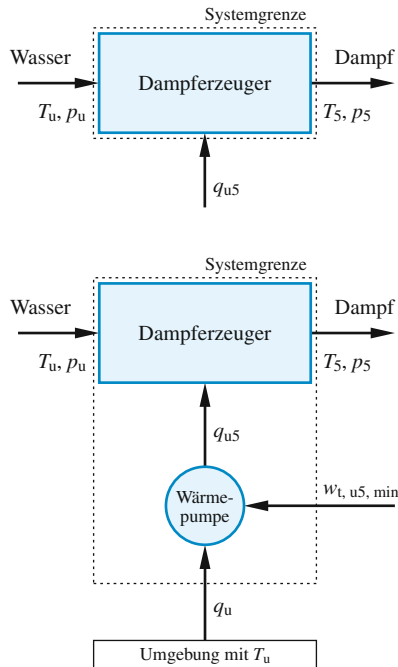
Die nötige Wärme soll dem Dampferzeuger unter Ausnutzung der Umgebung durch eine Wärmepumpe zugeführt werden.

c) Welche mindestens aufzuwendende spez. technische Arbeit $w_{t,u5,\min}$ muss dem System aus Wärmepumpe und Dampferzeuger gemäß des unteren Bildes der Abbildung zugeführt werden, um die zum Erreichen des Zustandes 5 notwendige spez. Wärme q_u aus der Umgebung reversibel übertragen zu können?

- d) Wie groß ist die spez. Exergie des im Zustand 5 vorliegenden Wasserdampfes unter den angegebenen Umgebungsbedingungen, und wie groß ist die von der Umgebung aufgenommene spez. Anergie q_u , die notwendig ist, um den Zustand 5 ausgehend vom Zustand u zu erreichen?

Stoffeigenschaften des Wassers:

- Spezifische Schmelzenthalpie bei 1 bar und 273,15 K:
 $r_E = 333,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
- Spezifische Verdampfungsenthalpie bei 1 bar und 373,15 K: $r = 2250,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
- Spezifische isobare Wärmekapazität der Flüssigkeit:
 $c_{p,fl} = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$
- Spezifische isobare Wärmekapazität des Dampfes:
 $c_{p,g} = 2,1 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$
- Spezielle Gaskonstante des Dampfes: $R = 0,462 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$



Resultat:

a)

$$\begin{aligned} h_2 &= 433,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} & s_2 &= 1,2209 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \\ h_3 &= 853,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} & s_3 &= 2,5311 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \\ h_4 &= 3103,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} & s_4 &= 8,5608 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \\ h_5 &= 3208,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} & s_5 &= 8,1844 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \end{aligned}$$

- b) $q_{u5} = 2691 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
c) $w_{t,u5,min} = 736,6569 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
d) $q_u = 1954,3431 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

Ausführliche Lösung:

- a) Die spez. Enthalpiedifferenz zwischen dem Zustand 1 und Zustand 2 ist gleich der spez. Schmelzenthalpie r_E . Es gilt folglich:

$$r_E = h_2 - h_1 \Rightarrow h_2 = r_E + h_1 = 433,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Die spez. Entropie s_2 kann über die Gibbs'sche Fundamentalgleichung $du = Tds - pdv$ (18.34) und der Gleichung für die spez. Enthalpie $h = u + pv$ (Tab. 18.1) berechnet werden. Für eine isobare Zustandsänderung $dp = 0$ gilt:

$$dh = T ds \Rightarrow ds = \frac{dh}{T}.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt unter Berücksichtigung von $T_1 = T_2 = \text{konst.}$ folgenden Zusammenhang:

$$s_2 = s_1 + \frac{h_2 - h_1}{T_1} = 1,2209 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}.$$

Im Zustand 3 gilt für die spez. Enthalpie h_3 aufgrund der einphasigen Erwärmung:

$$\begin{aligned} h_3 - h_u &= c_{p,fl} (T_3 - T_u) \\ \Rightarrow h_3 &= h_u + c_{p,fl} (T_3 - T_u) = 853,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}. \end{aligned}$$

Die spez. Entropie s_3 berechnet sich für die isobare Zustandsänderung gemäß:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{T} &= \frac{c_p dT}{T} = ds \\ \Rightarrow s_3 &= s_u + c_p \ln \left(\frac{T_3}{T_u} \right) = 2,5311 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}. \end{aligned}$$

Da die Zustandsänderung von 3 nach 4 isobar und isotherm verläuft, muss lediglich die spez. Verdampfungsenthalpie r zugeführt werden, sodass folgt:

$$h_4 = h_3 + r = 3103,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$

Die spez. Entropie berechnet sich genauso wie beim Zustand 2 mit $T_4 = T_3$ und $dp = 0$ zu:

$$s_4 = s_3 + \frac{h_4 - h_3}{T_3} = 8,5608 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}.$$

Bei der Zustandsänderung von 4 nach 5 wird der gesättigte Dampf überhitzt und kann als ideales Gas betrachtet werden, wobei sowohl eine Druck- als auch Temperaturänderung vorliegt. Bei der Berechnung der spez. Enthalpie im Punkt 5 nach (19.32) wird angenommen, dass $c_p = \text{konst.}$ ist:

$$h_5 = h_4 + c_{p,g} (T_5 - T_4) = 3208,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Bei der Berechnung der spez. Entropie s_5 muss sowohl die Druck- wie auch die Temperaturänderung berücksichtigt werden. Die Gibbs'sche Fundamentalgleichung lautet:

$$dh = T ds + v dp$$

Setzt man die ideale Gasgleichung (19.25) für v ein und $dh = c_{p,g} dT$ nach (19.31), so folgt:

$$dh = T ds + R T \frac{dp}{p} \Rightarrow c_{p,g} \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = ds.$$

Somit erhält man für die spez. Entropie im Zustand 5:

$$s_5 = s_4 + c_{p,g} \ln \left(\frac{T_5}{T_4} \right) - R_k \ln \left(\frac{p_5}{p_4} \right) = 8,1844 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}.$$

- b) Da im Dampferzeuger keine technischen Arbeiten zu berücksichtigen sind und der Prozess stationär verläuft, gilt:

$$q_{u5} = h_5 - h_u = 3208,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 517,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 2691 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$

- c) Die zur Dampferzeugung aufzuwendende Arbeit kann über die Exergie eines offenen Systems (18.59) berechnet werden. Es verbleibt nach Division durch einen beliebigen aber konstanten Massenstrom \dot{m} :

$$\begin{aligned} -w_{t,u5,\min} &= w_{\text{ex}} = \frac{\dot{W}_{\text{ex}}}{\dot{m}} = h_u - h_5 - T_u(s_u - s_5) \\ &= 517,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 3208,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \\ &\quad - 293,15 \text{ K} \left(1,5177 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} - 8,1844 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right) \\ &= -736,6569 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

bzw.

$$w_{t,u5,\min} = 736,6569 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$

Es muss Arbeit aufgewendet werden, um ausgehend vom Umgebungszustand u den Zustand 5 zu erreichen.

- d) Der Exergiegehalt des im Zustand 5 vorliegenden Dampfes ist gleich der in Aufgabenteil c) berechneten mindestens zuzuführenden technischen Arbeit (Exergie). Entgegengesetzt zum Fragenteil c) ist hier jedoch die maximal aus dem Zustand 5 gewinnbare Arbeit gemeint und nicht die Arbeit, die minimal notwendig ist, um Zustand 5 zu erreichen. Daher gilt das umgedrehte Vorzeichen:

$$-w_{t,u5,\min} = -w_{\text{ex}},$$

d. h., die bei einer definierten Umgebung maximal aus einem gegebenen Zustand x gewinnbare Arbeit ist gleich der mindestens zuzuführenden Arbeit, um ein Arbeitsfluid aus dem definierten Umgebungszustand in den besagten Zustand x zu überführen.

Der Anergiestrom q_u lässt sich aus der Energiebilanz der Wärmepumpe bestimmen. Es muss gelten:

$$-q_{u5} + w_{t,u5,\min} + q_u = 0 \Rightarrow q_u = q_{u5} - w_{t,u5,\min}.$$

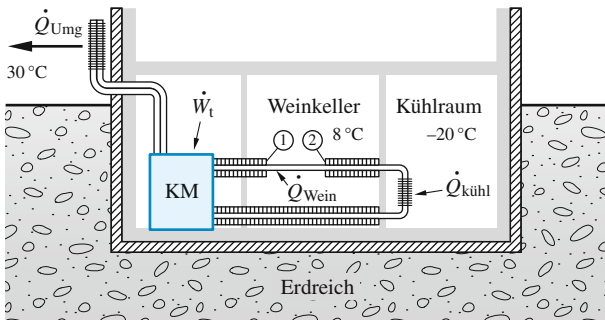
Somit wird der Wärmepumpe ein Anergiestrom von

$$q_u = 2691 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 736,6569 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 1954,3431 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

aus der Umgebung zugeführt.

18.6 •• Ein Rechtsstreit hat folgenden Tatbestand: Der Ankläger ist Mieter 1 eines Mehrfamilienhauses, der seinen Keller als Kühlraum ($\vartheta_{\text{Kühl}} = -20^\circ\text{C}$) verwendet (siehe Abbildung). Die Kälteanlage dazu befindet sich in einem anderen Kellerraum. Zwischen diesen beiden Räumen befindet sich der Keller des Angeklagten, Mieter 2 des Mehrfamilienhauses. Ein Teil der Leitungen führt von der Kälteanlage durch den Raum des Mieters 2 in den Kühlraum von Mieter 1. Der Angeklagte, Mieter 2, hat an der Zuleitung zum Kühlraum die Isolation entfernt und sich so einen gut temperierten Weinkeller ($\vartheta_{\text{Wein}} = +8^\circ\text{C}$) geschaffen. Bei der nächsten Stromrechnung fällt Mieter 1 aus allen Wolken und findet heraus, dass Mieter 2 ihm „Kälte geklaut“ hat. Mieter 2 verteidigt sich vor Gericht, „Kälte“ sei kein physikalischer sinnvoller Begriff und existiere nicht, er habe Mieter 1 doch Energie in Form von Wärme zugeführt und möchte dafür im Gegenteil noch bezahlt werden.

Sie sind Sachverständiger des Gerichts. Überprüfen Sie diesen Sachverhalt.



Weitere Angaben:

$$\dot{Q}_{\text{Kühl}} = 1000 \text{ W}, \quad \varepsilon_{\text{KM}} = \varepsilon_{\text{K,Carnot}}/3, \quad \dot{m}_{\text{CO}_2} = 0,012 \text{ kg/s}.$$

Zustand des Kältemittels (CO_2) an den Punkten 1 und 2 in der Zuleitung ohne Isolationsschicht:

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{CO}_2} &= -20^\circ\text{C}, & h_1 &= 280 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, & s_1 &= 1,329 \frac{\text{kJ}}{\text{K kg}}, \\ p_{\text{CO}_2} &= 18,53 \text{ bar}, & h_2 &= 300 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, & s_2 &= 1,408 \frac{\text{kJ}}{\text{K kg}}. \end{aligned}$$

- Welche elektrische Leistungsaufnahme \dot{W}_t hat die Kälteanlage im Normalbetrieb ohne den Weinkeller, um den Kühlraum kühl zu halten, wenn draußen eine Umgebungstemperatur von $\vartheta_{\text{Umg}} = +30^\circ\text{C}$ vorliegt.
- Berechnen Sie den oben beschriebenen tatsächlich vorliegenden Fall, dass ein zusätzlicher Wärmeeintrag vom Weinkeller hinzukommt, die tatsächliche elektrische Leistungsaufnahme \dot{W}_t^* der Kältemaschine.
- Berechnen Sie die Exergieänderung des Kältemittels beim Durchqueren des Weinkellers von 1 nach 2.
- Welchen Rat geben Sie dem Richter? Wer klagt? Was wird geklaut?

Resultat:

- $\dot{W}_t = 592,53 \text{ W}$.
- $\dot{W}_{t,\text{ges}}^* = 648,87 \text{ W}$.
- $\dot{W}_{\text{ex},1 \rightarrow 2,h} = -47,40 \text{ W}$.
- Mieter 2 klagt Exergie.

Ausführliche Lösung:

- Der Ansatz erfolgt über den Carnot-Wirkungsgrad für Kälteprozesse (Leistungszahl) nach (21.41) (alternativ auch über den ersten und zweiten Hauptsatz lösbar):

$$\varepsilon_{\text{K,Carnot}} = \frac{T_{\text{Kühl}}}{T_{\text{Umg}} - T_{\text{Kühl}}} = \frac{253,15 \text{ K}}{50 \text{ K}} = 5,063.$$

Für die Leistungszahl ε_{K} gilt ebenfalls nach (21.40) und (21.41):

$$\varepsilon_{\text{K,Carnot}} = \frac{\dot{Q}_{\text{Kühl,Carnot}}}{\dot{W}_{t,\text{Carnot}}}, \quad \varepsilon_{\text{K}} = \frac{\dot{Q}_{\text{Kühl}}}{\dot{W}_t}.$$

Mit $\varepsilon_{\text{KM}} = \varepsilon_{\text{K,Carnot}}/3$ ergibt sich für die elektrische Leistungsaufnahme der Kältemaschine:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{KM}} &= \frac{\varepsilon_{\text{K,Carnot}}}{3} = \frac{\dot{Q}_{\text{Kühl}}}{\dot{W}_t} \\ \Leftrightarrow \dot{W}_t &= \frac{\dot{Q}_{\text{Kühl}} \cdot 3}{\varepsilon_{\text{K,Carnot}}} = \frac{1000 \text{ W} \cdot 3}{5,063} = 592,53 \text{ W} \end{aligned}$$

- Die gesamte Leistungsaufnahme der Kälteanlage setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich die Leistungsaufnahmen einerseits zum Kühlen des Kühlraums, andererseits zum Kühlen des Weinkellers:

$$\dot{W}_{t,\text{ges}}^* = \underbrace{\frac{\dot{Q}_{\text{Kühl}}}{\varepsilon_{\text{KM,Kühl}}}}_{\dot{W}_t \text{ aus Teil a)} + \frac{\dot{Q}_{\text{Wein}}}{\varepsilon_{\text{KM,Wein}}}.$$

In Teil a) bereits berechnet:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{K,Carnot,Kühl}} &= \frac{T_{\text{Kühl}}}{T_{\text{Umg}} - T_{\text{Kühl}}} = \frac{253,15 \text{ K}}{50 \text{ K}} = 5,063 \\ \Rightarrow \varepsilon_{\text{KM,Kühl}} &= 1,688. \end{aligned}$$

Analog kann $\varepsilon_{\text{KM,Wein}}$ ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{K,Carnot,Wein}} &= \frac{T_{\text{Wein}}}{T_{\text{Umg}} - T_{\text{Wein}}} = \frac{281,15 \text{ K}}{22 \text{ K}} = 12,78 \\ \Rightarrow \varepsilon_{\text{KM,Wein}} &= 4,26. \end{aligned}$$

Einsetzen der beiden berechneten Werte in die Gleichung mit $\dot{W}_{t,\text{ges}}^*$ und Berücksichtigung des gegebenen Wärmestroms $\dot{Q}_{\text{Kühl}} = 1000 \text{ W}$ und des zu berechnenden Wärmestroms $\dot{Q}_{\text{Wein}} = \dot{m}_{\text{CO}_2}(h_2 - h_1)$ liefert:

$$\dot{W}_{t,\text{ges}}^* = 648,87 \text{ W}$$

- Die Exergieänderung von Zustand 1 nach 2 wird über die Exergie eines offenen Systems (18.59) ermittelt. Diese Gleichung wird zweimal angesetzt; einmal vom Rohreintrittszustand 1 zum Umgebungszustand Umg und einmal vom Rohraustrittszustand 2 zum Umgebungszustand Umg. Auf diese Weise erhalten wir die Exergiezustände des Kältemittels im Ein- und Austrittszustand. Gefragt ist die Exergieänderung zwischen Ein- und Austritt, die sich aus der Differenz der beiden Gleichungen ergibt, wobei sich die Umgebung herauskürzt. Wir erhalten:

$$-\dot{W}_{\text{ex}} = \dot{m}_{\text{CO}_2}[h_2 - h_1 - T_{\text{Umg}}(s_2 - s_1)].$$

Mit den Werten aus der Tabelle:

$$-\dot{W}_{\text{ex}} = -47,40 \text{ W}$$

Das umgekehrte Vorzeichen zeigt, dass die Exergie pro Zeit von 1 nach 2 abnimmt. Um dies zu kompensieren muss mehr Leistung für den Antrieb der Kältemaschine aufgewendet werden.

- d) Mieter 2 führt der Kälteanlage zwar Wärme zu, allerdings strömt Exergie entgegen des Wärmestroms in den Weinkeller. Insgesamt macht es sich dadurch bemerkbar, dass eine größere elektrische Leistung der Kälteanlage zuzuführen ist, was nicht im Sinne von Mieter 1 sein sollte. Mieter 2 klaut Exergie.