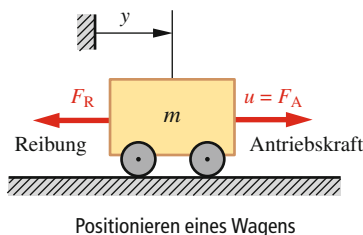


Aus Kapitel 41

Aufgaben

41.1 •• Für das Positioniersystem in der Abbildung soll eine Zustandsregelung entworfen werden.



Schon in Kap. 40 hatten wir zu diesem System die Differenzialgleichung (40.67) ermittelt:

$$m\ddot{y} = -c_R\dot{y} + u.$$

Geben Sie für die (dimensionslos betrachteten) Werte $m = 2$ und $c_R = 10$ eine Zustandsdarstellung der Regelstrecke an und entwerfen Sie eine Zustandsregelung nach Abb. 41.2, wobei beide Regelungseigenwerte bei -5 positioniert werden sollen. Zeigen Sie, dass die resultierende Zustandsregelung in diesem Beispiel mit der Kaskadenregelung nach Aufgabe 40.5 identisch ist.

Hinweis: Wählen Sie als Zustandsvariablen $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y}$.

Resultat:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}}_b \underbrace{F_A}_u.$$

Bei einem Rechengang wie beim Beispiel nach (41.8) erhält man $r^T = (50; 10)$ sowie $m_{x1} = 1$, $m_{x2} = 0$ und $m_u = 0$. Durch Anschreiben von u stellt man die Übereinstimmung mit dem Regelgesetz der Kaskadenregelung fest.

Ausführliche Lösung: Mit der vorgegebenen Definition der beiden Zustandsvariablen erhält man sofort die beiden Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{c_R}{m}x_2 + \frac{1}{m}F_A \end{aligned}$$

und daraus:

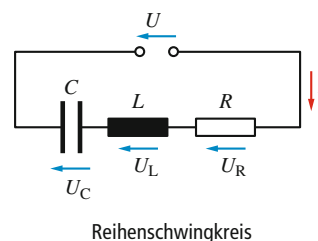
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}}_b \underbrace{F_A}_u.$$

Im Regelgesetz $u = -r^T x + r^T m_x w + m_u w$ ermitteln wir zunächst $r^T = (r_1 \ r_2)$ durch Koeffizientenvergleich von $\det(sI - A + br^T)$ mit dem Wunschpolynom $(s + 5)^2$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0,5r_1 & s + 5 + 0,5r_2 \end{pmatrix} &= s^2 + s(0,5r_2 + 5) + 0,5r_1 \\ &= (s + 5)^2 \end{aligned}$$

zu $r^T = (50; 10)$. Aus (41.4) bestimmt man sodann den Vektor m_x mit den Elementen $m_{x1} = 1$ und $m_{x2} = 0$ sowie $m_u = 0$. Durch Anschreiben von u stellt man die Übereinstimmung mit dem Regelgesetz der Kaskadenregelung fest.

41.2 •



Der Reihenschwingkreis in der Abbildung wird durch folgende Differenzialgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} L\dot{I} + RI + U_C - U &= 0, \\ C\dot{U}_C - I &= 0. \end{aligned}$$

Geben Sie eine Zustandsdarstellung für dieses System an und setzen Sie für die elektrischen Bauelemente die Werte $R = 1 \frac{V}{A}$, $C = 0,002 \frac{As}{V}$ und $L = 0,1 \frac{Vs}{A}$ ein, wobei Sie – anders als in vielen der zuvor betrachteten Beispielen – die physikalischen Einheiten der Zustandsvariablen und der elektrischen Bauelemente berücksichtigen. Eine konstante Zustandsrückführung sei durch das Regelgesetz $u = U = 1 \frac{V}{A} \cdot I - 1 \cdot U_C$ gegeben. Berechnen Sie die Eigenwerte des geregelten Systems. Wie groß ist die Dämpfung des geregelten Schwingkreises?

Hinweis: Wählen Sie als Zustandsvariablen I und U_C .

Resultat:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{I} \\ \dot{U}_C \end{pmatrix}}_x &= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ U_C \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}}_b \underbrace{U}_u \\ \rightarrow \dot{x} &= \begin{pmatrix} -10 \frac{1}{s} & -10 \frac{A}{Vs} \\ 500 \frac{V}{As} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 10 \frac{A}{Vs} \\ 0 \end{pmatrix} u. \end{aligned}$$

Mit $u = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot x_1 - x_2$ folgt das geregelte System:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -20 \frac{\text{A}}{\text{Vs}} \\ 500 \frac{\text{V}}{\text{As}} & 0 \end{pmatrix}}_{A_R} x$$

Das charakteristische Polynom ist $\det(sI - A_R) = s^2 + 10.000 \frac{1}{\text{s}^2}$. Die Dämpfung ist also $d = 0$ und die Eigenwerte sind $s_{1/2} = \pm j100 \frac{1}{\text{s}}$. Das Mitführen der physikalischen Einheiten verkompliziert die Darstellung, ist aber bei der Vorbereitung einer Implementierung anzuraten.

Ausführliche Lösung: Auflösen der beiden angegebenen Gleichungen nach den zeitlichen Ableitungen führt auf

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{I} \\ \dot{U}_C \end{pmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ U_C \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}}_b \underbrace{U}_u.$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$\rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} -10 \frac{1}{\text{s}} & -10 \frac{\text{A}}{\text{Vs}} \\ 500 \frac{\text{V}}{\text{As}} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 10 \frac{\text{A}}{\text{Vs}} \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Mit $u = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot x_1 - x_2$ folgt das geregelte System:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -20 \frac{\text{A}}{\text{Vs}} \\ 500 \frac{\text{V}}{\text{As}} & 0 \end{pmatrix}}_{A_R} x,$$

Das charakteristische Polynom ist $\det(sI - A_R) = s^2 + 10.000 \frac{1}{\text{s}^2}$. Die Dämpfung ist also $d = 0$, und die Eigenwerte sind $s_{1/2} = \pm j100 \frac{1}{\text{s}}$.

41.3 ••• Gegeben ist das Zustandsraummodell einer Regelstrecke

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_b u, \quad y = \underbrace{(1 \ 0)}_{c^T} x.$$

Entwerfen Sie eine Zustandsregelung nach Abb. 41.2 und platzieren Sie dabei beide Regelungseigenwerte in -2 . Nehmen Sie nun an, die Zustandsvariable x_2 sei nicht messbar, und entwerfen Sie einen vollständigen Zustandsbeobachter, dessen Eigenwerte bei -3 liegen. Wie ändert sich Abb. 41.2 durch das Einfügen des Beobachters?

Resultat: $r^T = (2; 2)$, $m_{x1} = 1$, $m_{x2} = 0$ und $m_u = 0$.

Der Beobachter lautet

$$\dot{\hat{x}} = (A + kc^T)\hat{x} + bu + ky \quad \text{mit } k = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und wird gemäß Abb. 41.5 in den Regelkreis eingefügt.

Ausführliche Lösung: Die Berechnung verläuft wie in der ersten Aufgabe zu diesem Kapitel und liefert $r^T = (2; 2)$, $m_{x1} = 1$, $m_{x2} = 0$ und $m_u = 0$. Der Beobachter lautet:

$$\dot{\hat{x}} = (A + kc^T)\hat{x} + bu + ky, \quad \text{mit } k = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und wird gemäß Abb. 41.5 in den Regelkreis eingefügt. Den Vektor k berechnet man dabei durch Koeffizientenvergleich von $\det(sI - A + kc^T)$ mit dem Wunschkpolynom $(s+3)^2$.

41.4 •• Zeitdiskrete Realisierung eines PI-Reglers: Ein PI-Regler besitze die Übertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{2+4s}{s}.$$

Wenden Sie die Tustin-Transformation mit der Abtastzeit T an und ermitteln Sie den zeitdiskreten Regler $R(z^{-1})$ sowie den zugehörigen rekursiven Algorithmus für $u[k]$.

Resultat: Ersetzt man s durch $\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$, so resultiert:

$$R(z^{-1}) = \frac{(T+4) + (T-4)z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{u[k]}{e[k]}.$$

Daraus folgt die Differenzengleichung:

$$u[k] = u[k-1] + (T+4)e[k] + (T-4)e[k-1].$$

Ausführliche Lösung: Ersetzt man s durch $\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$, so resultiert:

$$R(z^{-1}) = \frac{(T+4) + (T-4)z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{u[k]}{e[k]}.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit beiden Nennern durch und erhalten mit der Interpretation von z^{-1} als Zeitverschiebeoperator die Differenzengleichung:

$$u[k] = u[k-1] + (T+4)e[k] + (T-4)e[k-1].$$